1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - dodatni zadaci sa petog termina vježbi

1.1 Zadatak 1.

Pronađite rješenje rekurzije:

$$3n - 2 - nC_n + (n+1)C_{n-1} = 0$$

ako je $C_0 = 0$*. Odrediti* C_1*,* C_2 *i* C_3*.*

Rješenje:

Treba dobiti rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \tag{1}$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(b_1 C_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \tag{2}$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}...a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2}...b_2}.$$

U tom cilju izraz iz postavke napisaćemo u obliku:

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 3n - 2$$

Poredeći ovu rekurziju sa (1), zaključujemo da je u našem slučaju: $a_n = n$, $b_n = n+1$ i $c_n = 3n-2$.

Sada možemo izračunati s_n:

$$s_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)...3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)...4\cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

i zamijeniti u formuli za C_n, (2):

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{\frac{2}{(n+1)n}n}\left(2\cdot 0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)k}(3k-2)\right) = \frac{2}{\frac{2}{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{k+1} \\
C_n &= 2\frac{(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{(k+1)k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 3n - 2 \tag{3}$$

uz početni uslov $C_0 = 0$. Izraz 3 možemo zapisati i u obliku:

$$C_n = \frac{(n+1)}{n}C_{n-1} + 3 - \frac{2}{n}$$

Želimo odrediti C_1, C_2 i C_3. Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto n stavljamo $1,\ 2,\ 3$ respektivno. Dakle, za $n = 1$ imamo:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1+1}{1}C_{1-1} + 3 - \frac{2}{1} \\ &= 2C_0 + 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{2+1}{2}C_{2-1} + 3 - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}C_1 + 3 - 1 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 + 2 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{3+1}{3}C_{3-1} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}C_2 + \frac{7}{3} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{28+14}{6} = \frac{42}{6} = 7. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = (n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-2}{k(k+1)}.$$

Za $n = 1$ dobijamo:

$$C_1 = (1+1)\sum_{k=1}^{1} \frac{3k-2}{k(k+1)} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 \cdot (1+1)} = 1.$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$C_2 = (2+1)\sum_{k=1}^{2} \frac{3k-2}{k(k+1)} = 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 1 - 2}{1 \cdot (1+1)} + \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot (2+1)}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\right) = \frac{7}{2}.$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$C_3 = (3+1)\sum_{k=1}^{3}\frac{3k-2}{k(k+1)} = 4\cdot(\frac{3\cdot 1-2}{1\cdot(1+1)} + \frac{3\cdot 2-2}{2\cdot(2+1)} + \frac{3\cdot 3-2}{3\cdot(3+1)})$$
$$C_3 = 4\cdot(\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{7}{12}) = \frac{21}{3} = 7.$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina.

1.2 Zadatak 2.

Pronađite rješenje rekurzije:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

ako je $C_0 = 0$. Odrediti C_1, C_2 i C_3.

Rješenje:

Treba dobiti rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n. \tag{4}$$

Izraz za C_n je dat postavkom zadatka kao:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

napišimo na osnovu njega izraz za C_{n-1}:

$$C_{n-1} = 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-1-1} C_k.$$

Dalje posmatrajmo dva dobijena izraza i pokušajmo ih iskombinovati tako da se eliminiše suma, dakle, imamo:

$$\left.\begin{aligned} C_n &= 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k \\ C_{n-1} &= 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k \end{aligned}\right\}.$$

Izraz za C_n ima jedan član više u sumi od izraza za C_{n-1}, izdvojimo taj član van sume u izrazu za C_n:

$$\left.\begin{aligned} C_n &= 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k + C_{n-1} \\ C_{n-1} &= 7(n-1) + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k \end{aligned}\right\}$$

Kada uporedimo ova dva izraza možemo primijetiti da u oba konfiguruše $\sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k$. Označimo ovu sumu sa $S = \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_k$

$$\left.\begin{array}{l} C_n = 7n + S + C_{n-1} \\ C_{n-1} = 7(n-1) + S \end{array}\right\}$$

