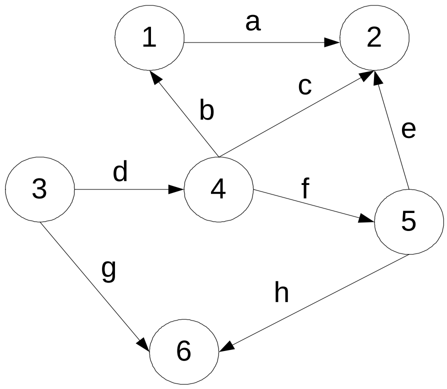
1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - IV računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Za orjentisani graf sa slike 1 napisati matricu susjedstva i matricu incidencije.



Slika 1

Rješenje:

U matrici susjedstva A i vrste i kolone predstavljaju čvorove koji su na neki način označeni (brojevima od 1 do 6 u našem primjeru). Element a_{ij} matrice susjedstva **A**, usmjerenog grafa, ima vrijednost 1 ukoliko je čvor koji je predstavljen u i-toj vrsti povezan sa čvorom koji je predstavljen u j-toj koloni granom koja je usmjerena od i ka j. Posmatrajmo graf sa slike 1 i pišimo matricu susjedstva. Vrste će biti redom čvorovi 1, 2, ..., 6, kolone će takođe predstavljati čvorove 1, 2, ..., 6. Matrica susjedstva će biti:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

U matrici **A** samo dio koji je napisan unutar uglastih matrica čine elementi matrice susjedstva, brojevi prije uglastih zagrada i iznad matrice ilustruju šta je zapisano u vrstama, a šta u kolonama.

Matrica incidencije **G** je matrica koja ima onoliko vrsta koliko graf ima čvorova i onoliko kolona koliko graf ima grana. Ona se definiše različito za slučaj orjentisanog i neorjentisanog grafa. Ako je graf orjentisan tada je

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ -1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Za dati graf, vrste će biti redom čvorovi 1, 2, ..., 6, a kolone će predstavljati grane a, b, ..., h. Matrica incidencije će biti:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Primjetimo da matrica incidencije u svakoj koloni (koja odgovara toj grani) ima samo jednu vrijednost -1, na poziciji koja odgovara čvoru iz kojeg ta grana ističe, i jednu vrijednost 1, na poziciji koja odgovara čvoru u koji ta grana utiče. Sve ostalo su nule jer jedna grana povezuje tačno 2 čvora.

1.2 Zadatak 2.

Data je matrica susjedstva A orjentisanog grafa. Odrediti na osnovu nje matricu incidencije.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje:

Pođimo od definicije matrice susjedstva. U matrici susjedstva orjentisanog grafa element na poziciji $a_{ij} = 1$ ukoliko postoji direktna veza čvora i sa čvorom j. Ta direktna veza je zapravo grana koja izlazi iz čvora i a ulazi u čvor j.

Prvo što zaključujemo na osnovu matrice **A** i njene definicije jeste da imamo tačno 4 grane (označimo ih sa a, b, c, d). Ovaj zaključak smo izveli iz činjenice da su samo 4 elementa matrice **A** jednaka jedinici. Sada možemo odrediti i elemente matrice incidencije **G**. Sa a označavamo granu koja odgovara jedinici na poziciji a_{12}, b – jedinici na poziciji a_{13}, c – jedinici na poziciji a_{41} i d – jedinici na poziciji a_{43}. Ako grana za koju pišemo vrijednosti elemenata matrice incidencije (elementi u odgovarajućoj koloni) odgovara jedinici iz matrice susjedstva na poziciji a_{ij} to znači da grana izlazi iz čvora i (dakle, u toj koloni imamo -1 u i-toj vrsti) i ulazi u čvor j (1 u j-toj vrsti). Sve ostale vrijednosti u posmatranoj koloni su 0, jer jedna grana direktno povezuje samo dva čvora. Dakle, matrica incidencije koja odgovara matrici susjedstva **A** će biti:

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Za vježbu možete nacrtati graf čija je matrica incidencije upravo dobijeno $\mathbf{G}$ i provjeriti da li je matrica susjedstva tako dobijenog grafa zaista matrica $\mathbf{A}$ od koje smo krenuli.

1.3 Zadatak 3.

Matrica susjedstva u zadatku 2. data je za slučaj orjentisanog grafa. Napisati matricu susjedstva za odgovarajući neorjentisani graf. Nakon toga, na osnovu matice susjedstva neorjentisanog grafa napisati i ogovarajuću matricu incidencije.

