

# 1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - dodatni zadaci sa posljednjih vježbi

## 1.1 Zadatak 1.

Pronađite rješenje rekurzije:

$$3n - 2 - nC_n + (n + 1)C_{n-1} = 0$$

ako je  $C_0 = 0$ . Odrediti  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ .

Rješenje:

Treba dobiti rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \quad (1)$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n} \left( b_1 C_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right) \quad (2)$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2}.$$

U tom cilju izraz iz postavke napisaćemo u obliku:

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 3n - 2$$

Poredeći ovu rekurziju sa (1), zaključujemo da je u našem slučaju:  $a_n = n$ ,  $b_n = n + 1$  i  $c_n = 3n - 2$ .

Sada možemo izračunati  $s_n$ :

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)n(n-1)\dots 4 \cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

i zamijeniti u formuli za  $C_n$ , (2):

$$C_n = \frac{1}{\frac{2}{(n+1)n}n} \left( 2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)k} (3k-2) \right) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{3k-2}{k+1}$$

$$C_n = 2 \frac{(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n \frac{3k-2}{(k+1)k} = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{3k-2}{k(k+1)}$$

što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 3n - 2 \quad (3)$$

uz početni uslov  $C_0 = 0$ . Izraz 3 možemo zapisati i u obliku:

$$C_n = \frac{(n+1)}{n}C_{n-1} + 3 - \frac{2}{n}$$

Želimo odrediti  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ . Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto  $n$  stavljamo 1, 2, 3 respektivno. Dakle, za  $n = 1$  imamo:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1+1}{1}C_{1-1} + 3 - \frac{2}{1} \\ &= 2C_0 + 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{2+1}{2}C_{2-1} + 3 - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}C_1 + 3 - 1 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + 2 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{3+1}{3}C_{3-1} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}C_2 + \frac{7}{3} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{28+14}{6} = \frac{42}{6} = 7. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{3k-2}{k(k+1)}.$$

Za  $n = 1$  dobijamo:

$$C_1 = (1+1) \sum_{k=1}^1 \frac{3k-2}{k(k+1)} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 \cdot (1+1)} = 1.$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$C_2 = (2+1) \sum_{k=1}^2 \frac{3k-2}{k(k+1)} = 3 \cdot \left( \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 \cdot (1+1)} + \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot (2+1)} \right) = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \right) = \frac{7}{2}.$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$C_3 = (3+1) \sum_{k=1}^3 \frac{3k-2}{k(k+1)} = 4 \cdot \left( \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 \cdot (1+1)} + \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot (2+1)} + \frac{3 \cdot 3 - 2}{3 \cdot (3+1)} \right)$$

$$C_3 = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{7}{12} \right) = \frac{21}{3} = 7.$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina.

## 1.2 Zadatak 2.

Pronadite rješenje rekurzije:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa$$

ako je  $C_0 = 0$ . Odrediti  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ .

Rješenje:

Treba dobiti rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n. \quad (4)$$

Izraz za  $C_n$  je dat postavkom zadatka kao:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa$$

napišimo na osnovu njega izraz za  $C_{n-1}$ :

$$C_{n-1} = 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-1-1} C_\kappa.$$

Dalje posmatrajmo dva dobijena izraza i pokušajmo ih iskombinovati tako da se eliminiše suma, dakle, imamo:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_\kappa \\ C_{n-1} &= 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa \end{aligned} \right\}$$

Izraz za  $C_n$  ima jedan član više u sumi od izraza za  $C_{n-1}$ , izdvojimo taj član van sume u izrazu za  $C_n$ :

$$\left. \begin{aligned} C_n &= 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa + C_{n-1} \\ C_{n-1} &= 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_\kappa \end{aligned} \right\}$$

Kada uporedimo ova dva izraza možemo primijetiti da u oba konfiguruje  $\sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k$ . Označimo ovu sumu sa  $S = \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k$

$$\left. \begin{aligned} C_n &= 7n + S + C_{n-1} \\ C_{n-1} &= 7(n-1) + S \end{aligned} \right\}$$

Iz druge jednačine slijedi da je  $S = C_{n-1} - 7(n-1)$ , prva jednačina se svodi na:

$$C_n = 7n + C_{n-1} - 7(n-1) + C_{n-1}$$

Dalje, možemo pisati:

$$\begin{aligned} C_n &= 7n + 2C_{n-1} - 7n + 7 \\ C_n &= 2C_{n-1} + 7 \end{aligned}$$

Dobili smo rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \quad (5)$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n} \left( b_1 C_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right) \quad (6)$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2}.$$

Poredeći rekurziju koju želimo riješiti:

$$n C_n = (n+1) C_{n-1} + 2n$$

sa (5), zaključujemo da je u našem slučaju:  $a_n = 1$ ,  $b_n = 2$  i  $c_n = 7$ .

Sada možemo izračunati  $s_n$ :

$$s_n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

i zamijeniti u formuli za  $C_n$ , (6):

$$C_n = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}} \left( 2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 7 \right) = 2^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{7}{2^{k+1}},$$

što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

uz početni uslov  $C_0 = 0$ .

Želimo odrediti  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ . Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto  $n$  stavljamo 1, 2, 3, 4, respektivno. Dakle, za  $n = 1$  imamo:

$$\begin{aligned}C_1 &= 7 \cdot 1 + \sum_{\kappa=0}^{1-1} C_\kappa = 7 + C_0 = \\ &= 7 + 2 \cdot 0 = 7.\end{aligned}$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$\begin{aligned}C_2 &= 7 \cdot 2 + \sum_{\kappa=0}^{2-1} C_\kappa = 14 + \sum_{\kappa=0}^1 C_\kappa = 14 + C_0 + C_1 = \\ &= 14 + 0 + 7 = 21.\end{aligned}$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$\begin{aligned}C_3 &= 7 \cdot 3 + \sum_{\kappa=0}^{3-1} C_\kappa = 21 + \sum_{\kappa=0}^2 C_\kappa = 21 + C_0 + C_1 + C_2 = \\ &= 21 + 0 + 7 + 21 = 49.\end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = 2^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{7}{2^{n+1}}.$$

Za  $n = 1$  dobijamo:

$$C_1 = 2^{1+1} \sum_{k=1}^1 \frac{7}{2^{k+1}} = 2^2 \cdot \frac{7}{4} = 7$$

Za  $n = 2$  dobijamo:

$$C_2 = 2^{2+1} \sum_{k=1}^2 \frac{7}{2^{k+1}} = 2^3 \cdot \left( \frac{7}{2^{1+1}} + \frac{7}{2^{2+1}} \right) = 8 \left( \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \right) = 14 + 7 = 21$$

Za  $n = 3$  dobijamo:

$$\begin{aligned}C_3 &= 2^{3+1} \sum_{k=1}^3 \frac{7}{2^{k+1}} = 2^4 \cdot \left( \frac{7}{2^{1+1}} + \frac{7}{2^{2+1}} + \frac{7}{2^{3+1}} \right) = 16 \left( \frac{7}{4} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16} \right) \\ C_3 &= 28 + 14 + 7 = 49.\end{aligned}$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina. Postoje slučajevi kada se rješenje rekurzija traži na nešto drugačiji način, ali to prevazilazi okvire našeg kursa.