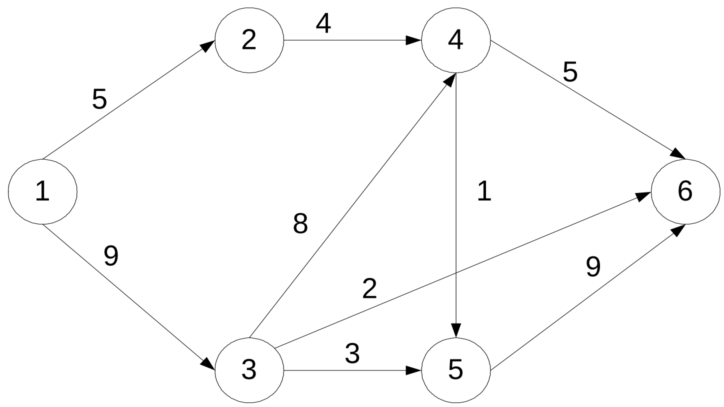
1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - V računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Na slici 1 je prikazan težinski usmjeren graf. Odrediti maksimalan protok iz čvora 1 *u čvor* 6 *koristeći algoritam za određivanje maksimalnog protoka.*

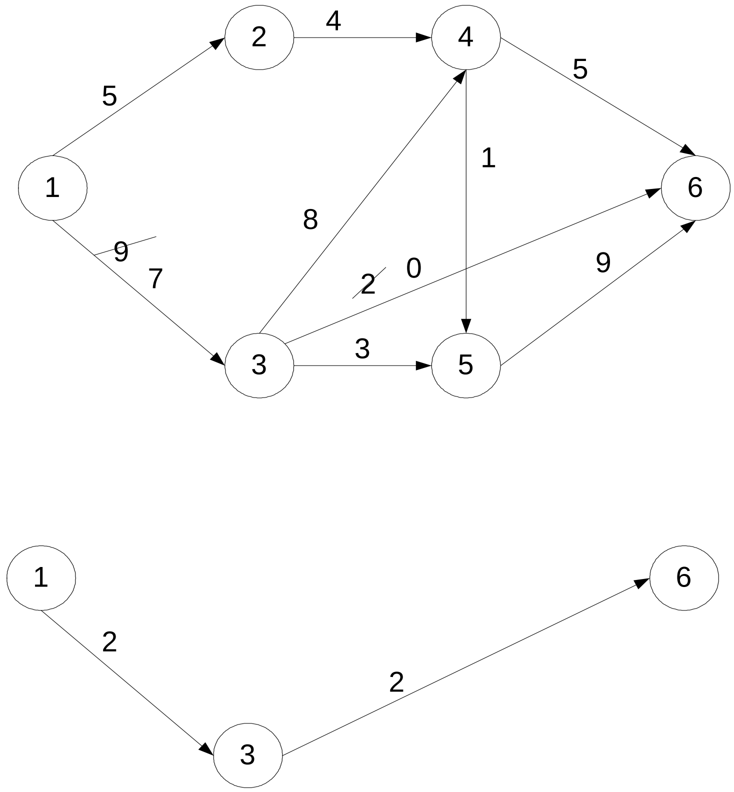


Slika 1

Rješenje:

Zamislimo da je u pitanju protok vode kroz cijevi koje imaju zadat kapacitet. Najlakši način za tumačenje algoritma za određivanje maksimalnog protoka jeste: sve dok postoje grane nenulte težine (kapaciteta) koje čine put od čvora 1 do 6 slati vodu iz čvora 1 u čvor 6. Mi ćemo tražiti takve puteve, slati najveću količinu vode koja može proteći tim granama, ažurirati koliko još može da se pošalje svakom od grana koje čine neki put, dodati kapacitet ovog puta na količinu koja je već poslata u čvor 6 i tražiti novi put. Algoritam je završen u trenutku kada ne postoji put koji povezuje čvorove 1 i 6 a kojim se može poslati voda, t. j. čija je težina veća od nule. Na početku algoritma, količina vode koja je već poslata u čvor 6 je nula, nismo ništa poslali.

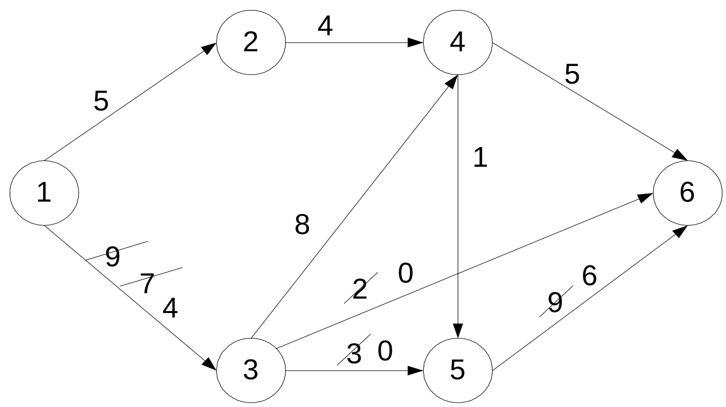
Uzmimo, na primjer, put koji čine čvorovi $1-3-6$ (voditi računa o smjeru kojim se može proći iz jednog čvora u drugi). Grana koja spaja čvorove $1-3$ ima težinu 9, grana koja spaja $3-6$ ima težinu 2. Dakle, najviše što može proteći ovim putem jeste 2 (zbog grane koja spaja $3-6$). Da bi lakše vodili evidenciju o tome što smo poslali ka čvoru 6 i koliko još možemo poslati nekom granom koja je učestvovala u putu kojim se već nešto šalje, crtamo dva grafa, slika 2. Jedan u kojem precrtavamo puteve kojima šaljemo i ažuriramo podatak o tome koliko smo poslali, slika 2 donja, a drugi u kojem ćemo vršiti ažuriranje protoka grana koje su učestvovale u nekom putu, slika 2 gornja.

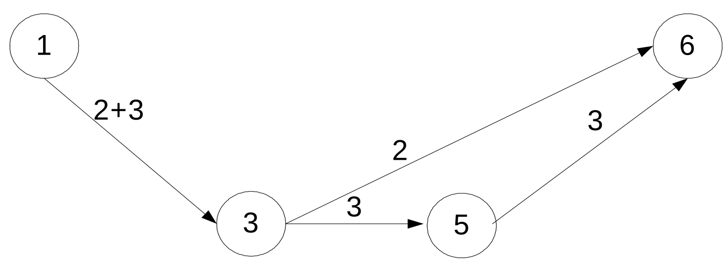


Slika 2

Na osnovu slike 2 gore, zaključujemo da će nova težina za granu koja spaja čvorove $1-3$ biti 7 i da kao takva može biti dio nekog novog puta. Dalje, težina grane koja spaja čvorove $3-6$ će biti 0. Ova grana više ne može učestvovati ni u jednom putu.

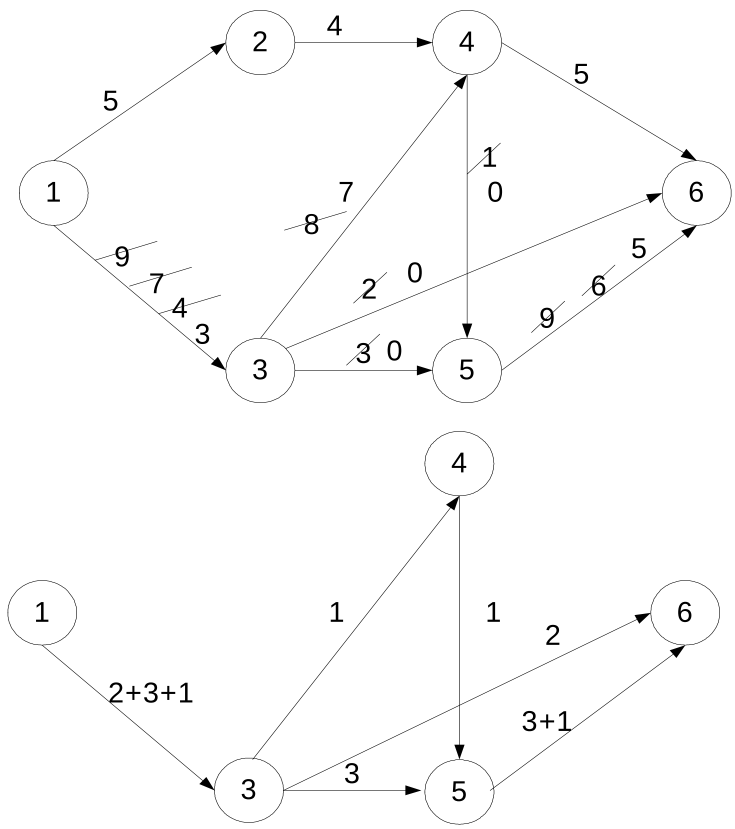
Jedan od sledećih puteva bi mogao biti $1-3-5-6$. Od $1-3$ možemo poslati 7, od $3-5$ može proteći 3, a od $5-6$, protok je 9. Zaključujemo da datim putem možemo poslati najviše 3 i dobijamo dvije nove slike, slika 3 gore sa ažuriranim protokom, a slika 3 dolje sa onim što smo do sad poslali.





