1 MATEMATIKA U RAČUNARSTVU - VIII računske vježbe

Zad 1. *U kutiji je 6 bijelih i 4 crne kuglice. Kuglice se izvlače slučajno, po jedna, bez vraćanja. Kolika je vjerovatnoća da će se bijela kuglica izvući u manje ili tačno:*

a) k=3   b)k=5

pokušaja? Napomena: Smatramo da se izvlačenje prekida nakon što se izvuče prva bijela kuglica

Rješenje:

Tražimo vjerovatnoću događaja: W_k={Izvučena je bijela kuglica prvi put u manje ili tačno k pokušaja}

Interesuje nas kolika je vjerovatnoća da je izvučena bijela kuglica. Posmatramo kako se to može desiti. Može biti izvučena već pri prvom pokušaju, može se desiti da se prvo izvuče crna kuglica pa nakon nje bijela, da se izvuku dvije crne kuglice pa bijela, da se izvuče tek u četvrtom pokušaju, petom... ili k-tom pokušaju. Važno je naglasiti da su ovi događaji međusobno isključivi. Znači, kada počnemo izvlačenje, sa svim kuglicama u kutiji, samo se jedan od ovih događaja može desiti. Kuglica će biti izvučena ILI u prvom, ILI u drugom ... ILI u k-tom pokušaju.

Označimo ove događaje sa X_i : X_i ={U prvih $i-1$ pokušaja je izvučeno $i-1$ crnih kuglica, a nakon njih, u i-tom pokušaju je izvučena bijela kuglica}. Jasno je da će biti $i = 1, 2, ..., k$ (bijela kuglica izvučena u prvom, drugom, ..., k-tom pokušaju).

Naš događaj W_k će se realizovati ako se realizuje jedan od događaja X_i, pa pišemo:

$$W_k = X_1 + X_2 + ... + X_k.$$

Plus ćemo koristiti da označimo da su događaji međusobno isključivi. Biće izvučena bijela kuglica u manje ili tačno k pokušaja ako bude izvučena ILI u prvom ILI u drugom, ..., ILI u k - tom pokušaju. Svi su ovi događaji međusobno nezavisni, pa možemo pisati da je vjerovatnoća događaja W_k (vjerovatnoću označavamo velikim slovom P) biti jednaka sumi vjerovatnoća pojedinih događaja:

$$P(W_k) = P(X_1 + X_2 + ... + X_k) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_k) \qquad (1)$$

Vjerovatnoća događaja X_1 - kuglica je izvučena u prvom pokušaju kada imamo u kutiji 10 kuglica od kojih je 6 bijelih i 4 crne, će biti:

$$P(X_1) = P(b) = \frac{6}{10},$$

b označava događaj izvučena je bijela kuglica, c - događaj izvučena je crna kuglica, $P(b|c)$ označava vjerovatnoću da je izvučena bijela kuglica ako je već izvučena crna.

Interesuje nas vjerovatnoća događaja X_2 - u prvom pokušaju je izvučena crna kuglica, a nakon nje bijela. U početku u kutiji imamo 10 kuglica od kojih su 4 crne, izvučemo crnu, ostaje devet kuglica i to 6 bijelih i 3 crne, pa će biti:

$$P(X_2) = P(cb) = P(c)P(b|c) = \frac{4}{10}\frac{6}{9}.$$

Interesuje nas sada vjerovatnoća događaja X_3 - u prva dva pokušaja su izvučene crne kuglice, a nakon njih bijela. U početku u kutiji imamo 10 kuglica od kojih su 4 crne, izvučemo crnu, ostaje devet kuglica i to 6 bijelih i 3 crne, nakon toga izvučemo još jednu crnu, ostaje 8 kuglica - 2 crne i 6 bijelih i u trećem pokušaju izvučemo bijelu. Vjerovatnoća će biti:

$$P(X_3) = P(ccb) = P(c)P(c|c)P(b|cc) = \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{6}{8}.$$

U zadatku pod a) je k=3. Obuhvatili smo čitav skup događaja koji čine događaj izvučena je kuglica u manje ili tačno 3 pokušaja W_3. Uvrstimo ove vjerovatnoće u (1), znajući da je pod a) k=3 i dobijemo:

$$P(W_3) = P(X_1)+P(X_2)+P(X_3) = \frac{6}{10}+\frac{4}{10}\frac{6}{9}+\frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{6}{8} = \frac{6}{10}(1+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\frac{3}{8}) = 0.9667$$

b) Vjerovatnoća da će kuglica biti izvučena u $k = 5$ ili manje pokušaja je 1, to je siguran događaj. Bijela kuglica mora biti izvučena u toku 5 prvih pokušaja jer je najgori slučaj koji se može desiti da stalno izvlačimo crne kuglice, dok ih ima u kutiji, znači prva četiri puta, već peti put nema više crnih kuglica i sigurno ćemo izvući bijelu.

