УНИВЕРЗИТЕТСКИ УЏБЕНИЦИ
25

МИНИСТАРСТВО ЗА ПРОСВЕТУ ВЛАДЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
ЈЕ ФИНАНСИРАЛО ШТАМПУ ОВОГ УЏБЕНИКА

UNIVERZITET U BEOGRADU

201

Dr DRAGOMIR KRPIĆ
Dr IVAN ANIČIN
Dr ILIJA SAVIĆ

NUKLEARNA FIZIKA KROZ ZADATKE

BEOGRAD, 1996.

NUKLEARNA FIZIKA
KROZ ZADATKE

Autori:
Prof. dr Dragomir Krpić
Prof. dr Ivan Aničin
Prof. dr Ilija Savić

Recenzenti:
Prof. dr Snežana Drndarević
Prof. dr Sava Milošević

Izdavač:
UNIVERZITET U BEOGRADU
Beograd, Studentski trg br. 1
Telefon.(011) 635-579
Telefaks(011) 638-818

Za izdavača:
Prorektor, prof dr Dragan Kuburović

Urednik:
Dipl.inž. Dragoslav M. Nikolić

Tehnički urednik:
Slobodan Avramović

Grafička obrada:
Mr Mihailo Mitrinović

Za štampariju:
Dipl.inž. Andreja Avramović

Štampa:
Zavod za grafičku tehniku
Tehnološko-metalurškog fakulteta
Beograd, Karnegijeva 4
Tel/Fax (011) 3224-934

CIP - Katalogizacija u publikaciji Narodna biblioteka Srbije, Beograd

539.1(075.8)(076)

КРПИЋ, Драгомир
Nuklearna fizika kroz zadatke / Dragomir Krpić, Ivan Aničin, Ilija Savić. - Beograd : Univerzitet, 1996 (Beograd : Zavod za grafičku tehniku Tehnološko-metalurškog fakulteta). - 312 str. : graf. prikazi ; 24 cm. - (Универзитетски уџбеници / Univerzitet u Beogradu ; 25)

Tiraž: 300. - Bibliografija : str. 311-312. -
ISBN 86-81019-38-4
1. Аничин, Иван 2. Савић, Илија
а) Нуклеарна физика - Задаци
ID=48835852

PREDGOVOR

Jezgro je vezani sistem elementarnih čestica u kome ove interaguju svim poznatim interakcijama. Zahvaljujući tome ponašanje jezgara veoma je raznovrsno a nuklearna fizika je verovatno najsloženija fizička disciplina. Udžbenička literatura o nuklearnoj fizici je vrlo obimna. Ovde je učinjen pokušaj da se sve oblasti koje se inače proučavaju u okvirima tradicionalnih opštih kurseva nuklearne fizike obrade kroz rešavanje najčešće susretanih elementarnih problema na koje se nailazi pri bavljenju ovim predmetom. Da bi udžbenik mogao nezavisno da se koristi postavke problema dovoljno su potpune i detaljne, a za slučaj da se problem ipak ne može samostalno rešiti data su i rešenja svih zadataka.

Verujemo da će ovako koncipirani udžbenik biti koristan dodatak postojećim konvencionalnim udžbenicima i da će pomoći da se kod studenata ove značajne oblasti fizike formiraju operativnija i praktičnija znanja no šti bi to inače bio slučaj.

Svakom ko nam bude pomogao da buduća izdanja bolje odgovore tom cilju unapred smo zahvalni.

Beograd, Juli 1996.

AUTORI

S A D R Ž A J

Glava A

Opšte osobine jezgara

A1 Energija veze jezgra uslovljena dejstvom jakih nuklearnih sila raste proporcionalno sa masenim brojem A dok energija kulonovog odbijanja raste proporcionalno sa $Z(Z+1) \simeq Z^2$ (videti semiempirijsku formulu za energiju veze). Pri $Z \simeq 120$ energija kulonovog odbijanja postaje reda veličine energije nuklearnog privlačenja, energija veze teži nuli i jezgro ne može da postoji kao stabilan sistem (zanemarili smo sve vrste nestabilnosti koje ovo sprečavaju i ranije).

Pokazati da su nuklearni i atomski kriterijum ovde usaglašeni; kada bi teža jezgra i postojala oko njih se ne bi mogao da formira stabilni elektronski omotač usled kreacije elektronsko — pozitronskih parova u polju sopstvenog jezgra.

A2 Bakarna folija debljine 1,5 mg/cm² obasjava se kolimisanim snopom α čestica iz raspada ^{210}Po ($E_\alpha = 5{,}3$ MeV) koji pada normalno na foliju. Za uglove rasejanja $\vartheta > 6°$ rasejava se 1% svih α čestica. Pretpostavljajući da je rasejanje isključivo Rutherford-ovog tipa naći naelektrisanje jezgra bakra.

