Primedba Jasno, ako $f = u + iv \in L^1(\mu)$, tada na osnovu očigledne nejednakosti

$$u_+,\ u_-,\ v_+,\ v_- \leq |f|$$

sledi $u_+,\ u_-,\ v_+,\ v_- \in L^1(\mu)$. (Pogledati i Propoziciju 1.8.)

Definicija 5.2. Neka je $f = u + iv \in L^1(\mu)$ gde su u i v realne i merljive funkcije. Integral funkcije f na $E \in \mathcal{M}$ je

$$\int_E f d\mu = \int_E u_+ d\mu - \int_E u_- d\mu + i\Big(\int_E v_+ d\mu - \int_E v_- d\mu\Big).$$

▲

Primedba. Definicija 5.2 se može proširiti i na funkcije $f = u + iv$ za koje su $u, v : X \to [-\infty, \infty]$ merljive tako da u realnom i imaginarnom delu prethodne definicije se ne pojavljuju izrazi $\infty - \infty$, ili $-\infty + \infty$.

Teorema 5.1. Neka $f, g \in L^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ i neka je $E \in \mathcal{M}$. Važi

a) $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$.

b) $\int_E f d\mu = \int_X \kappa_E f d\mu$.

c) $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$.

Dokaz: a) $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ sledi iz nejednakosti

$$|\alpha f + \beta g| \leq (|\alpha| + |\beta|)(|f| + |g|),$$

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq (|\alpha| + |\beta|)\Big(\int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu\Big).$$

b) Dokaz sledi iz definicije integrala kompleksne funkcije i odgovarajućeg tvrđenja za integral nenegativne funkcije.

c) Dovoljno je pokazati da važe sledeća jednostavnija tvrđenja:

(ci) Ako su f i g realne funkcije, tada važi

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

(cii) Ako je f realna i $\alpha < 0$ tada je $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.

(Za $\alpha > 0$ tvrđenje (cii) sledi na osnovu definicije integrala kompleksne (u ovom slučaju realne) funkcije kao i na osnovu Teoreme 4.1 c).)