Парцијална интеграција

$$\int u\,d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta\,du, \quad u=u(x),\ \vartheta=\vartheta(x)$$

Израчунати

1. $$\int x\sin x\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u=x & d\vartheta=\sin x\,dx \\ du=dx & \vartheta=\int\sin x\,dx=-\cos x \end{matrix} \right\rfloor = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx =$$
$$= -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

2. $$\int xe^x\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u=x & d\vartheta=e^x dx \\ du=dx & \vartheta=\int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\rfloor = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

3. $$\int x\ln x\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u=\ln x & d\vartheta=x\,dx \\ du=\frac{1}{x}dx & \vartheta=\int x\,dx=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rfloor = \frac{x^2\ln x}{2} - \int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$
$$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

4. $$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x & d\vartheta=dx \\ du=\frac{1}{1+x^2}dx & \vartheta=\int dx = x \end{matrix} \right\rfloor = x\operatorname{arctg} x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx = \left\lceil \begin{matrix} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt \\ x\,dx=\frac{dt}{2} \end{matrix} \right\rfloor = x\operatorname{arctg} x - \int\frac{\frac{dt}{2}}{t} =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + c = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

5. $$\int(\ln x)^2 dx = \left\lceil \begin{matrix} u=\ln^2 x & d\vartheta=dx \\ du=\frac{2\ln x}{x}dx & \vartheta=\int dx = x \end{matrix} \right\rfloor = x\ln^2 x - \int\cancel{x}\,\frac{2\ln x}{\cancel{x}}\,dx =$$
$$= x\ln^2 x - 2\int\ln x\,dx = \left\lceil \begin{matrix} u=\ln x & d\vartheta=dx \\ du=\frac{1}{x}dx & \vartheta=\int dx = x \end{matrix} \right\rfloor = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int\cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right) =$$
$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

6. $$\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \left\lceil \begin{matrix} u=x & d\vartheta=\frac{dx}{\sin^2 x} \\ du=dx & \vartheta=\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right\rfloor = -x\operatorname{ctg} x - \int(-\operatorname{ctg} x)\,dx =$$
$$= -x\operatorname{ctg} x + \int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \left\lceil \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{matrix} \right\rfloor = -x\operatorname{ctg} x + \int\frac{dt}{t} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|t| + c =$$
$$= -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + c$$

7. $\int e^{\arcsin x}dx = \begin{bmatrix} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{bmatrix} = \int e^{t}\cos t\,dt = \begin{bmatrix} u = e^{t} & d\vartheta = \cos t\,dt \\ du = e^{t}dt & \vartheta = \int \cos t\,dt = \sin t \end{bmatrix} =$

$= e^{t}\sin t - \int e^{t}\sin t\,dt = \begin{bmatrix} u = e^{t} & d\vartheta = \sin t\,dt \\ du = e^{t} & \vartheta = \int \sin t\,dt = -\cos t \end{bmatrix} = e^{t}\sin t - \left(-e^{t}\cos t - \int e^{t}(-\cos t)dt\right) =$

$= e^{t}\sin t + e^{t}\cos t - \int e^{t}\cos t\,dt$

Означимо $\int e^{t}\cos t\,dt = I$. Добили смо

$$I = e^{t}\sin t + e^{t}\cos t - I$$

па је одавде

$$2I = e^{t}\sin t + e^{t}\cos t$$

$$I = \frac{e^{t}\sin t + e^{t}\cos t}{2} + c$$

Дакле

$$\int e^{\arcsin x}dx = \int e^{t}\cos t\,dt = e^{t}\,\frac{\sin t + \cos t}{2} + c = e^{\arcsin x}\,\frac{x + \cos(\arcsin x)}{2} + c$$

8. $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^{-2x} & d\vartheta = \sin 3x\,dx \\ du = -2e^{-2x}dx & \vartheta = \int \sin 3x\,dx = \frac{-\cos 3x}{3} \end{bmatrix} =$

$= -\frac{\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \int \frac{(-\cos 3x)}{3}\cdot(-2e^{-2x})dx = \frac{-\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx =$

$= \begin{bmatrix} u = e^{-2x} & d\vartheta = \cos 3x\,dx \\ du = -2e^{-2x}dx & \vartheta = \int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3} \end{bmatrix} = \frac{-\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 3x\, e^{-2x}}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3}(-2e^{-2x})dx\right) =$

$= -\frac{\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 3x\, e^{-2x}}{3} + \frac{2}{3}\int e^{-2x}\sin 3x\,dx\right) = -\frac{\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \frac{2}{9}\sin 3x\, e^{-2x} - \frac{4}{9}\int e^{-2x}\sin 3x\,dx$

