1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - III računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Metodom perturbacije odrediti sumu:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

Rješenje:

Metodom pertrubacije se vrijednost sume:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

traži tako što se S_{n+1} napiše na dva načina:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad (1)$$

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (2)$$

A nakon toga se pokuša suma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

svesti na sumu S_n. Do izraza za sumu S_n se u nekim slučajevima može doći izjednačavajući (1) sa (2).

Primijenimo navedeni postupak na naš zadatak, određivanje sume:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1). \quad (3)$$

S_{n+1} će biti:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1). \quad (4)$$

Ako se izdvoji zadnji član sume, dobija se:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2),$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2). \quad (5)$$

Izdvajanjem prvog elementa sume (4), nakon uvođenja smjene $k' = k-1$, dobija se:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = 1\cdot 2 + \sum_{k=2}^{n+1} k(k+1)\Big|_{\substack{k'=k-1\\k=k'+1}} = 2 + \sum_{k'=1}^{n}(k'+1)(k'+2) = \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n}((k'+1)k' + (k'+1)2) = 2 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + 2\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + 2\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \end{aligned}$$

$$S_{n+1} = 2 + S_n + 2\sum_{k=1}^{n} k + 2n \tag{6}$$

Jednačine (5) i (6) predstavljaju S_{n+1} pa im i desne strane moraju biti jednake, dakle:

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)(n+2) &= 2 + S_n + 2\sum_{k=1}^{n} k + 2n \qquad (7) \\ (n+1)(n+2) &= 2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + 2n \\ 2\sum_{k=1}^{n} k &= (n+1)(n+2) - 2 - 2n \\ \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}(n^2+3n+2-2-2n) = \frac{1}{2}(n^2+n) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{8}$$

Nismo odredili sumu S_n, ali smo polazeći od sume $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ u jednom trenutku dobili sumu $\sum_{k=1}^{n}(k+1)$. Zaključujemo da bi trebalo poći od $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)$ da bi se dobila suma $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$. Dakle, polazimo od sume:

$$S1_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1). \tag{9}$$

Primijenimo metod pertrubacije. $S1_{n+1}$ će biti:

$$S1_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k(k+1). \tag{10}$$

Ako se izdvoji zadnji član sume, dobija se:

$$S1_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) + n(n+1)(n+2),$$

$$S1_{n+1} = S1_n + n(n+1)(n+2). \tag{11}$$

Izdvajanjem prvog elementa sume (9), nakon uvođenja smjene $k' = k-1$, dobija se:

$$\begin{aligned} S1_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k(k+1) = 0 + \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)k(k+1)\Big|_{k'=k-1} = \sum_{k'=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \\ &= \sum_{k'=1}^{n} k(k+1)(k-\mathbf{1}+\mathbf{1}+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k-1) + 3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \end{aligned}$$

Poredeći ovu jednakost sa (3) i (9), dobijamo

$$S1_{n+1} = S1_n + 3S_n \tag{12}$$

Izjednačavanjem (11) i (12) dobijamo:

$$\begin{aligned} S1_n + n(n+1)(n+2) &= S1_n + 3S_n \\ 3S_n &= n(n+1)(n+2) \\ S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Što preddstavlja datu sumu:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1.2 Zadatak 2.

Pronađite rješenje rekurzije:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

ako je $C_0 = 0$. Veličina C_n predstavlja prosječan broj operacija poređenja potrebnih za sortiranje n slučajno raspoređenih veličina primjenom „quicksort" algoritma. (Savjet: napišite izraze za C_n i C_{n-1} i pokušajte ih iskombinovati da se oslobodite sume u definiciji rekurzije).

Rješenje:

Izraz za C_n je dat postavkom zadatka kao:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

napišimo na osnovu njega izraz za C_{n-1}:

$$C_{n-1} = n - 1 + 1 + \frac{2}{n-1} \sum_{\kappa=0}^{n-1-1} C_k.$$

Dalje posmatrajmo dva dobijena izraza i pokušajmo ih iskombinovati tako da se eliminiše suma, dakle, imamo:

$$\left.\begin{array}{r} C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum\limits_{\kappa=0}^{n-1} C_k \\ C_{n-1} = n - 1 + 1 + \frac{2}{n-1} \sum\limits_{\kappa=0}^{n-1-1} C_k \end{array}\right\}.$$