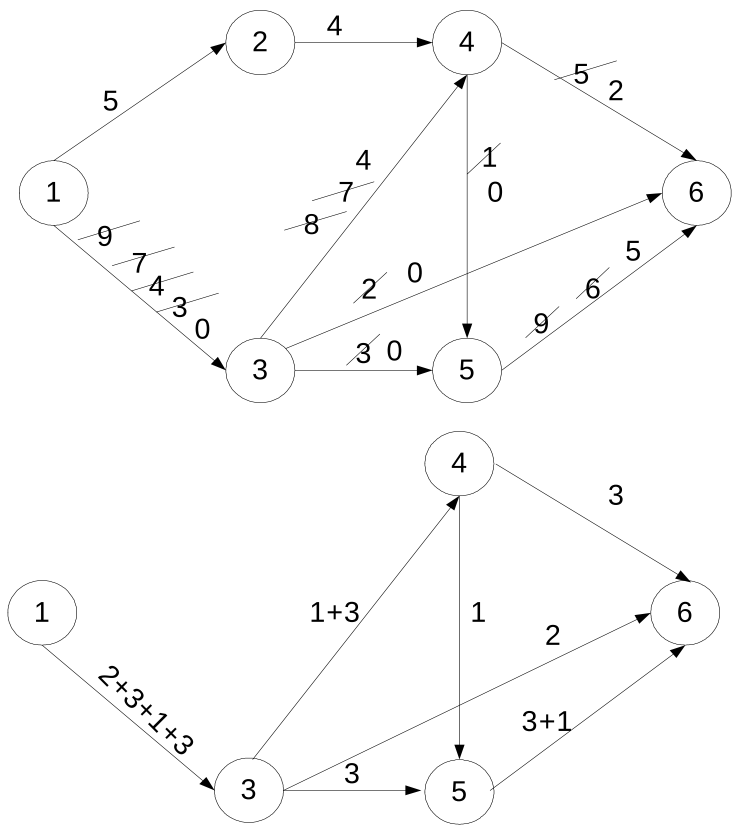
Slika 3

Zaključujemo da ni granu $3-5$ ne možemo više koristiti. Kroz granu $5-6$ može proteći još 3, kroz granu koja ide od $1-3$ možemo poslati 4, pa gledamo da li postoji još neki put koji sadrži ove dvije grane. Postoji put, $1-3-4-5-6$. Protoci su im $4-8-1-6$. Šaljemo najviše što možemo datim putem, dakle 1, ažuriramo protoke za grane koje čine put $1-3-4-5-6$ na $3-7-0-5$. Zaključujemo da se granom $4-5$ više ništa ne može poslati.