Означимо $\int e^{-2x}\sin 3x\,dx = I$. Добијамо

$$I = \frac{-\cos 3x\, e^{-2x}}{3} - \frac{2\sin 3x\, e^{-2x}}{9} - \frac{4}{9}I$$

$$\frac{13}{9}I = -\frac{e^{-2x}}{3}\left(\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right)$$

Дакле

$$I = \int e^{-2x}\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{-2x}\left(\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right) + c$$

Интеграција тригонометријских функција

Интеграле облика

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

где је R-рационална функција, у општем случају сводимо на интеграл рационалне функције сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg} t \qquad x=2\operatorname{arctg} t \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=t \quad /^2$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=t^2$$

$$1-\cos x=t^2(1+\cos x)$$

$$1-t^2=\cos x(1+t^2)$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\sin x=\sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}$$

$$\sin x=\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}$$

$$\sin x=\sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

Специјално, ако је

а) $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, уводимо смену $\cos x=t$

б) $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, уводимо смену $\sin x=t$

в) $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$, уводимо смену $\operatorname{tg} x=t$

Израчунати:

1. $$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}= \left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{4t-1+t^2+3+3t^2}{\cancel{1+t^2}}}=2\int\frac{dt}{4t^2+4t+2}=\cancel{2}\int\frac{dt}{\cancel{2}(2t^2+2t+1)}=\int\frac{dt}{2t^2+2t+1}=$$

$$=\int\frac{dt}{2(t^2+t)+1}=\int\frac{dt}{2\left(t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1}=\int\frac{dt}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1}=\int\frac{dt}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\frac{1}{2}\left(4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}=2\int\frac{dt}{\left(2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}=2\int\frac{dt}{(2t+1)^2+1}= \left[\begin{array}{l} 2t+1=z \\ 2dt=dz \\ dt=\frac{dz}{2} \end{array}\right] =$$

$$=2\int\frac{\frac{dz}{2}}{z^2+1}=\frac{2}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z+c=\operatorname{arctg}(2t+1)+c=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+c$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} =$

Коментар: Примијетимо да је, за $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ испуњен услов $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, па користимо смјену $tg x = t$

$$= \begin{array}{llll} tg x = t & dx = \frac{dt}{1+t^2} & \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2 & \sin^2 x = t^2(1-\sin^2 x) \\ x = arctg\, t & \frac{\sin x}{\cos x} = t & \sin^2 x = t^2\cos^2 x & \sin^2 x(1+t^2) = t^2 \\ & & & \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1+t^2+t^2}{\cancel{1+t^2}}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \int \frac{dt}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \begin{array}{l} \sqrt{2}t = z \\ \sqrt{2}dt = dz \\ dt = \frac{dz}{\sqrt{2}} \end{array} =$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}dz}{2}}{1+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\, z + c = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg(\sqrt{2}\, t) + c = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg(\sqrt{2}\, tg x) + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} =$ (сами!)

Посматрајмо интеграл облика

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\, dx$$

Нађимо $A, B \in \mathbb{R}$ такве да важи

$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \sin x + b \cos x)'$

Ове кефицијенте добијамо као решење система једначина.

$$aA - bB = a_1$$
$$bA + aB = b_1$$

Сада се овај интеграл може записати као

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\, dx = \int \frac{A\cancel{(a \sin x + b \cos x)}}{\cancel{a \sin x + b \cos x}}\, dx + \int \frac{B(a \sin x + b \cos x)'}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$

$$= A\int dx + B\int \frac{(a \sin x + b \cos x)'\, dx}{a \sin x + b \cos x} = Ax + B\ln|a \sin x + b \cos x| + c$$

4. Израчунати

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx = *$$

$$\sin x - \cos x = A(\sin x + 2\cos x) + B(\sin x + 2\cos x)'$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= A - 2B \\ -1 &= 2A + B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 1 + 2B \\ -1 &= 2 + 4B + B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{1}{5} \\ B &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$* = -\frac{1}{5}\int dx - \frac{3}{5}\int \frac{(\sin x + 2\cos x)'}{\sin x + 2\cos x}\,dx = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + c$$

Интеграл облика

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + d_1}{a\sin x + b\cos x + d}\,dx$$

рјешавамо тако што нађемо коефицијенте $A, B, D \in \mathbb{R}$ такве да важи

$$a_1\sin x + b_1\cos x + d_1 = A(a\sin x + b\cos x + d) + B(a\sin x + b\cos x + d)' + D$$

Ове коефицијенте добијамо као рјешења система једначина

$$a_1 = aA - bB$$
$$b_1 = bA + aB$$
$$d_1 = dA + D$$

Сада се овај интеграл може записати као

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + d_1}{a\sin x + b\cos x + d}\,dx = \int \frac{A\cancel{(a\sin x + b\cos x + d)}}{\cancel{a\sin x + b\cos x + d}}\,dx + \int \frac{B(a\sin x + b\cos x + d)'}{a\sin x + b\cos x + d}\,dx + \int \frac{D\,dx}{a\sin x + b\cos x + d} =$$

$$= A\int dx + B\int \frac{(a\sin x + b\cos x + d)'}{a\sin x + b\cos x + d}\,dx + D\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + d} = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + d| +$$

$$+ D\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + d}$$

Интеграл $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + d}$ рачунамо користећи тригонометријску смјену

5. Израчунати

$$\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx = *$$

$\ulcorner$ $\sin x + 2\cos x - 3 = A(\sin x - 2\cos x + 3) + B(\sin x - 2\cos x + 3)' + D$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= A + 2B \\ 2 &= -2A + B \\ -3 &= 3A + D \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A + 2B &= 1 \\ 5B &= 4 \\ 3A + D &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\tfrac{3}{5} \\ B &= \tfrac{4}{5} \\ D &= -\tfrac{6}{5} \end{aligned} \lrcorner$$

$$* = -\frac{3}{5}\int dx + \frac{4}{5}\int \frac{(\sin x - 2\cos x + 3)'}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx - \frac{6}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} =$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3| - \frac{6}{5} I$$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \ldots \text{ (сами)}$$

Израчунати

6. $\int \cos 4x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(4x+2x) + \cos(4x-2x)\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

7. $\int \sin 5x \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(5x-2x) - \cos(5x+2x)\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\sin 7x + c = \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + c$

8. $\int \sin 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)\right)dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) + \frac{1}{2}(-\cos x) + c = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c$

Интеграција диференцијалног бинома

Посматрамо интеграл облика

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

где су $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Овај интеграл се може свести на интеграл рационалне функције у следећа три случаја:

1. $p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Сменом $x=t^N$ се овај интеграл своди на интеграл рационалне функције, где је N заједнички садржалац имениоца разломака m и n

2. $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Сменом $a+bx^n=t^N$ се овај интеграл своди на интеграл рационалне функције, где је N именилац разломка p

3. $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Сменом $\frac{a}{x^n}+b=t^N$ се овај интеграл своди на интеграл рационалне функције, где је N именилац разломка p

Израчунати:

1. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=\int x^{-3}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$\left[\; m=-3,\ n=2,\ p=-\frac{1}{2}\right.$

$p\notin\mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n}=\frac{-2}{2}=-1\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+x^2=t^2$

$2x\,dx=2t\,dt$

$x\,dx=t\,dt$

$\left. x^2=t^2-1\;\right]$

Коментар

$x^{-3}=x^{-4}\cdot x=\frac{x}{x^4}$

$=$

$$=\int\frac{1}{(t^2-1)^2}\cdot(t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot t\,dt=\int\frac{1}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\cdot\cancel{t}\,dt=\int\frac{dt}{(t^2-1)^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t-1)^2(t+1)^2}=\dots\ (\text{сами!})$$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-1}}\,dx = \int x^2(-1+x^6)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Big[\; m=2,\ n=6,\ p=-\frac{1}{2}$

$p \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{x^6} + 1 = t^2$

$\frac{6}{x^7}\,dx = 2t\,dt$

$dx = \frac{1}{3}\, t x^7\,dt$

$-\frac{1}{x^6} = t^2 - 1$

$x^6 = \frac{1}{1-t^2}$

$x = \sqrt[6]{\frac{1}{1-t^2}}$

$dx = \frac{1}{3}\,\frac{t\,dt}{(1-t^2)^{\frac{7}{6}}} = \Big]$

$$= \int \frac{\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{2}{6}}}}{\sqrt{\frac{1}{1-t^2}-1}} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{t}{(1-t^2)^{\frac{7}{6}}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt{\frac{1-1+t^2}{1-t^2}}}\;\frac{t}{(1-t^2)^{\frac{7}{6}}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{\cancel{t}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\cancel{t}}{(1-t^2)^{\frac{7}{6}}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-t^2)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-t^2)^{\frac{7}{6}}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-t^2)^{\frac{9}{6}}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} = \ldots$$ (сама)

Ојлерова смјена

Посматрамо интеграл облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

гдје је R - рационална функција, $a,b,c \in \mathbb{R}$. Овај интеграл се своди на интеграл рационалне функције следећим смјенама:

1. Ако је $a>0 \Rightarrow$ Смјена $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\,x$ (бирамо + или -)
2. Ако је $c>0 \Rightarrow$ Смјена $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ (бирамо + или -)
3. Ако полином ax^2+bx+c има реалне нуле x_1 и $x_2 \Rightarrow$ Смјена ~~[illegible]~~ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

