A i B

Studijski programi: Matematika i primjene, Matematika i računarske nauke
ANALIZA 2

Iz knjige:
Dr Radoslav Dimitrijević,
ANALIZA REALNIH FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

KRITERIJUMI ZA ISPITIVANJE KONVERGENCIJE REDOVA SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Teorema 1. (Košijev kriterijum) *Neka je $\sum a_n$ red sa nenegativnim članovima i neka je $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}$. Ako postoji $q \in [0,1)$ tako da je $\mathcal{C}_n \leq q$ počev od nekog prirodnog broja n, tada je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\mathcal{C}_n \geq 1$ počev od nekog indeksa, tada je red $\sum a_n$ divergentan.*

Dokaz. Neka je počev od nekog prirodnog broja $\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q$, odn. $a_n \leq q^n$. Kako je red $\sum q^n$ konvergentan, to je na osnovu teoreme 2, red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za $n \geq n_0$, tada je $a_n \geq 1$, pa red $\sum a_n$, jer nije ispunjen dovoljan uslov za $\blacksquare$ konvergenciju redova

redova da je niz (a_n) *beskonačno mali niz.*

Posledica 1. *Neka je $\mathcal{C} = \lim_n \mathcal{C}_n$. Ako je $\mathcal{C} < 1$, red konvergentan, a ako je $\mathcal{C} > 1$ red je divergentan. Za $\mathcal{C} = 1$ red može, ali ne mora biti konvergentan, odn. kriterijum je neodlučiv.*

Dokaz. Kako je $\lim_n \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε tako da je $\mathcal{C} - \varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon$ za svako $n \geq n_\varepsilon$. Neka je $\mathcal{C} < 1$. Broj ε zbog njegove proizvoljnosti možemo izabrati tako da je $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$. Stoga je $\mathcal{C}_n < 1$ za svako $n \geq n_\varepsilon$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan. Ako je $\mathcal{C} > 1$, izaberimo ε tako da je $\mathcal{C} - \varepsilon > 1$. Tada je $\mathcal{C}_n > 1$ i red $\sum a_n$ divergira. $\blacksquare$

Da je Košijev kriterijum iskazan u terminima granične vrednosti neodlučiv kada je $\mathcal{C} = 1$, pokazuje sledeći

Primer 1. Red $\sum 1/n$ je divergentan, red $\sum 1/n^2$ je konvergentan, a za oba reda je C = 1.

Teorema 2. (Dalamberov* kriterijum) *Za red* $\sum a_n$ *sa pozitivnim članovima označimo sa* $\mathcal{D}_n = a_{n+1}/a_n$. *Ako postoji* $q \in (0,1)$ *i prirodan broj* n_0 *tako da je* $\mathcal{D}_n \leq q$ *za* $n \geq n_0$, *onda je red* $\sum a_n$ *konvergentan. Ako je* $\mathcal{D}_n \geq 1$, *red* $\sum a_n$ *je divergentan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}_n \leq q < 1$ za $n \geq n_0$. Tada $a_{n+1} \leq q a_n$ za $n \geq n_0$. No onda je $a_{n+p} \leq a_n q^p$ za $n \geq n_0$. Kako je red $a_n q + a_n q^2 + \cdots$ konvergentan, to je na osnovu prvog poredbenog kriterijuma konvergentan i red $a_n + a_{n+1} + \cdots$, odakle sledi konvergencija reda $\sum a_n$.

Ako je $\mathcal{D}_n \geq 1$, tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

gde je $b_n = 1/n$, pa je prema teoremi 6 $\sum a_n$ divergentan.

Posledica 2. *Neka je* $\mathcal{D} = \lim_n \mathcal{D}_n$. *Ako je* $\mathcal{D} < 1$, *red* $\sum a_n$ *je konvergentan, a ako je* $\mathcal{D} > 1$, *red* $\sum a_n$ *je divergentan. Za* $\mathcal{D} = 1$ *kriterijum je neodlučiv.*

Da je Dalamberov* kriterijum iskazan u terminima granicne vrednosti neodluˇciv kada je $\mathcal{C} = 1$, pokazuje **primjer 1.**

Posledice 1 i 2 su zadaci za domaći rad. I ovi zadaci će biti bodovani na završnom ispitu.

Vodite računa da na završnom ispitu može se tražiti da ih ponovo uradite!