Zad. 2. *U kutiji je 30 kuglica, od kojih je 8 bijelih. Iz kutije se izvlači jedna kuglica i kada se vidi njena boja, vraća se u kutiju ukoliko to nije bijela kuglica.*

a) Odrediti vjerovatnoću da će bijela kuglica biti izvučena prvi put tačno u dvadesetom pokušaju.

b) Odrediti vjerovatnoću da će bijela kuglica biti izvučena za manje ili tačno 20 pokušaja.

Rješenje:

a) Bijela kuglica će biti izvučena prvi put u 20-om pokušaju ako je izvučeno 19 kuglica koje nisu bijele (recimo da su sve preostale kuglice crne) i nakon njih dvadeseta izvučena kuglica je bijela. Neka je ovo događaj X :

$$X = cc...cb.$$

Vjerovatnoća da je izvučena crna kuglica u bilo kojem od ovih 19 prvih pokušaja je ista jer se nakon svakog izvlačenja kuglica vraća nazad ukoliko nije bijela. Dakle, uvijek u kutiji prije izvlačenja ima 30 kuglica - 8 bijelih i 22 crne. Vjerovatnoća da je izvučena crna je $P(c) = \frac{22}{30}$, da je izvučena bijela $P(b) = \frac{8}{30}$. Vjerovatnoća događaja X će biti:

$$P(X) = P(cc...cb) = P(c)P(c)...P(b) = \frac{22}{30}\frac{22}{30}...\frac{8}{30} = \left(\frac{22}{30}\right)^{19}\frac{8}{30}.$$

b) Tražimo vjerovatnoću događaja: W_k={Izvučena je bijela kuglica prvi put u manje ili tačno 20 pokušaja}

Ovo se može desiti ako se bijela kuglica izvuče već pri prvom pokušaju ILI ako se izvuče crna pa nakon nje bijela ILI dvije crne pa bijela ... ILI se tek u 20-om pokušaju, nakon što je izvučeno 19 crnih kuglica pa tek onda bijela. Opet se vjerovatnoća da je izvučena neka kuglica ne mijenja u toku izvlačenja, pa će biti $P(c) = \frac{22}{30}$, $P(b) = \frac{8}{30}$.

Neka je događaj: X_i ={U prvih $i-1$ pokušaja je izvučeno $i-1$ crnih kuglica, a nakon njih, u i-tom pokušaju je izvučena bijela kuglica}, $i = 1, 2, ...20$ (bijela kuglica izvučena u prvom, drugom, ..., 20-tom pokušaju). Naš događaj W_k će se realizovati ako se realizuje jedan od događaja X_i, pa pišemo:

$$W_k = X_1 + X_2 + ... + X_{20}.$$

Biće izvučena bijela kuglica u manje ili tačno 20 pokušaja ako bude izvučena ILI u prvom ILI u drugom, ..., ILI u k - tom pokušaju. Svi su ovi događaji međusobno nezavisni, pa možemo pisati da je vjerovatnoća događaja W_k biti jednaka sumi vjerovatnoća pojedinih događaja:

$$P(W_k) = P(X_1 + X_2 + ... + X_{20}) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_{20})$$

Pri čemu je:

$$P(X_1) = P(b) = \frac{8}{30}$$

$$P(X_2) = P(cb) = P(c)P(b) = \frac{22}{30}\frac{8}{30}$$

$$\vdots$$

$$P(X_{20}) = P(cc\cdots b) = P(c)P(c)\cdots P(b) = \frac{22}{30}\frac{22}{30}\cdots\frac{8}{30}$$