Rješenje:

U slučaju neorjentisanog grafa matrica susjedstva je simetrična matrica. Neka su $a1_{ij}$ pojedinačni elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ iz našeg zadatka, gdje su indeksi i i j indeksi vrste, odnosno kolone matrice $\mathbf{A}_1$ respektivno. Ako postoji grana između i-tog i j-tog čvora u matrici susjedstva orjentisanog grafa, tada će za iste indekse i i j u matrici susjedstva odgovarajućeg neorjentisanog grafa postojati i grana između j-og i i-og (to je ista grana). Drugim riječima, ako je element $a_{ij} = 1$ u matrici susjedstva orjentisanog grafa, tada za isto i i isto j u matrici odgovarajućeg neorjentisanog grafa važi da je i element $a1_{ji} = 1$.

U matici $\mathbf{A}$ iz zadatka 2. jednaki su jedinici sljedeći elementi: a_{12}, a_{13}, a_{41} i a_{43}.U matrici susjedstva odgovarajućeg neorjentisanog grafa biće jednaki jedinici elementi $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$ i sljedeći elementi: $a1_{21}, a1_{31}, a1_{14}$ i $a1_{34}$.Uočimo da su u odnosu na glavnu dijagonalu svi elementi matrice susjedstva $\mathbf{A}_1$ neorjentisanog grafa simetični. Tražena matrica je:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$$

Rekli smo da je matrica incidencije $\mathbf{G}$ matrica koja ima onoliko vrsta koliko graf ima čvorova i onoliko kolona koliko graf ima grana. Ona se definiše različito za slučaj orjentisanog i neorjentisanog grafa. Ako je graf neorjentisan tada je pojedinačni element matrice incidencije definisan kao:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni ili krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Prvo što zaključujemo na osnovu matrice $\mathbf{A}_1$ i njene definicije za slučaj neorjentisanog grafa jeste da imamo tačno 4 grane (označimo ih sa a, b, c, d). Ovaj zaključak smo izveli iz činjenice da su elementi matrice $\mathbf{A}_1$: $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$ jednaki jedinici, dok su elementi $a1_{21}, a1_{31}, a1_{14}$ i $a1_{34}$ takođe jednaki jedinici, ali je to posljedica činjenice da je graf neorjentisan pa je matrica $\mathbf{A}_1$ simetrična (odnosno, oni nam govore da se radi o istim granama o kojima govore elementi $a1_{12}, a1_{13}, a1_{41}$ i $a1_{43}$). Sada možemo odrediti i elemente matrice incidencije $\mathbf{G}_1$. Sa a označavamo granu koja odgovara jedinici na poziciji $a1_{12}$, $b-$

jedinici na poziciji $a1_{13}$, $c -$ jedinici na poziciji $a1_{41}$ i $d -$ jedinici na poziciji $a1_{43}$. Ako grana za koju pišemo vrijednosti elemenata matrice incidencije (elementi u odgovarajućoj koloni) odgovara jedinici iz matrice susjedstva na poziciji $a1_{ij}$ to znači da postoji grana između čvorova i i j, pa na osnovu definicije matrice incidencije, za oba čvora pišemo vrijednost 1. Svi ostali elementi posmatrane kolone jednaki su 0, jer jedna grana povezuje tačno dva čvora. Dakle, matrica incidencije koja odgovara matrici susjedstva $\mathbf{A}_1$ će biti:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zaključujemo da u slučaju jedne grane (jedna kolona matrice $\mathbf{G}_1$) tačno dva elementa imaju vrijednost 1 dok je u slučaju matrice incidencije orjentisanog grafa jedan element imao vrijednost -1 a drugi 1.

1.4 Zadatak 4.

Data je matrica susjedstva orjentisanog grafa. Odrediti da li postoji put dužine 2. Ukoliko postoji, koliko takvih puteva ima i koji su to putevi za čvorove:
a) 4 *i* 6 b) 4 *i* 1?

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje:

Koliko puteva dužine n postoji među čvorovima nekog grafa određujemo na osnovu vrijednosti elemenata matrice koja se dobije kao n-ti stepen matrice susjedstva $\mathbf{A}$.