Izraz za C_n ima jedan član više u sumi od izraza za C_{n-1}, izdvojimo taj član van sume u izrazu za C_n, a istovremeno sredimo i izraz za C_{n-1}:

$$\left.\begin{array}{r} C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \left(\sum\limits_{\kappa=0}^{n-2} C_k + C_{n-1} \right) \\ C_{n-1} = n + \frac{2}{n-1} \sum\limits_{\kappa=0}^{n-2} C_k \end{array}\right\}$$

Kada uporedimo ova dva izraza možemo primijetiti da u oba konfiguruše $\sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k$, izrazimo ovu sumu iz jednog od ova dva izraza, na primjer iz drugog:

$$\left.\begin{array}{r} C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \frac{n-1}{n-1} \sum\limits_{\kappa=0}^{n-2} C_k + \frac{2}{n} C_{n-1} \\ C_{n-1} - n = \frac{2}{n-1} \sum\limits_{\kappa=0}^{n-2} C_k \end{array}\right\}$$

koristeći umjesto sume $C_{n-1} - n$, prva jednačina se svodi na:

$$C_n = n + 1 + \frac{n-1}{n} (C_{n-1} - n) + \frac{2}{n} C_{n-1}$$

Dalje, možemo pisati:

$$\begin{array}{rcl} C_n & = & n + 1 + \frac{n-1}{n} C_{n-1} - n + 1 + \frac{2}{n} C_{n-1} \\ C_n & = & 2 + \frac{n-1+2}{n} C_{n-1} \\ C_n & = & 2 + \frac{n+1}{n} C_{n-1} \\ nC_n & = & 2n + (n+1) C_{n-1} \end{array}$$

Dobili smo rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \tag{13}$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n} \left(b_1 C_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \right) \tag{14}$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} ... a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} ... b_2}.$$

Poredeći rekurziju koju želimo riješiti:

$$nC_n = (n+1) C_{n-1} + 2n$$

sa (13), zaključujemo da je u našem slučaju: $a_n = n$, $b_n = n+1$ i $c_n = 2n$.

Sada možemo izračunati s_n:

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)...3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1) n (n-1) ... 4 \cdot 3} = \frac{2}{(n+1) n}$$

i zamijeniti u formuli za C,(14):

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\frac{2}{(n+1)n} n} \left(2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1) k} 2k \right) = \frac{1}{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+1} = \frac{n+1}{2} 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ C_n &= 2(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k, \tag{15}$$

uz početni uslov $C_0 = 0$.

Želimo odrediti C_1, C_2, C_3 i C_4. Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto n stavljamo $1, \ 2, \ 3, \ 4$, respektivno. Dakle, za $n = 1$ imamo:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 + 1 + \frac{2}{1} \sum_{\kappa=0}^{1-1} C_k = 2 + 2 \sum_{\kappa=0}^{0} C_k = \\ &= 2 + 2C_0 = 2 + 2 \cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2 + 1 + \frac{2}{2} \sum_{\kappa=0}^{2-1} C_k = 3 + \sum_{\kappa=0}^{1} C_k = \\ &= 3 + C_0 + C_1 = 3 + 0 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= 3 + 1 + \frac{2}{3}\sum_{\kappa=0}^{3-1} C_k = 4 + \frac{2}{3}\sum_{\kappa=0}^{2} C_k = \\ &= 4 + \frac{2}{3}(C_0 + C_1 + C_2) = 4 + \frac{2}{3}(0 + 2 + 5) = 4 + \frac{14}{3} = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Za $n = 4$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_4 &= 4 + 1 + \frac{2}{4}\sum_{\kappa=0}^{4-1} C_k = 5 + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=0}^{3} C_k = \\ &= 5 + \frac{1}{2}(C_0 + C_1 + C_2 + C_3) = 5 + \frac{1}{2}(0 + 2 + 5 + \frac{26}{3}) = 5 + \frac{47}{6} = \frac{77}{6}. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = 2\,(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Za $n = 1$ dobijamo:

$$C_1 = 2\,(1+1)\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k+1} = 4\frac{1}{1+1} = 2$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$C_2 = 2\,(2+1)\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k+1} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 6\frac{5}{6} = 5$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$C_3 = 2\,(3+1)\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k+1} = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 8\frac{6+4+3}{12} = \frac{26}{3}$$

Za $n = 4$ dobijamo:

$$C_4 = 2\,(4+1)\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k+1} = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 10\frac{30+20+15+12}{60} = \frac{77}{6}$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina.