5.2 Integrali funkcija jednakih skoro svuda

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je mera μ na $\sigma-$ algebri $\mathcal{M}$ na X kompletna, zato što uvodimo jednakost "skoro svuda".

Definicija 5.3. Kompleksne merljive funkcije f i g na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ su *jednake skoro svuda na* X, pišemo s.s. na X,

$$f = g \text{ s.s. na } X, \quad \text{ako je } \mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Slično, za proizvoljan merljiv podskup $E \in \mathcal{M}$, kažemo $f = g$ s.s. na E, ako je $\mu(\{x \in E; f(x) \neq g(x)\}) = 0.$ ▲

Uvodimo u skup merljivih funkcija relaciju $f \sim g$, ako su jednake skoro svuda. To je očigledno relacija ekvivalencije.

Jednostavno se proverava da važi i sledeće tvrđenje:

Lema 5.1. Ako je f merljiva funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$, μ kompletna mera i $\mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0$, tada je i g merljiva funkcija i pri tome važi $f \sim g$.

Sledeće teoreme pokazuju da su skupovi mere nula zanemarljivi za integraciju.

Teorema 5.3.

a) Neka je $f = u + iv$ merljiva funkcija na $(X, \mathcal{M})$, i $f = 0$ na $X \setminus N$ gde je $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$. Tada je $f \in L^1(\mu)$ i $\int\limits_X f d\mu = 0$.

b) Neka su f, g merljive funkcije na $(X, \mathcal{M})$, $f \in L^1(\mu)$ i $f \sim g$. Tada $g \in L^1(\mu)$ i za svako $E \in \mathcal{M}$ važi

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu.$$

Dokaz: a) Kako je $|f| = 0$ na $X \setminus N$, iz osobina integrala nenegativnih funkcija datih u Teoremi 4.1 d), e) i Propozicije 4.2 sledi $\int_{X \setminus N} |f| d\mu = 0$ i $\int_N |f| d\mu = 0$. Dakle $f \in L^1(\mu)$.

Kako je $u_+, u_-, v_+, v_- \leq |f|$ sledi

$$\int\limits_X u_+ d\mu, \int\limits_X v_+ d\mu, \int\limits_X u_- d\mu, \int\limits_X v_- d\mu = 0$$

te je $\int\limits_X f d\mu = 0$.