Nas interesuju putevi dužine 2 pa bi tražili kvadrat matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} * \mathbf{A}$$

U pitanju je matrično množenje koje je moguće jer je matrica susjedstva po definiciji uvijek kvadratna matrica. Dalje, element matrice $\mathbf{A}_1$na poziciji ij, $a1_{ij}$ ima vrijednost koja je jednaka broju puteva stepena 2 između čvorova i i j. Ukoliko bi nam se tražilo da za sve čvorove ispitamo koliko postoji puteva stepena 2 imalo bi smisla tražiti kvadrat cijele matrice. Međutim, nama se u zadatku traži koliko puteva dužine 2 ima između čvorova a) $4-6$, b) $4-1$. Zaključujemo da je dovoljno odrediti elemente $a1_{46}$ i $a1_{41}$. Pri matričnom množenju $\mathbf{A} * \mathbf{A}$, element na poziciji ij, $a1_{ij}$ se dobija tako što se matrično pomnože $i-$ta vrsta i $j-$ ta kolona.

a) Dakle, biće za $a1_{46}$ - prva vrsta matrično pomnožena sa četvrtom kolonom:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = 1 \end{aligned}$$

Postoji put dužine 2 između čvorova 4 i 6. Postoji tačno jedan takav put jer je $a1_{46} = 1$. Koji čvorovi čine taj put određujemo tako što vidimo koji su to elementi čijim množenjem smo dobili ovu jedinicu. Na osnovu postupka za dobijanje $a1_{46}$ vidimo da je:

$$\begin{aligned} a1_{46} &= 1*0+1*0+0*1+0*0+1*1+0*1 = \\ &= a_{41}*a_{16}+a_{42}*a_{26}+a_{43}*a_{36}+a_{44}*a_{46}+a_{45}*a_{56}+a_{46}*a_{66} \end{aligned}$$

$a1_{46} = 1$ zbog jedinice koja se dobija množenjem $a_{45} * a_{56}$. Znajući da, po definiciji matrice susjedstva čiji su a_{45} i a_{56} elementi, ovo znači da postoji grana od $4-5$ i od $5-6$, zaključujemo da će traženi put biti $4-5-6$.

Data matrica predstavlja matricu susjedstva grafa iz zadatka 1 predstavljenog na slici 1. Provjerimo da li smo dobili tačan rezultat. Pođimo iz čvora 4 i pokušajmo doći u čvor 6 kroz tačno dvije grane. Kandidati su grane f i h kao i d i g. Možemo doći samo granama f i h, dakle idući od čvora 4, preko čvora 5, pa u čvor 6. Grane d i g ne možemo koristiti jer grana d nije usmjerena od čvora 4 ka čvoru 5, već obratno, pa je ne možemo koristiti kao put do čvora 6.

b)

$$\begin{aligned} a1_{41} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 1*0+1*0+0*0+0*1+1*0+0*0 = 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da ne postoji put dužine 2 koji bi povezivao čvorove 4 i 1. Pogledajmo opet sliku 1 iz zadatka 1. Lako je uočiti da ne postoji nijedan put kojim bi mogli doći iz čvora 4 u čvor 1 prolazeći kroz tačno dvije grane u zadatom smjeru. Jedini kandidat dužine 2 je put koji čine grane c i a. Granu c zaista možemo koristiti za prelazak iz čvora 4 u čvor 2, ali iz čvora 2 ne možemo preći u čvor 1 granom a jer nam prelaženje u tom smjeru nije dozvoljeno. Sve ostale putanje su manje ili veće dužine od 2.

1.5 Zadatak 5. (primjer iz skripte)

Pronađite kolika je veličina kompletnog grafa stepena n u slučaju da je graf a) orjentisan, b) neorjentisan i c) neorjentisan i prost.

Rješenje:

Navedenim problemima pristupimo rekurzivno. Označimo broj grana sa K_n. Napomenimo da je graf kompletan ako za proizvoljna dva čvora a i b postoji grana koja povezuje čvorove a i b.

a) U najprostijem slučaju grafa sa jednim čvorom imamo da je $K_1 = 1$. Pošto je u pitanju graf koji je kompletan i orjentisan, to znači da u slučaju jednog čvora mora postojati grana koja taj čvor povezuje sa samim sobom. Ovakva grana naziva se petlja. U slučaju da je u pitanju kompletan graf sa dva čvora a i b, tada moraju postojati grane koje povezuju čvorove sa njima samima i to grana (petlja) od čvora a do čvora a i grana (petlja) od čvora b do čvora b. Dodatno, mora postojati grana koja povezuje čvor a sa čvorom b, a pošto je graf orjentisan, mora postojati i grana koja povezuje čvor b sa čvorom a.