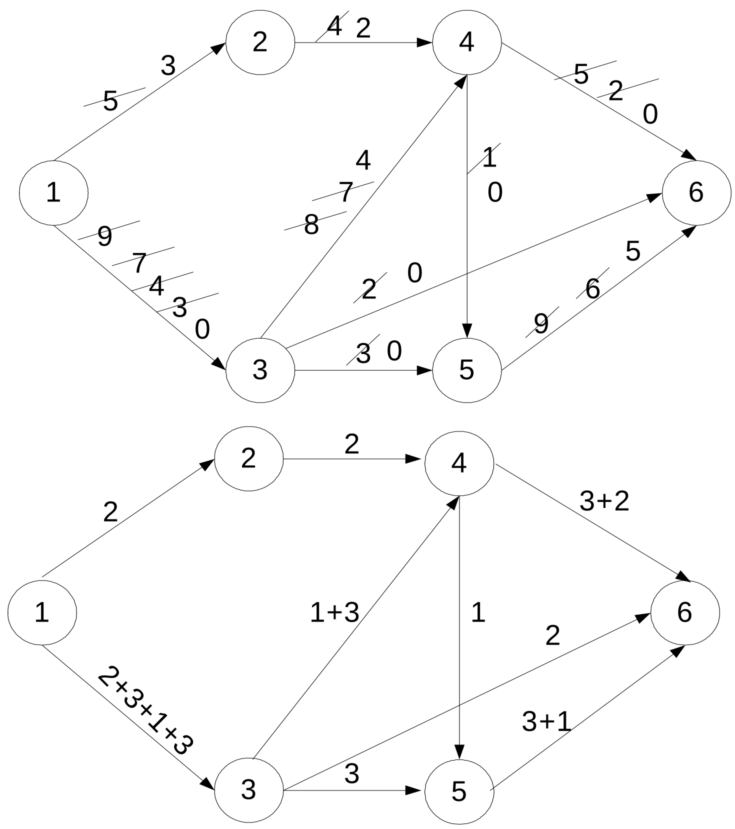
Slika 4

Od čvora 1 se može poslati preko grane $1-3$ još 3, pa gledamo da li postoji neki put kojim se može stići od 1 do 6. Put je $1-3-4-6$. Težine grana ovog puta su $3-7-5$. Šaljemo 3, ažurirane vrijednosti za grane su $0-4-2$ i prikazane su na slici 5 gore. Na slici 5 dolje je dodat put koji smo upravo iskoristili, kao i odgovarajući protok. Vidimo da od čvora 1 ne možemo više ići do čvora 6 preko čvora 3.



Slika 5

Gledamo da li postoji neki put od čvora 1 do čvora 6 preko čvora 2 sa protokom različitim od 0. Očigledno je da je jedini takav put $1-2-4-6$. Odgovarajući protoci su $5-4-2$, dakle šaljemo 2, novi protoci su $3-1-0$. Ažuriramo podatke i dobijamo sliku 6.

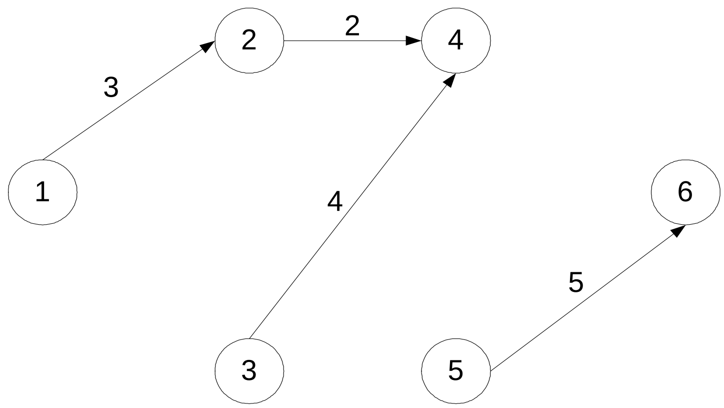


Slika 6

Sa slike 6 vidimo da se iz čvora 1 može poslati još 2 preko čvora 2 u čvor 4. Međutim, ne postoji grana ili put kojim se čvor 4 može povezati sa čvorom 6, a da ima nenulti protok. Dakle, došli smo do kraja. Ukupan protok dobijamo sabiranjem onoga što utiče u čvor 6 u konačnoj slici, slika 6 dolje. Maksimalan protok će biti: $3 + 2 + 2 + 3 + 1 = 11$.

Dobijeni putevi su samo jedan od mogućih načina da se obezbijedi maksimalan protok u najvećem broju slučajeva. Rješenje u pogledu puteva kojima se taj protok ostvaruje nije jedinstveno. Maksimalan dobijeni protok mora biti isti bez obzira na to koje smo puteve odabrali ukoliko je algoritam izvršen do kraja. U literaturi je postoje algoritmi za određivanje najkraćeg puta kojim se obezbjeđuje maksimalan protok, ali oni neće biti rađeni u ovom kursu. U navedenom primjeru nije uzimana u obzir mogućnost protoka povratnim granama jer dalja analiza prevazilazi predviđeni obim predmeta

Jedan od načina da se odredi vizuelno da smo došli do kraja algoritma jeste da se odstrane sve grane čiji je protok jednak nuli i nacrta dobijeni graf, slika 7. Ako nakon uklanjanja grana sa nultim protokom ne postoji put od početnog do krajnjeg čvora, algoritam je završen.



Slika 7

2 Literatura

[1] Miodrag Živković, *Algoritmi*, Beograd : Matematički fakultet, 2000.

[2] http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~vince/teaching/summer04/flow.pdf