A3 Thomsonov model atoma pretpostavlja da je naelektrisanje atoma uniformno raspoređeno po celoj zapremini atoma; po sferi radijusa $R = 10^{-8}$ cm. Na osnovu ove pretpostavke naći koliku maksimalnu energiju može da dobije α čestica emitovana iz ovakvog sistema i time pokazati da model najverovatnije ne odgovara eksperimentalnoj stvarnosti.

A4 U okviru mezonske teorije nuklearnih sila nukleone možemo shvatiti kao odgovarajuće »gole« nukleone okružene oblakom (atmosferom) virtuelnih π-mezona. Virtuelni procesi koji se neprekidno dešavaju su, dakle, tipa:

$$p \rightleftarrows n + \pi^+ \qquad \text{i} \qquad n \rightleftarrows p + \pi^-$$

Ovakva struktura nukleona može da dâ jednostavno i konsistentno objašnjenje simultano za »anomalne« magnetne momente i protona i neutrona:

$$\mu_p = +2{,}7928 \ \mu_N$$

$$\mu_n = -1{,}9103 \ \mu_N$$

Pretpostavivši da nukleon određeno vreme provede u stanju golog (idealnog) nukleona (sa magnetnim momentima $\mu_p^g = \mu_N$ i $\mu_n^g = 0$) i određeno vreme u disociranom stanju na goli nukleon i pion u skladu sa gore navedenim virtuelnim procesima, pokazati da se ova vremena života u jednom, odnosno drugom stanju, za proton i neutron u potpunosti slažu.

A5 Za određivanje atomskih masa izotopa često se u masenoj spektroskopiji koristi metod masenih dubleta. Metod se sastoji u merenju razlike masa jona istog masenog broja. Ako su poznate razlike masa sledećih dubleta:

$$m = O_2 - S$$
$$n = C_4 - SO \qquad (^{12}C,\ ^{1}H,\ ^{16}O,\ ^{32}S)$$
$$p = CH_4 - O$$

odrediti:

a) mase atoma sumpora, ugljenika i vodonika u masenoj skali u kojoj je $^{16}O = 16$ atomskih jedinica mase,

b) mase atoma vodonika, kiseonika i sumpora u masenoj skali u kojoj je $^{12}C = 12$ atomskih jedinica mase.

A6 Izračunati (u ajm i eV) defekte masa jezgara ^{3}H i ^{3}He i objasniti zašto se razlikuju? Mase ^{3}H, ^{3}He i neutrona su:
3,016049 ajm, 3,01630 ajm i 1,008665 ajm respektivno.

A7 a) Naći izraz za određivanje defekta mase jezgra preko dekrementa mase odgovarajućih atoma.

b) Izračunati defekte masa jezgara sledećih atoma: ^{4}He, ^{12}C, ^{16}O, ^{23}Na, ^{59}Co ^{197}Au i ^{238}U.

A8 Vezivne energije jezgara ^{12}C i ^{4}He su 92,16 i 28,30 MeV. Razlika između zbira masa jezgara ^{12}C i ^{4}He i mase jezgra ^{16}O iznosi 0,00769 ajm. Odrediti vezivnu energiju jezgra ^{16}O.

A9 Pri sintezi jezgara ^{6}Li i ^{2}H obrazuju se dve alfa čestice. Energije veze po nukleonu u ^{6}Li, ^{2}H i ^{4}He su: 5,33, 1,11 i 7,08 MeV respektivno. Izračunati energiju koja se oslobađa pri datom procesu.

A10 Polazeći od pretpostavke da je razlika vezivnih energija za ogledalska jezgra posledica elektrostatske interakcije među protonima naći za ogledalski par $^{29}_{14}Si - ^{29}_{15}P$ poluprečnik jezgra. Uporediti dobijenu vrednost sa vrednošću koja se dobija pomoću formule

$$R = 1{,}5 \times 10^{-13} A^{1/3} \text{ cm}$$

A11 Polazeći od semiempirijske formule za masu jezgra naći izraz koji daje zavisnost između Z i A za sva beta stabilna jezgra. Pomoću dobijenog izraza odrediti redni broj Z beta stabilnog jezgra za izobarne lance sa masenim brojem (A) 23, 89 i 114.

A12 Poznato je da vezivne energije jezgara sistematski variraju zavisno od toga da li jezgro ima paran broj protona (ili neutrona) ili ne. Ova varijacija vezivne energije, poznata kao energija sparivanja, iznosi:

$$\delta_B = \begin{cases} \Delta & Z \text{ parno, } N \text{ neparno} \\ 0 & A \text{ neparno} \\ -\Delta & Z \text{ neparno, } N \text{ neparno} \end{cases}$$

Pretpostavljajući da je vezivna energija jezgra $B(Z, N)$ glatka funkcija Z i N, kada se zanemari efekt sparivanja, izračunati parametar Δ ako su poznate empirijske vrednosti vezivnih energija sledećih izotopa: $(N-2, Z)$; $(N-1, Z)$; (N, Z) i $(N+1, Z)$ gde su N i Z parni brojevi.