Израчунати:

1. $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} a=1,\ b=1,\ c=1 \\ a>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} = t-\sqrt{a}\,x \\ \sqrt{x^2+x+1} = t-x \ /^2 \\ t = x+\sqrt{x^2+x+1} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \cancel{x^2}+x+1 = t^2-2tx+\cancel{x^2} \\ x(1+2t) = t^2-1 \\ x = \dfrac{t^2-1}{1+2t} \\ dx = \dfrac{2t^2+2t-2}{(1+2t)^2}\,dt \end{array} \rfloor =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2+t-1)}{(1+2t)^2}dt}{t} = 2\int \frac{t^2+t-1}{t(1+2t)^2}dt = \ldots \text{ (сами)}$$

2. $\lambda > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} a=1,\ b=0,\ c=\pm\lambda \\ a>0 \Rightarrow \sqrt{x^2\pm\lambda} = t-\sqrt{a}\,x \\ \sqrt{x^2\pm\lambda} = t-x \ /^2 \\ \cancel{x^2}\pm\lambda = t^2-2tx+\cancel{x^2} \\ 2tx = t^2\mp\lambda \\ x = \dfrac{t^2\mp\lambda}{2t} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} dx = \dfrac{t^2\pm\lambda}{2t^2}\,dt \\ \sqrt{x^2\pm\lambda} = t-\dfrac{t^2\mp\lambda}{2t} \\ \sqrt{x^2\pm\lambda} = \dfrac{t^2\pm\lambda}{2t} \\ t = x+\sqrt{x^2\pm\lambda} \end{array} \rfloor =$$

$$= \int \frac{\frac{\cancel{t^2\pm\lambda}}{\cancel{2}t^{\cancel{2}}}dt}{\frac{\cancel{t^2\pm\lambda}}{\cancel{2t}}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm\lambda}\right|+c$$

$$3.\quad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} =$$

$\Gamma\ a=-1,\ b=-2,\ c=1$

$c>0 \Rightarrow \sqrt{1-2x-x^2} = tx-\sqrt{c}$

$\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1 \ /^2$

$tx = 1+\sqrt{1-2x-x^2}$

$1+\sqrt{1-2x-x^2} = \dfrac{t(2t-2)}{t^2+1}$

$\cancel{1}-2x-x^2 = t^2x^2-2tx+\cancel{1} \ / \cdot \frac{1}{x}$

$-2-x = t^2x-2t$

$2t-2 = x(t^2+1)$

$x = \dfrac{2t-2}{t^2+1}$

$dx = \dfrac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}\,dt \ \rfloor \ =$

$$= \int \frac{\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}\,dt}{\frac{t(2t-2)}{\cancel{t^2+1}}} = 2\int \frac{-t^2+2t+1}{t(2t-2)(1+t^2)}\,dt = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(1+t^2)}\,dt = \ldots \text{(сами)}$$

$$4.\quad \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} =$$

Γ нуле полинома x^2+3x+2 су -1, и -2, па је

$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

Смјена: $\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) \ /^2$

$x^2+3x+2 = t^2(x+1)^2$

$\cancel{(x+1)}(x+2) = t^2(x+1)^{\cancel{2}}$

$x+2 = t^2x+t^2$

$x = \dfrac{2-t^2}{t^2-1}$

$dx = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt$

$x+1 = \dfrac{2-t^2}{t^2-1}+1$

$x+1 = \dfrac{1}{t^2-1}$

$\sqrt{x^2+3x+2} = \dfrac{t}{t^2-1} \ \rfloor \ =$

$$= \int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-\frac{t}{t^2-1}}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+\frac{t}{t^2-1}} \cdot \frac{(-2t)}{(t^2-1)^2}\,dt = \int \frac{\frac{-t^2-t+2}{\cancel{t^2-1}}}{\frac{-t^2+t+2}{\cancel{t^2-1}}} \cdot \frac{(-2t)}{(t^2-1)^2}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{t(t^2+t-2)}{(t^2-t-2)(t^2-1)^2}\,dt =$$

$\Gamma\ t^2+t-2=0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2},\ t_1=-2,\ t_2=1$

$t^2+t-2 = (t-1)(t+2)$

$t^2-t-2=0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2},\ t_1=-1,\ t_2=2$

$t^2-t-2 = (t-2)(t+1) \ \rfloor \ =$

$$= -2\int \frac{t\cancel{(t-1)}(t+2)}{(t-2)(t+1)\,(t-1)^{\cancel{2}}(t+1)^2}\,dt = -2\int \frac{t^2+2t}{(t+1)^3(t-1)(t-2)}\,dt$$