1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - zadaci za vježbu

1.1 Zadatak 1 (Zadatak za vježbu iz skripte).

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da je $8^n - 3^n$ djeljivo sa 5 za svaki prirodan broj n ($n \geqslant 0$).

Rješenje:

1. Za $n = 0$ biće:

$$8^0 - 3^0 = 0$$

što je sigurno djeljivo sa 5,jer je $5 \cdot 0 = 0$.

2. Uzmimo neko $n \geqslant 0$ i pretpostavimo da za njega važi da je $8^n - 3^n$ djeljivo sa 5.

Treba dokazati da će za $n+1$, $8^{n+1} - 3^{n+1}$ biti djeljivo sa 5. $8^{n+1} - 3^{n+1}$ se dalje može pisati kao:

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 3^{n+1} &= 8 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n = 8 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n - 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n = \\ &= 8 \cdot 8^n - 8 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n = 8(8^n - 3^n) + 5 \cdot 3^n \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je sigurno djeljiv sa 5, jer je to pretpostavka od koje smo krenuli. Takođe, izraz u zagradi je pomnožen sa cijelim brojem, 8, pa je i to takođe djeljivo sa 5. Izraz $5 \cdot 3^n$ je proizvod broja 5 (koji je djeljiv sa samim sobom, sa 5), i cijelog broja 3^n,odakle zaključujemo da je $8(8^n - 3^n) + 5 \cdot 3^n$ djeljivo sa 5. To znači da smo dokazali da je $8^{n+1} - 3^{n+1}$ djeljivo sa 5, i da važi tvrdnja iz postavke zadatka, da je $8^n - 3^n$ djeljivo sa 5 za svaki prirodan broj n ($n \geqslant 0$).

1.2 Zadatak 2.

Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da važi:

$$\sum_{k=1}^{N} (2k-1) = N^2,$$

za $N \geqslant 1$.

Rješenje:

1. $N = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2$$
$$2 \cdot 1 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

što je sigurno tačno.

2. Pretpostavimo da za neko $N \geqslant 1$, važi polazna jednakost, dakle:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = N^2.$$

Treba pokazati da uz ovu pretpostavku polazna jednakost važi i za $N+1$, odnosno da važi:

$$\sum_{k=1}^{N+1}(2k-1) = (N+1)^2$$

Pokušajmo dokazati da su lijeva i desna strana u prethodnoj formuli jednake. Izdvojimo posljednji član u sumi sa lijeve strane:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) + (2(N+1)-1) = (N+1)^2.$$

Suma u granicama od $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$ je po pretpostavci jednaka N^2, pa možemo pisati:

$$N^2 + (2(N+1)-1) = (N+1)^2.$$

Sredimo izraz sa lijeve strane:

$$\begin{aligned} N^2 + 2N + 2 - 1 &= (N+1)^2 \\ N^2 + 2N + 1 &= (N+1)^2 \end{aligned}$$

Izraz $(N+1)^2$ je kvadrat binoma, i on je jednak: $N^2 + 2N + 1$, pa su lijeva i desna strana u formuli:

$$\sum_{k=1}^{N+1}(2k-1) = (N+1)^2$$

jednake, čime se dokazuje tvrdnja iz postavke zadatka, da za $N \geqslant 1$ važi jednakost:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = N^2.$$