Iz druge jednačine slijedi da je $S = C_{n-1} - 7(n-1)$, prva jednačina se svodi na:

$$C_n = 7n + C_{n-1} - 7(n-1) + C_{n-1}$$

Dalje, možemo pisati:

$$\begin{aligned} C_n &= 7n + 2C_{n-1} - 7n + 7 \\ C_n &= 2C_{n-1} + 7 \end{aligned}$$

Dobili smo rekurziju oblika

$$a_n C_n = b_n C_{n-1} + c_n \tag{5}$$

čije rješenje u zatvorenom obliku možemo dobiti kao:

$$C_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(b_1 C_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \tag{6}$$

i

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}...a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2}...b_2}.$$

Poredeći rekurziju koju želimo riješiti:

$$nC_n = (n+1)\,C_{n-1} + 2n$$

sa (5), zaključujemo da je u našem slučaju: $a_n = 1$, $b_n = 2$ i $c_n = 7$.

Sada možemo izračunati s_n:

$$s_n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... 2 \cdot 2} = \frac{1^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

i zamijeniti u formuli za C_n,(6):

$$C_n = \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}\left(2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 7\right) = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{2^{n+1}},$$

što predstavlja rješenje rekurzije.

Pogledajmo kako bismo odredili nekoliko početnih elemenata definisanih datom rekurzijom. Pođimo prvo od izraza:

$$C_n = 7n + \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k$$

uz početni uslov $C_0 = 0$.

Želimo odrediti C_1, C_2, C_3 i C_4. Određujemo ih tako što u izrazu za rekurziju umjesto n stavljamo $1,\ 2,\ 3,\ 4$, respektivno. Dakle, za $n = 1$ imamo:

$$\begin{aligned} C_1 &= 7 \cdot 1 + \sum_{\kappa=0}^{1-1} C_k = 7 + C_0 = \\ &= 7 + 2 \cdot 0 = 7. \end{aligned}$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_2 &= 7 \cdot 2 + \sum_{\kappa=0}^{2-1} C_k = 14 + \sum_{\kappa=0}^{1} C_k = 14 + C_0 + C_1 = \\ &= 14 + 0 + 7 = 21. \end{aligned}$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= 7 \cdot 3 + \sum_{\kappa=0}^{3-1} C_k = 21 + \sum_{\kappa=0}^{2} C_k = 21 + C_0 + C_1 + C_2 = \\ &= 21 + 0 + 7 + 21 = 49. \end{aligned}$$

Iste vrijednosti bi se morale dobiti i ako pođemo od izraza dobijenog kao rješenje rekurzije, dakle:

$$C_n = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{2^{n+1}}.$$

Za $n = 1$ dobijamo:

$$C_1 = 2^{1+1} \sum_{k=1}^{1} \frac{7}{2^{k+1}} = 2^2 \cdot \frac{7}{4} = 7$$

Za $n = 2$ dobijamo:

$$C_2 = 2^{2+1} \sum_{k=1}^{2} \frac{7}{2^{k+1}} = 2^3 \cdot (\frac{7}{2^{1+1}} + \frac{7}{2^{2+1}}) = 8(\frac{7}{4} + \frac{7}{8}) = 14 + 7 = 21$$

Za $n = 3$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C_3 &= 2^{3+1} \sum_{k=1}^{3} \frac{7}{2^{k+1}} = 2^4 \cdot (\frac{7}{2^{1+1}} + \frac{7}{2^{2+1}} + \frac{7}{2^{3+1}}) = 16(\frac{7}{4} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16}) \\ C_3 &= 28 + 14 + 7 = 49. \end{aligned}$$

Sasvim očekivano, oba puta smo dobili iste vrijednosti, jer je u pitanju ista rekurzija, samo zapisana na dva različita načina. Postoje slučajevi kada se rješenje rekurzija traži na nešto drugačiji način, ali to prevazilazi okvire našeg kursa.