A13 Dvonukleonski sistemi imaju sledeće karakteristike:

	Dvoneutron $n-n$	Deuteron $n-p$	Dvoproton $p-p$
Masa	nema vezano stanje	2,014741	nema vezano stanje
Vezivna energija B		2,22 MeV	
Spin (totalni mom. imp.)		1	
Magnetni moment μ		0,8574 μ_N	
Kvadrupolni moment Q		$2{,}73 \times 10^{-27}$ cm^2	
Srednji život		∞	
Pobuđena stanja		nema	

Objasniti kvalitativno zašto dva protona ili dva neutrona nemaju vezanih stanja već je deuteron jedino moguće vezano stanje dvaju nukleona.

A14 U prethodnom zadatku smo videli da u prvoj aproksimaciji nema potrebe za doprinosom orbitnog momenta impulsa da bi se objasnila stvarna vrednost magnetnog momenta deuterona i da nas je $^{3}S_1$ stanje kao osnovno stanje deuterona zadovoljilo. Slična je situacija i sa kvadrupolnim momentom koji je neobično mali (u težim, takozvanim deformisanim jezgrima, Q je reda barna !) i sugerira gotovo sfernu simetriju sistema tj. $L=0$ što znači opet $^{3}S_1$ stanje (videti zadatak A25 koji daje izraz za Q). Znači da je potrebna veoma mala primesa stanja višeg orbitnog momenta impulsa (koje nije sferno simetrično) da bi se dobile dobre vrednosti i za magnetni i za kvadrupolni moment.

No, kao što je poznato, centralne sile (potencijali) ne mogu dati stanja mešanog orbitnog momenta impulsa; opšte rešenje svih centralnih potencijala je oblika $R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ sa svojstvenom vrednošću energije E_{nl}. Do sada smo, u prošlom zadatku, videli da nam osim unapred očekivanog čisto radijalnog centralno simetričnog dela potencijala $V_r(r)$ treba i, takođe centralno simetrični član, koji bi zavisio od međusobne orijentacije spinova $V_s(r) f(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$. Oba su ova člana, međutim, sferno simetrična i ne zadovoljavaju gore navedene uslove. Uvodimo dakle i treći član, necentralni deo nuklearnog dvočestičnog potencijala na niskim energijama, koji ima oblik:

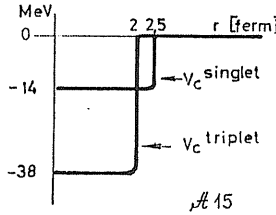
$$V_T(r)\, S_{12} \equiv V_T(r) \left[\frac{3\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})\,(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right]$$

(analogan klasičnom izrazu za energiju interakcije dva dipola). Ovaj se član naziva još i tenzorskom interakcijom jer zavisi od orijentacije spinova interagujućih čestica u odnosu na pravac koji ih spaja. On povezuje spinske i prostorne koordinate čestica

pa tako spreže orbitne i spinske momente impulsa. Tako orbitni moment impulsa više nije konstanta kretanja (totalni jeste!) i svako stanje datog totalnog momenta impulsa J postaje linearna kombinacija stanja različitog orbitnog momenta impulsa. Naći koja smeša stanja predstavlja osnovno stanje deuterijuma pod dejstvom ovakve necentralne interakcije.

A15 Na osnovu studija osnovnih osobina dvonukleonskih sistema utvrđujemo da dvočestična nuklearna interakcija odgovorna za ove osobine mora da ima oblik:

$$V_{12} = V_r(r) + V_s(r) f(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) + V_T(r)\left[\frac{3(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\right]$$



Sl. A15

Takođe smo videli da se u prvoj aproksimaciji možemo zadovoljiti samo centralnim delom potencijala. Ako ga napišemo eksplicitno u obliku:

$$V_c = V_r(r) + V_s(r)\,\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

naći konkretan oblik singletnog i tripletnog potencijala i prodiskutovati slaganje sa oblicima ovih potencijala dobijenih iz eksperimenata sa rasejanjem neutrona na protonima (zad. E.14), a prikazanih na slici, kao i sa zaključcima zadatka A1.

A16 Sistem od dva nukleona spreže se u centralno simetričnom nuklearnom polju (*LS*) spregom. (Spinovi čestica sabiraju se u ukupni spin *S*, a orbitalni momenti impulsa čestica u ukupni orbitalni moment impulsa *L*. Ukupni moment impulsa (spin) sistema (*J*) jednak je tada »vektorskom« zbiru *L* i *S*).

Pokazati da za fiksirano *J* postoje četiri različita stanja sistema.