* D'Alambert J. (1717-1783)-francuski matematičar

Teorema 7. (Košijev integralni kriterijum) *Neka je funkcija* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *nerastuća. Tada je red* $\sum f(n)$ *konvergentan ako i samo ako je integral* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *konvergentan.*

Dokaz. Funkcija f je prema pretpostavci nerastuća, pa je $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ za svako $k \leq x \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Integracijom ove nejednakosti dobija se

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

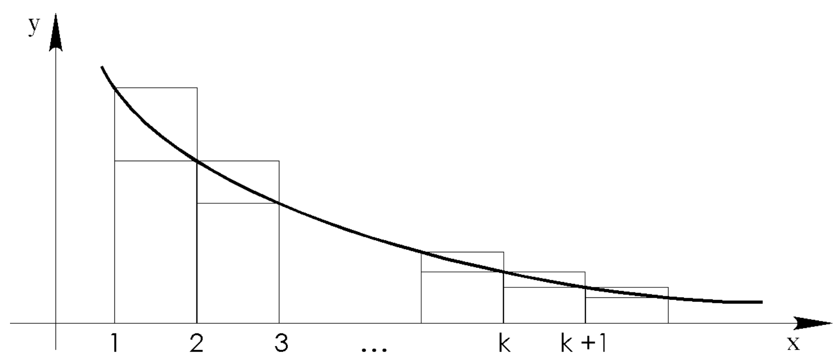
Sumiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\,,$$

odn.

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

gde je $s_n = \sum_1^n f(k)$.



Sl. 10

Ako je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan, onda je

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{M}\,.$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx = f(1) + M, \, n \in \mathbb{N}\,,$$

pa je red $\sum f(n)$ konvergentan prema teoremi 1.

Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je red $f(n)$ konvergentan i neka je njegova suma jednaka s. Tada je $s_n \leq s$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq s$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Funkcija f je nenegativna, pa je funkcija $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ neopadajuća. Stoga za svako $\xi \geq 1$ postoji $n \geq \xi$ tako da je

$$\int_1^{\xi} f(x)dx \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \leq s\,,$$

pa je integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergentan. ■

Primer 2. Hiperharmonijski red $\sum 1/n^{\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$. Zaista, za $\alpha > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^R = \frac{1}{\alpha - 1}\,,$$

pa rezultat sledi na osnovu Kosijevog kriterijuma.

Za a $\alpha < 1$ i a $\alpha = 1$ integral divergira što je dato u našoj knjizi.

ALTERNATIVNI REDOVI

Definicija 1. *Red oblika*

$$\sum(-1)^{n+1}a_n\,,$$

gde je $a_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, je ***alternativni red****.*

Teorema 1. ***(Lajbnicov* kriterijum)*** *Neka je $\sum(-1)^{n+1}a_n$ alternativni red kod koga je $a_n \geq a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\lim a_n = 0$, onda je alternativni red konvergentan i važi ocena*

$$|r_n| \leq a_{n+1}\,.$$

Dokaz. Kako je niz (a_n) nerastući, to je

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq \\ &\leq (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = s_{2n+2}\,,\ n \geq 2\,, \end{aligned}$$

pa je niz (s_{2n}) neopadajući. Osim toga je

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

za svako $n \geq 1$, pa je niz (s_{2n}) konvergentan, jer je monotono neopadajući i odozgo ograničen. Neka je $\lim s_{2n} = s$. Kako je $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ i $\lim a_n = 0$, to je $\lim s_{2n-1} = s$. Time smo dokazali da je niz (s_n) konvergentan i da je $\sum(-1)^{n+1}a_n = s$.

Da dokažemo drugi deo tvrđenja, primetimo da je niz (s_{2n+1}) nerastući i odozdo ograničen , pri čemu je

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2m+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}\,.$$

Stoga je $s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ i $s_{2n-1} - s \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$, odakle sledi da je $|r_n| \leq a_{n+1}$. ■

Primer 1. Red $\sum(-1)^{n+1}/n$ je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu, jer je niz $(1/n)$ monotono opadajući niz koji konvergira ka nuli.

---

* Leibniz G.W. (1646-1716)-nemački matematičar

1.5. APSOLUTNO I USLOVNO KONVERGENTNI REDOVI

Definicija 1. *Red* $\sum a_n$ apsolutno konvergentan ako je
brojni red $\sum |a_n|$ konvergentan .

a_n

Teorema 1. *Ako je red* $\sum a_n$ apsolutno konvergira onda je on konvergentan.
Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Dokaz. Kako je red $\sum |a_n|$ konvergentan, tada iz Košijeve teoreme o konvergenciji brojnih redova slijedi za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_ε da je

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |a_n| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$. No onda je

$$|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_n| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \in \mathbb{N}$, pa je red $\sum a_n$ konvergentan prema Košijeve teoreme o konvergenciji brojnih redova.

Napomenimo da obrat dokazane teoreme u opštem slučaju ne važi. Zaista, red $\sum(-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ je prema Lajbnicovom kriterijumu konvergentan, ali ne apsolutno. Za takve redove kažemo da su **uslovno konvergentni**.

Teorema 3. *Neka je red* a_n *apsolutno konvergentan i* $s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *bijekcija. Tada je red* $\sum a_{s(n)}$ apsolutno konvergentan *i ima istu sumu kao i red* $\sum a_n$.