1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU (napredni kurs) - VI računske vježbe

Generatorska funkcija $G(z)$ niza $g(n)$ je definisana kao:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n.$$

U svim zadacima ćemo smatrati da je $g(n) = 0$ za $n < 0$.
Dvije tablične generatorske funkcije koje ćemo smatrati poznatim su:

1. Generatorska funkcija jediničnog niza $g(n) = 1$ koja je $G(z) = \frac{1}{1-z}$.

   Par niz $\rightarrow$ generatorska funkcija ćemo označavati kao:

   $$g(n) \rightarrow G(z),$$

   pa će u ovom slučaju biti:

   $$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}.$$

2. Generatorska funkcija koja odgovara nizu $g(n) = \delta(n)$ je $G(z) = 1$ (pri čemu je $\delta(n) = 1$ za $n = 0$ i $\delta(n) = 0$ za $n \neq 0$).

   $$\delta(n) \rightarrow 1.$$

Da bi mogli raditi zadatke vezane za generatorske funkcije neophodno je znati osobine generatorskih funkcija.

Osobina 1 Linearnost - linearnoj kombinaciji nizova odgovara linearna kombinacija njihovih generatorskih funkcija:

$$Ax(n) + By(n) \rightarrow AX(z) + BY(z)$$

gdje je $x(n) \rightarrow X(z)$ i $y(n) \rightarrow Y(z)$, a A i B konstante.

Osobina 2 Pomjeranje u desno sa dodavanjem nula.

Ako je $x(n) \rightarrow X(z)$ i niz $y(n)$ dobijen pomjeranjem u desno niza $x(n)$ pri čemu se slobodni članovi popunjavaju nulama:

$$y(n) = \begin{cases} x(n-N) \text{ za } n \geq N \\ 0 \text{ za } n < N \end{cases}$$

biće:

$$Y(z) = z^N X(z)$$

Gdje je N broj mjesta za koja je niz $x(n)$ pomjeren u desno.

Osobina 3 Pomjeranje u lijevo sa ispuštanjem prvih elemenata

Ako je $x(n) \to X(z)$ i niz $y(n)$ dobijen pomjeranjem u lijevo niza $x(n)$ pri čemu se prvi elementi ispuštaju:

$$y(n) = \begin{cases} x(n+N) \text{ za } n \geq 0 \\ 0 \text{ za } n < 0 \end{cases}$$

biće:

$$Y(z) = \frac{X(z) - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^n}{z^N}$$

Gdje je N broj mjesta za koja je niz $x(n)$ pomjeren u lijevo.

Osobina 4 Množenje eksponencijalnim nizom:

Ako je $x(n) \to X(z)$ i niz $y(n)$ dobijen množenjem niza $x(n)$ eksponencijalnim nizom:

$$y(n) = c^n x(n),$$

gdje je c neka konstanta, biće:

$$Y(z) = X(c \cdot z)$$

Osobina 5 Izvod

Nizu $y(n) = n \cdot x(n)$ odgovara generatorska funkcija $Y(z) = z\frac{d}{dz}X(z)$. Gdje je $x(n) \to X(z)$.

$$n \cdot x(n) \to z\frac{d}{dz}X(z).$$

Osobina 6 Konvoluciji dva niza odgovara množenje njihovih generatorskih funkcija. Dakle, ako je $x(n) \to X(z)$ i $h(n) \to H(z)$ i niz $y(n)$ zadat kao konvolucija ova dva niza $y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$ biće:

$$Y(z) = X(z)H(z).$$

Zadatak 1.

Naći generatorsku funkciju niza:

$$x(n) = 3^n - (-2)^n + n^2$$

Rješenje:
Niz $x(n)$ je zadat kao linearna kombinacija tri niza:

$$x(n) = x_1(n) - x_2(n) + x_3(n) \tag{1}$$

Pa će koristeći osobinu 1 biti:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z)$$

Poredeći jednačinu (1) sa nizom koji je zadat postavkom zadatka, zaključujemo da je:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= 3^n \\ x_2(n) &= (-2)^n \\ x_3(n) &= n^2 \end{aligned}$$