Dalje:

$$P(W_k) = P(X_1) + P(X_2) + ... + P(X_{20}) = \frac{8}{30} + \frac{22}{30}\frac{8}{30} + ... + \frac{22}{30}\frac{22}{30}\cdots\frac{8}{30} =$$
$$= \frac{8}{30}(1 + \frac{22}{30} + ... + \frac{22}{30}\frac{22}{30}\cdots\frac{22}{30})$$

Dio u zagradi je geometrijski niz čija se suma dobija kao:

$$S = a_0\frac{1-q^N}{1-q}$$

Gdje je a_0 prvi član niza, q vrijednost kojom je potrebno pomnožiti $i-ti$ član geometrijskog niza da bi se dobio $i+1$-vi, a N broj elemenata niza. Ako ovo primijenimo na naš slučaj, dobijamo:

$$P(W_{20}) = \frac{8}{30}(1 + \frac{22}{30} + ... + \frac{22}{30}\frac{22}{30}...\frac{22}{30}) = \frac{8}{30}S = \frac{8}{30}1\frac{1-\left(\frac{22}{30}\right)^{20}}{1-\frac{22}{30}} = 0.998.$$

Zad. 3. *Novčić s biasom se baca dok se ne pojavi glava prvi put.*

a) Koja je vjerovatnoća da je broj bacanja neparan.
b) Koja je vjerovatnoća da je broj bacanja paran.
Rješenje:
Tražimo prvo vjerovatnoću događaja A_i={Glava se pojavljuje u i-tom bacanju prvi put}

Novčić sa biasom znači da nije ista vjerovatnoća pojavljivanja glave i pisma. Neka je vjerovatnoća da se pojavi pismo u jednom bacanju $p\{pismo\} = p\{ps\} = p$, a vjerovatnoća pojavljivanja glave $p\{glava\} = p\{g\} = q$. Obzirom da je skup svih mogućih događaja prilikom jednog bacanja novčića $S = \{glava, pismo\}$, da su ovi događaji međusobno isključivi, ili će se pojaviti glava ili pismo mora biti:

$$\begin{aligned} p\{ps\} + p\{g\} &= 1 \\ p + q &= 1 \\ q &= 1 - p. \end{aligned}$$

Ovdje nemamo nikakvo ograničenje u pitanju broja pokušaja. Uzimamo u obzir sve moguće slučajeve od toga da se glava pojavi prvi put u prvom pokušaju, drugom ... do toga da se pojavi tek nakon beskonačno mnogo pokušaja. Izračunajmo sada vjerovatnoću ovih događaja A_i={U toku i bacanja se prvih i-1 put pojavljivalo pismo a u i-tom bacanju se pojavila glava (Glava se pojavljuje u i-tom bacanju prvi put)}=$\{ps \cdot ps \cdot ps \cdots ps \cdot g\}$. Svako bacanje je nezavisno, vjerovatnoća da se u jednom bacanju pojavi pismo ili glava neće zavisiti od toga što se pojavilo u prethodnom bacanju, pa važi:

$$P(A_i) = P(ps \cdot ps \cdot ps \cdots ps \cdot g) = P(ps)P(ps) \cdots P(ps)P(q) = p^{i-1}q \tag{2}$$

Sada možemo odrediti vjerovatnoću događaja pod a) $AA = \{$glava se pojavila prvi put u neparnom broju bacanja$\}$. Ovo se može desiti ukoliko se glava prvi put pojavi u prvom, trećem, petom ili bilo kojem neparnom bacanju. Znači da nas interesuju samo događaji A_i kod kojih je i (broj bacanja) neparan, pa pišemo:

$$AA = A_1 + A_3 + A_5 + ...+$$

Svi su ovi događaji međusobno isključivi. Glava će se pojaviti ili u prvom, ili u trećem ili u petom ili ... u nekom od neparnih bacanja, pa će vjerovatnoća događaja AA biti:

$$P(AA) = P(A_1 + A_3 + A_5 + ... = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + ...$$

Znajući da važi (2) pišemo:

$$P(AA) = q + p^2q + p^4q + ... = q(1 + p^2 + p^4 + ...) = q\frac{1 - \left(p^2\right)^\infty}{1 - p^2} = \frac{q}{1 - p^2}$$

Mogli smo tvrditi da $\left(p^2\right)^\infty \to 0$ jer je u pitanju vjerovatnoća da se prilikom bacanja novčića pojavi pismo pa je $p < 1$. Opet smo iskoristili formulu za sumu geometrijskog reda.