Sada posmatrajmo opšti slučaj kompletnog orjentisanog grafa sa $n-1$ čvorom. Dodavanjem jednog čvora u kompletan orjentisani graf sa $n-1$ čvorom potrebno je: povezati čvor n sa samim sobom (petlja od n do n), zatim povezati sve postojeće čvorove sa novim čvorom (grane od p do n za $p = 1, ..., n-1$) i na kraju povezati novi čvor sa postojećim čvorovima (grane od n do p za $p = 1, 2, ..., n-1$). Dodali smo ukupno $1 + (n-1) + (n-1) = 2n-1$ grana na postojeći broj grana K_{n-1} kompletnog orjentisanog grafa sa $n-1$ čvorom . Sada je rekurzivna relacija za veličinu grafa:

$$K_n = K_{n-1} + 2n - 1, \tag{2}$$

uz početni uslov $K_1 = 1$. Navedena rekurzivna relacija je oblika:

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \tag{3}$$

pa rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(b_1 C_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \tag{4}$$

gdje je:

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} ... a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} ... b_2}.$$

Poredeći (2) i (3) zaključujemo da je $a_n = 1$, $b_n = 1$ i $c_n = 2n-1$, pa je rješenje dobijeno transformisanjem navedene rekurzije u sumu (4):

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

b) U slučaju neorjentisanog kompletnog grafa, takođe je neophodno da u slučaju jednog čvora postoji grana koja taj čvor povezuje sa samim sobom.

Zato je početni uslov $K_1 = 1$. U slučaju neorjentisanog kompletnog grafa sa dva čvora a i b, postoje dvije grane, koje povezuju čvorove sa samima sobom, grana od čvora a do čvora a, i grana od čvora b, do čvora b. Dodatno, treba da postoji grana koja povezuje ove čvorove međusobno (u slučaju orjentisanog kompletnog grafa, postojale su dvije ovakve grane).

U opštem slučaju kompletnog neorjentisanog grafa sa $n-1$ čvorom, dodavanjem jednog dodatnog (n-tog) čvora potrebno je: povezati taj čvor n sa samim sobom (petlja od n do n), i povezati ga sa postojećim $n-1$ čvorom. Dakle, dodavanjem jednog čvora, potrebno je dodati $n-1+1$ granu. Zato će rekurzivna relacija za ukupan broj grana u ovom slučaju glasiti:

$$K_n = K_{n-1} + n$$

Kako i u uvom slučaju prepoznajemo rekurzivnu relaciju oblika (3), to ćemo rješenje tražiti u obliku (4), pri čemu je sada: $a_n = 1$, $b_n = 1$ i $c_n = n$. Rješenje će biti:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Kod prostog kompletnog neorjentisanog grafa rješenje tražimo na sličan način. Glavna razlika leži u činjenici da je graf prost, tako da ne postoje petlje, odnosno grane koje dati čvor povezuju sa samim sobom. Tako za slučaj grafa sa samo jednim čvorom ne postoji nijedna grana, tako da je početni uslov $K_1 = 0$. U slučaju grafa sa dva čvora, postoji samo jedna grana koja ih međusobno povezuje (jer je graf neorjentisan).

U opštem slučaju grafa sa $n-1$ čvorom dodavanje n-tog čvora znači da ga je potrebno povezati sa postojećim $n-1$ čvorom. Zato je u ovom slučaju rekurzivna relacija oblika:

$$K_n = K_{n-1} + n - 1,$$

dok je njeno rješenje, dobijeno na isti način kao u prethodna dva slučaja (pri čemu je sada $a_n = 1$, $b_n = 1$ i $c_n = n-1$) dato sljedećom relacijom:

$$K_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1.6 Zadatak 6.

Napisati matricu susjedstva kompletnog prostog grafa sa 4 čvora.

Rješenje:

Razmatrani graf je prost. Ovo znači da ne postoje petlje, odnosno grane koje povezuju dati čvor sa samim sobom. U slučaju kompletnog grafa, za proizvoljna dva čvora a i b postoji grana koja povezuje čvorove a i b. Na osnovu razmatranja iz prethodnog zadatka, može se zaključiti da je matrica susjedstva bilo orjentisanog, bilo neorjentisanog kompletnog grafa data sa:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

što je očekivano, budući da u oba slučaja ne postoje jedino petlje, dok između bilo koja dva različita čvora grana mora postojati (u slučaju kompletnog orjentisanog grafa između dva proizvoljna različita čvora postoje tačno dvije grane, a u slučaju neorjentisanog kompletnog grafa između dva proizvoljna čvora postoji tačno jedna grana, ali se ne pravi razlika između polaznog i krajnjeg čvora).