Nađimo njihove generatorske funkcije. Krenimo od niza $x_1(n)$. Znamo da je:

$$1 \to \frac{1}{1-z}$$

kao i da se može pisati:

$$x_1(n) = 3^n \cdot 1.$$

Odnosno, kao jedinični niz pomnožen eksponencijalnim nizom, pa primjenjujemo osobinu 4. Vidimo da će biti $c = 3$ i:

$$3^n \cdot 1 \to \frac{1}{1-3z}$$

Dakle:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-3z}$$

Sada određujemo generatorsku funkciju niza $x_2(n)$. Slično kao i za niz $x_1(n)$ pišemo:

$$x_2(n) = (-2)^n \cdot 1$$

Znamo da je:

$$1 \to \frac{1}{1-z}$$

Primijenimo osobinu 4, tako što će biti $c = -2$ i zaključujemo da je:

$$(-2)^n \cdot 1 \to \frac{1}{1+2z}$$

Dakle:

$$X_2(z) = \frac{1}{1+2z}$$

Niz $x_3(n) = n^2$ možemo pisati kao:

$$x_3(n) = n \cdot n \cdot 1$$

Znamo da je:

$$1 \to \frac{1}{1-z}$$

Množenje sa n je po osobini 5 ekvivalentno diferenciranju i množenju sa z, generatorske funkcije pa će biti:

$$n \cdot 1 \rightarrow z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = z\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Znajući ovo i primjenjujući još jedan put osobinu 5 biće:

$$n \cdot (n \cdot 1) \rightarrow z\frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2} = z\frac{(1-z)^2 - z \cdot 2\,(1-z)\,(-1)}{(1-z)^4} = z\frac{(1-z)\,(1-z+2z)}{(1-z)^4} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Dakle:

$$X_3(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Sada, znajući da je:

$$X(z) = X_1(z) - X_2(z) + X_3(z),$$

dobijamo:

$$X(z) = \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1+2z} + \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Zadatak 2.

Naći generatorsku funkciju signala:

a $x(n)$ *zadatog kao:*

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k};$$

b $y(n)$ *zadatog kao:*

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} k2^{-k}.$$

Rješenje:

a. Signal $x(n)$ predstavlja konvoluciju signala $x_1(n) = 2^n$ i $x_2(n) = 3^n$. Primijenimo osobinu 6, po kojoj će tražena generatorska funkcija biti:

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Generatorske funkcije $X_1(z)$ i $X_2(z)$ određujemo koristeći osobinu 4 i znajući da je:

$$1 \rightarrow \frac{1}{1-z}$$

pa će za $X_1(z)$ biti $c = 2$:

$$2^n 1 \rightarrow \frac{1}{1-2z},$$

za $X_2(z),\ c=3:$

$$3^n 1 \to \frac{1}{1-3z}$$

Generatorska funcija niza $x(n)$ se sada dobija kao:

$$X(z) = X_1(z)\cdot X_2(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z}\cdot\frac{1}{1-3z}.$$

b. I niz $y(n) = \sum_{k=0}^{n} k2^{-k}$ predstavlja konvoluciju dva niza. Ukoliko ga uporedimo sa definicijom konvolucije $y(n) = \sum_{k=0}^{n} y_1(k)y_2(n-k)$ zaključujemo da je prvi niz, koji u sumi zavisi od k niz $y_1(k) = k2^{-k}$. Niz $y(n)$ možemo pisati kao $y(n) = \sum_{k=0}^{n} k2^{-k}\cdot 1$, pa je niz $y_2(n-k) = 1$. Zaključujemo da je $y_1(n) = n2^{-n}$, $y_2(n) = 1$. Na osnovu osobine 6 znamo da će generatorska funkcija niza $y(n)$ biti:

$$Y(z) = Y_1(z)Y_2(z).$$

Napomena, posmatrajmo nekoliko prvih elemenata niza $y_2(n) = 1$, datih u tabeli 1. Niz $y(n-N)$, gdje je N neki cio broj, će biti niz $y_2(n)$ pomjeren u desno, pri čemu su prvi elementi popunjeni nulama, tabela 1.

n	1	2	...	N	$N+1$	...
$y_2(n)$	1	1	1	1	1	1
$y_2(n-N)$	0	0	0	1	1	1

Sada je potrebno pronaći generatorsku finkciju nizova $y_1(n)$ i $y_2(n)$.

Za niz $y_1(n) = n2^{-n}$ zaključujemo da se može napisati kao:

$$y_1(n) = n2^{-n}\cdot 1$$

Znamo da je:

$$1 \to \frac{1}{1-z}$$

Primijenimo osobinu 4, stavimo $c = 2^{-1}$ i dobijamo:

$$2^{-n}1 \to \frac{1}{1-2^{-1}z}$$

dakle:

$$2^{-n}1 \to \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

Dalje, znamo da je, na osnovu osobine 5, množenje niza sa n ekvivalentno prvom izvodu ($N=1$) generatorske funkcije pomnoženom sa z. Pa će biti:

$$n\cdot 2^{-n}1 \to z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = z\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}z}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}$$

$y_2(n) = 1$, a njegova generatorska funkcija $Y_2(z) = \frac{1}{1-z}$
Na početku smo rekli da je:

$$Y(z) = Y_1(z)Y_2(z)$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)^2} \frac{1}{1-z}$$