$$P(AA) = \frac{q}{1 - p^2} = \frac{q}{(1 - p)\,(1 + p)} = \frac{q}{q(1 + p)} = \frac{1}{1 + p}$$

Ukoliko bi posmatrali slučaj kada je novčić bez biasa, vjerovatnoća pojavljivanja pisma ili glave u jednom pokušaju bi bila ista i jednaka $P(q) = P(ps) = \frac{1}{2}$. Zamijenimo ovo u prethodnoj formuli i biće:

$$P(AA) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b) Označimo $\overline{AA}$={ Glava se pojavljuje nakon parnog broja bacanja}

$\overline{AA}$ i AA su međusobno isključivi događaji, glava će se pojaviti prvi put ili nakon parnog ili nakon neparnog broja bacanja, pored toga ova dva događaja čine skup svih mogućih ishoda, pa će biti:

$$P\{AA\} + P\{\overline{AA}\} = 1.$$

Odnosno:

$$P\{\overline{AA}\} = 1 - P\{AA\} = 1 - \frac{1}{1+p} = \frac{p}{1+p}.$$

Zad. 4. *Dva igrača izvlače naizmjenično, bez vraćanja, kuglice iz kutije koja sadrži m=8 bijelih i n=6 crnih kuglica. Ako je pobjednik igrač koji prvi izvuče bijelu kuglicu, kolika je vjerovatnoća da pobijedi igrač koji je prvi počeo igru?*

Rješenje:

Označimo prvog igrača sa A a drugog sa B. Tražimo vjerovatnoću događaja W_A ={Pobijedio je prvi igrač, igrač A}

Ovo se može desiti ukoliko igrač A u prvom pokušaju izvuče bijelu kuglicu ILI ako igrač A izvuče crnu kuglicu, nakon njega I igrač B izvuče crnu kuglicu I u narednom pokušaju A izvuče bijelu kuglicu ILI ... ILI u prvih $i-1$ pokušaja I igrač A I igrač B izvlače stalno crne kuglice I u i-tom pokušaju igrač A izvuče bijelu kuglicu. Označimo ove događaje sa X_i ={A i B izvlače u prvih i-1 pokušaja stalno crne kuglice i igrač A izvuče bijelu u i-tom pokušaju}, $i = 1, 2, ..k$. Broj k zavisi od broja crnih kuglica koje se nalaze u kutiji. Razmislite kako bi uticalo na dalji postupak ukoliko bi broj crnih kuglica bio neparan. Pogledajmo čemu će biti jednaka vjerovatnoća događaja X_i, $i = 1, 2, ...$

$$P(X_1) = P(A-b) = \frac{8}{14}$$

gdje smo sa $A-b$, označili događaj {igrač A je izvukao bijelu kuglicu}, $A-c$, bi bio događaj {igrač A je izvukao crnu kuglicu}, analogno ovom ćemo imati i događaje $B-b$ i $B-c$.

Vjerovatnoća događaja X_2 je:

$$\begin{aligned} P(X_2) &= P(A-c \cdot B-c \cdot A-b) = P(A-c)P(B-c|A-c) \cdot P(A-b|A-c \cdot B-c) = \\ &= \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{8}{12} \end{aligned}$$

Ovdje su korišćene oznake za uslovne vjerovatnoće pa je $P(B-c|A-c)$ vjerovatnoća događaja da igrač B izvuče crnu kuglicu ako je igrač A već izvukao jednu crnu kuglicu, a $P(A-b|A-c \cdot B-c)$ vjerovatnoća događaja da igrač A izvuče bijelu kuglicu ako je već u prvom pokušaju izvukao crnu, a igrač B nakon njega isto crnu kuglicu. Moramo koristiti uslovnu vjerovatnoću jer će u toku izvlačenja da se mijenja broj kuglica, a samim tim i vjerovatnoća da neka kuglica bude izvučena iz kutije zavisi od toga što je izvučeno u prethodnom pokušaju.

