(ciii) Neka je $f = u + iv$ kompleksna funkcija. Važi

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu.$$

Dokaz (ci). Stavimo $h = f + g$. Kako $f, g \in L^1(\mu)$, sledi da su integrali funkcija $f_+, f_-, g_+, g_-, h_+, h_-$ konačni. Važi

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

iz čega sledi

$$\int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu =$$

$$= \int_E f_+ d\mu + \int_E h_- d\mu + \int_E g_+ d\mu$$

odakle sledi (ci).

Dokaz (cii). Važi

$$(-f)_+ = f_-, \ (-f)_- = f_+,$$

te je

$$\int_E (\alpha f)_+ d\mu - \int_E (\alpha f)_- d\mu = \int_E (-\alpha f)_- d\mu - \int_E (-\alpha f)_+ d\mu$$

$$= -\alpha \left(\int_E f_- d\mu - \int_E f_+ d\mu \right) = \alpha \int_E f d\mu.$$

Dokaz (ciii). Važi $if = iu - v = ((-v)_+ - (-v)_-) + i(u_+ - u_-)$, pa koristeći definiciju integrala i tvrđenje pod (cii) sledi (ciii).

Dokaz tvrđenja c). Iz (ci) i definicije integrala za kompleksne funkcije f i g, sledi

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Kombinacijom tvrđenja (ci), (cii) i (ciii) se dobija

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu, \ \alpha \in \mathbf{C}.$$

Sada je dokaz tvrđenja c) direktna posledica prethodna dva tvrđenja. ■

Propozicija 5.1. Neka $f, g \in L^1(\mu)$. Važi:

a) Ako su f i g realne i $f \leq g$, tada važi $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.