b) $|\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X |f| d\mu$.

Dokaz:

a) Tvrđenje sledi iz Teoreme 4.1 a), nejednakosti $0 \leq g - f$ i prethodne teoreme.

b) Neka je $\int\limits_X f d\mu = Ae^{\theta i}$ $(A \geq 0)$ te je $|\int\limits_X f d\mu| = A$. Na osnovu Teoreme 4.1 c) i kako je $\int\limits_X e^{-\theta i} f d\mu$ realan nenegativan broj, sledi

$$|\int\limits_X f d\mu| = e^{-\theta i} \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X e^{-\theta i} f d\mu$$

$$= \int\limits_X \mathrm{Re}\,(e^{-\theta i} f) d\mu.$$

Sada koristeći činjenicu da je $Re(e^{-\theta i} f) \leq |f|$ i tvrđenje opd a) dobijamo $|\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X |f| d\mu$. ■

Propozicija 5.2. Ako su $A, B \in \mathcal{M}$ i $f \in L^1(\mu)$, tada važi

$$\int\limits_{A \bigcup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu - \int\limits_{A \bigcap B} f d\mu.$$

Dokaz: Dokaz sledi iz Teoreme 5.1 b), c) i jednakosti

$$\kappa_{A \cup B} = \kappa_A + \kappa_B - \kappa_{A \cap B}.$$

■

Teorema 5.2. (Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji.) Neka je $(f_n)_n$ niz kompleksnih merljivih funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i neka je

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \qquad x \in X.$$

Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ tako da je

$$|f_n(x)| \leq g(x), \qquad n \in \mathbf{N},\ x \in X$$

tada $f \in L^1(\mu)$ i važi

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0; \quad \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$