Vjerovatnoća događaja X_3 je:

$$\begin{aligned} P(X_3) &= P(A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c \cdot A-b) = \\ &= P(A-c)P(B-c|A-c) \cdot P(A-c|A-c \cdot B-c) \cdot P(B-c|A-c \cdot B-c \cdot A-c) \cdot \\ &\quad \cdot P(A-b|A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c) \\ &= \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{8}{10} \end{aligned}$$

Vjerovatnoća događaja X_4 je:

$$\begin{aligned} P(X_4) &= P(A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c \cdot A-b) = \\ &= P(A-c)P(B-c|A-c) \cdot P(A-c|A-c \cdot B-c) \cdot \\ &\quad \cdot P(B-c|A-c \cdot B-c \cdot A-c) \cdot P(A-c|A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c) \cdot \\ &\quad \cdot P(B-c|A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c \cdot A-c) \cdot \\ &\quad \cdot P(A-b|A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c \cdot A-c \cdot B-c) \\ &= \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{8}{8} \end{aligned}$$

Očigledno je da smo ovim iscrpili sve moguće događaje koji čine naš događaj W_A jer nakon četiri pokušaja, ni u najgoroj varijanti, da svaki igrač uvijek izvlači crnu kuglicu, ne bi više bilo crnih kuglica u kutiji i pobjednik bi morao biti određen. Mi smo uzeli sve varijante u kojima bi pobijedio igrač A. Svi događaji X_i su međusobno nezavisni i isključuju jedan drugog - samo se jedan od njih može desiti, pa pišemo:

$$W_A = \{X_1 + X_2 + X_3 + X_4\}$$

Vjerovatnoća ovog događaja će biti:

$$\begin{aligned} P(W_A) &= P(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) + P(X_4) = \\ &= \frac{8}{14} + \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{8}{12} + \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{8}{10} + \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11}\frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{8}{8} \end{aligned}$$

Zad. 5. *U kutiji se nalaze 2 bijele i 3 crvene kuglice, u drugoj su 4 bijele i 3 crvene. Jedna kuglica, nepoznate boje se prebacuje iz prve kutije u drugu, a onda se iz druge kutije izvlači kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je izvučena bijela kuglica?*

Rješenje:

Sada imamo dvije radnje. Prva je prebacivanje jedne kuglice nepoznate boje iz prve kutije u drugu. Samo dva, međusobno isključiva događaja mogu da se dese, označimo ih sa B i C:

$$B = \{\text{Prebačena je bijela kuglica iz prve u drugi kutiju}\}$$

$C = \{\text{Prebačena je crvena kuglica iz prve u drugi kutiju}\}$

Vjerovatnoće ovih događaja su:

$$P(B) = \{\text{Izvučena je bijela kuglica iz kutije u kojoj su } \textit{2 bijele i 3 crvene kuglice}\} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \{\text{Izvučena je crvena kuglica iz kutije u kojoj su } \textit{2 bijele i 3 crvene kuglice}\} = \frac{3}{5}$$

Napomena: Rekli smo da ova dva događaja čine skup svih mogućih događaja prilikom izvlačenja jedne kuglice iz prve kutije i da su međusobno isključivi pa mora važiti:

$$P(S) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 1$$

Nakon prebacivanja jedne kuglice, nepoznate boje, iz prve u drugu kutiju izvlači se jedna kuglica i traži se vjerovatnoća da ta kuglica bude bijela. Ovo se može desiti ako je iz prve kutije u drugu prebačena bijela kuglica I nakon toga izvučena bijela ILI ako je iz prve kuglice prebačena u drugu crvena kuglica I nakon toga izvučena bijela. Ova dva slučaja su međusobno isključiva, ili je prebačena bijela ili crvena kuglica u drugu kutiju, pa pišemo:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Izvučena je bijela kuglica iz druge kutije nakon prebacivanja u nju kuglice nepoznate boje}\} = \\ &= \{\text{Iz prve kutije je prebačena bijela kuglica u drugu I nakon toga iz druge izvučena bijela }\}\text{ ILI} \\ &\quad +\{\text{Iz prve kutije je prebačena crvena kuglica u drugu I nakon toga iz druge izvučena bijela }\} \\ &= \{B \cdot b\} + \{C \cdot b\} \end{aligned}$$

Vjerovatnoća ovog događaja je:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{B \cdot b\} + \{C \cdot b\}) = P(B \cdot b) + P(C \cdot b) = \\ &= P(B) \cdot P(b|B) + P(C) \cdot P(b|C) \end{aligned}$$

