Dokaz: Funkcija f je merljiva kao granica niza merljivih funkcija. Kako je $|f| \leq g$ sledi $f \in L^1(\mu)$. Važi

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g.$$

Primenimo lemu Fatua na $r_n = 2g - |f_n - f|, \quad n \in \mathbf{N}$. Važi

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} r_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X r_n d\mu.$$

Sledi

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} (-\int_X |f_n - f| d\mu)$$

$$= \int_X 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

pa dobijamo (koristimo i da je $\int_X 2g d\mu < \infty$) da je

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Kako je

$$|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu| \leq \int_X |f_n - f| d\mu$$

sledi i poslednji deo tvrđenja. ∎

Primer 5.1. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ–algebrom, $x_0 \in X$ i δ_{x_0} Dirakova mera skoncentrisana u x_0. Ako je $f : X \to \mathbf{C}$ merljiva funkcija, tada je $f \in L^1(\delta_{x_0})$ i važi

$$\int_X f(x)\, d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

U Primeru 4.2 pokazali smo ovo tvrđenje za nenegativne funkcije. Koristeći razlaganje $f = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$ i linearnost integrala sledi tvrđenje.