Gdje je $P(b|B)$ vjerovatnoća da je nakon prebacivanja bijele kuglice iz prve kutije u drugu, nakon čega bi njoj bilo 5 bijelih i 3 crvene kuglice, iz druge kutije izvučena bijela kuglica. $P(b|C)$ je vjerovatnoća da je nakon prebacivanja crvene kuglice iz prve kutije u drugu, nakon čega bi njoj bilo 4 bijelih i 4 crvene kuglice, iz druge kutije izvučena bijela kuglica. Znajući ovo pišemo:

$$P(A) = P(B) \cdot P(b|B) + P(C) \cdot P(b|C) = \frac{2}{5}\frac{5}{8} + \frac{3}{5}\frac{4}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20} = 0.55$$

Zad. 6. *Imamo 4 kutije. Kutija 1 sadrži 2000 komponenti od kojih je 5% sa felerom. Kutija 2 sadrži 500 komponenti od kojih je 40% sa felerom. Kutije 3 i 4 sadrže po 1000 elemenata, svaka sa po 10% feleričnih. Slučajno se bira jedna od kutija i iz nje uzima slučajno jedna komponenta.*

a) Koja je vjerovatnoća da će izvučena komponenta biti felerična?

b) Ukoliko je izvučena komponenta felerična, koja je vjerovatnoća da je izvučena iz druge kutije?

Rješenje:

Opet imamo dvije radnje. Prva je slučajno biranje jedne od kutija. Jasno je da može biti izabrana ILI prva kutija - događaj K_1 ILI druga kutija - događaj K_2 ILI treća kutija - događaj K_3 ILI četvrta kutija - događaj K_4. Takođe je jasno da su ovi događaji međusobno isključivi. U jednom pokušaju se samo jedan od njih može realizovati - može se izabrati samo jedna kutija. Dalje, sa ova četiri događaja smo obuhvatili skup svih mogućih događaja koji se mogu desiti prilikom biranja jedne od 4 ponuđene kutije ($S =${Bira se jedna od 4 ponuđene kutije}-jedan od njih se mora desiti). Pa važi:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = P(K_1) + P(K_2) + P(K_3) + P(K_4) = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sa jednakom vjerovatnoćom će se izabrati bilo koja od 4 ponuđene kutije, pa je:

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = P(K_4) = \frac{1}{4}.$$

Kada je izabrana jedna od četiri kutije, iz nje se slučajno izvlači jedna komponenta. Nas interesuje vjerovatnoća događaja da je izvučena komponenta felerična. Označimo ovaj događaj izvlačenja felerične komponente sa F. On se može desiti ako je izabrana prva kutija I iz nje izvučena felerična komponenta ILI ako je izabrana druga kutija I iz nje izvučena felerična komponenta ILI ako je izabrana treća kutija I iz nje izvučena felerična komponenta ILI ako je izabrana četvrta kutija I iz nje izvučena felerična komponenta. Dakle:

$$\begin{aligned} F &= \{K_1 \cdot F + K_2 \cdot F + K_3 \cdot F + K_4 \cdot F\} \qquad (3) \\ P(F) &= P(K_1 \cdot F) + P(K_2 \cdot F) + P(K_3 \cdot F) + P(K_4 \cdot F) = \\ &= P(K_1)P(F|K_1) + P(K_2)P(F|K_2) + P(K_3)P(F|K_3) + P(K_4)P(F|K_4) \end{aligned}$$

Pogledajmo sada kakvo je stanje u pojedinim kutijama da bi odredili vjerovatnoće da se iz izabrane kutije K_i izvuče felerična komponenta $F-$ $P(F|K_i)$, $i = 1, ...4$.

U prvoj kutiji imamo 2000 komponenti, od čega je 5% feleričnih, pa će biti: $P(F|K_1) = \frac{0.05*2000}{2000} = \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$. U drugoj kutiji imamo 500 komponenti, od čega je 40% feleričnih, pa će biti: $P(F|K_2) = \frac{0.4*500}{500} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$. U trećoj i četvrtoj kutiji imamo po 1000 komponenti, od čega je po 10% feleričnih, pa će biti: $P(F|K_3) = P(F|K_4) = \frac{0.1*1000}{1000} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$. Uvrstimo ovo u (3) i dobijamo:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(K_1)P(F|K_1) + P(K_2)P(F|K_2) + P(K_3)P(F|K_3) + P(K_4)P(F|K_4) = \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\frac{1}{10} = \frac{1}{4}(\frac{1}{20} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}) = \qquad (4) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1 + 4*2 + 2 + 2}{20} = \frac{13}{80} = 0.1625 \qquad (5) \end{aligned}$$

b) Sada nas interesuje ukoliko je izvučena komponenta felerična - događaj F, koja je vjerovatnoća da je izvučena iz druge kutije K_2. Ovo je događaj $K_2|F$ što nije isto kao događaj $F|K_2$, pa moramo odrediti ovu vjerovatnoću. Polazimo od definicije uslovne vjerovatnoće koja kaže da je vjerovatnoća događaja $K_2|F$, da smo u prvom koraku birali drugu kutiju ako je izvučena felerična komponenta, jednaka:

$$P(K_2|F) = \frac{P(K_2 \cdot F)}{P(F)} \tag{6}$$

Gdje je $P(K_2 \cdot F)$ vjerovatnoća da smo I birali drugu kutiju I izvukli iz nje feleričnu komponentu. Mi ne znamo kolika je vjerovatnoća ovog događaja, ali znamo vjerovatnoću:

$$P(F|K_2) = \frac{P(K_2 \cdot F)}{P(K_2)}$$

I da je $P(F|K_2) = \frac{2}{5}$ i $P(K_2) = \frac{1}{4}$ (zadatak pod a), pa dobijamo da je:

$$P(K_2 \cdot F) = P(F|K_2)P(K_2)$$

Zamijenimo ovo u (6) i dobijamo:

$$P(K_2|F) = \frac{P(F|K_2)P(K_2)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{4}}{\frac{13}{80}} = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{13}{80}} = \frac{8}{13} = 0.615.$$

Zad. 7. *Data je sekvenca od 8 bita. Prvi bit se pojavljuje slučajno sa vjerovatnoćom od 50% da je 0 i 50% da je 1. Ostali bitovi se pojavljuju na sledeći način:*

Ako je prethodni bit 1, naredni je 0 sa vjerovatnoćom 25%.

Ako je prethodni bit 0, naredni je 1 sa vjerovatnoćom 50%.

Odrediti vjerovatnoću pojavljivanja sekvence 01101100.

Rješenje:

Vidimo da se vjerovatnoća pojavljivanja prvog bita razlikuje od ostalih i da je data kao: $P(0) = \frac{1}{2}$ i $P(1) = \frac{1}{2}$. Za ostale bitove, vjerovatnoća njihovog pojavljivanja će zavisiti od toga koji je bit prije njih. Imamo četiri slučaja:

1. Nakon jedinice se pojavljuje 0. Vjerovatnoća ovog događaja je data postavkom zadatka i iznosi $P(0|1) = \frac{1}{4}$.

2. Nakon jedinice se pojavljuje 1. Vjerovatnoća ovog događaja $P(1|1)$ nije data ali znamo da se nakon jedinice može pojaviti ILI 0 ILI 1, da su ova dva događaja međusobno isključiva i da obuhvataju čitavi skup mogućih događaja, pa važi:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(0|1) + P(1|1) = 1 \\ P(1|1) &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. Nakon nule se pojavljuje 1. Vjerovatnoća ovog događaja je data postavkom zadatka i iznosi $P(1|0) = \frac{1}{2}$

4. Nakon nule se pojavljuje 0. Vjerovatnoća ovog događaja $P(0|0)$ nije data ali znamo da se nakon nule može pojaviti ILI 0 ILI 1, da su ova dva događaja međusobno isključiva i da obuhvataju čitavi skup mogućih događaja, pa važi:

$$\begin{aligned} P(S1) &= P(0|0) + P(1|0) = 1 \\ P(0|0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Interesuje nas vjerovatnoća pojavljivanja sekvence 01101100,biće:

$$\begin{aligned} P(01101100) &= P(0)P(1|0)P(1|1)P(0|1)P(1|0)P(1|1)P(0|1)P(0|0) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{3^2}{4^4 2^4} = \frac{9}{4096} = 0.0022 \end{aligned}$$

Zad. 8. *Student je došao na ispit znajući 85 od postojećih 100 pitanja. Na ispitu izvlači cjedulju sa 3 pitanja. Odrediti vjerovatnoću da će znati odgovor na sva tri pitanja.*