Napisati sva moguća stanja sistema dva nukleona za prve tri vrednosti totalnog momenta impulsa *J*.

Napomena:

Kod (*LS*) sprege za označavanje stanja sistema koristi se oznaka $^{2S+1}L_J$. Umesto broja *L* najčešće se upotrebljavaju velika slova i stare spektroskopske oznake

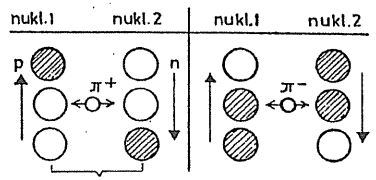
$L=$	0,	1,	2,	3,	4
	S	*P*	*D*	*F*	*G*

A17 »Tenzorski« deo nukleon-nukleonske interakcije prikazuje se tradicionalno u obliku:

$$V_T(r)\,S_{12} \quad \text{sa:} \quad S_{12} = 3\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

gde su $\vec{r}$ relativno rastojanje između dva nukleona, a $\vec{\sigma}_1$ i $\vec{\sigma}_2$ su Paulijevi spinski operatori nukleona 1 i 2. Izraziti operator S_{12} pomoću ukupnog spina dva nukleona *S*. Pokazati da operator S_{12} zavisi samo od uglova ϑ i φ (a ne i od *r*).

A18 Pokušavajući da objasni saturacioni karkter nuklearnih sila Heisenberg je pretpostavio da su ove tipa »sila izmene« (slične molekularnim hemijskim silama). Posle Yukawine teorije nuklearnih sila i otkrića π-mezonskog izotripleta kao kvanata polja jakih interakcija postao je jasan mogući mehanizam ostvarenja ovakvih sila. Izmena virtuelnih naelektrisanih piona, prikazana na slici, očigledno je ekvivalentna zameni prostornih koordinata čestica (izmena mesta). Sile ovog tipa zovu se Majoraninim. Pri interakciji običnim centralnim silama $V(r)$ Schrödingerova jednačina za dve čestice, u sistemu centra masa, prema Wigneru, ima oblik:



Sl. A18

$r < \frac{\hbar}{m_\pi c}$, tj. $t < \frac{r}{c} = \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$ da bi bilo $\Delta E \sim m_\pi c^2$, tj. čestica virtuelna

$$\left(\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2 + E\right)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, s_1, s_2) = V(r)\,\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, s_1, s_2)$$

Pri interakciji Majoraninim silama rezultat na desnoj strani jednačine nije samo množenje ψ sa $V(r)$ već i zamena prostornih koordinata interagujućih čestica:

$$\left(\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2 + E\right)\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, s_1, s_2) = V(r)\,\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, s_1, s_2)$$

Operator energije interakcije možemo, dakle, predstaviti u obliku $V(r)P_M^{12}$ gde je P_M^{12} Majoranin operator definisan dejstvom:

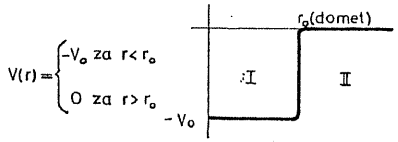
$$P_M^{12}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, s_1, s_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, s_1, s_2)$$

(Postoje još dve vrste sila izmene; Bartlettove i Heisenbergove. Prve se ostvaruju izmenom virtuelnih neutralnih piona i izmenjuju spinske koordinate čestica a druge zamenjuju i prostorne i spinske koordinate).

Iz opštih razmatranja naći svojstvene vrednosti Majoraninog operatora P_M^{12} i, pod pretpostavkom da su nuklearne sile delimično Majoraninog tipa, objasniti saturacioni karakter nuklearnih sila koji se najočigledije očitava u činjenici da stabilni petonukleonski sistemi ne postoje (i ^5Li i ^5He imaju periode poluraspada $\sim 10^{-21}$s! i u celoj karti stabilnih jezgara samo mesta sa $A=5$ i $A=8$ su prazna!). Objasniti kvalitativno zašto jezgra ne kolabiraju pod dejstvom jakih nuklearnih privlačnih sila (zašto zapremine nisu još manje od stvarnih).

A19 Deuteron se sastoji od čestica približno istih masa $m_p \simeq m_n = m$ tako da je redukovana masa sistema $\mu = m/2$. Sila između nukleona je privlačna i kratkog dometa i, zadovoljavajući se u prvoj aproksimaciji $^3S_1$ stanjem kao osnovnim stanjem deuterona, možemo je smatrati centralnom silom; silom koja deluje duž pravca koji spaja nukleone. Pošto je sila privlačna potencijal je u dometu sila negativan

a van njega jednak nuli. Najjednostavniji ovakav potencijal je pravougla potencijalna jama oblika:



μ19

Kao i uvek, radimo u sistemu centra masa, tj. dvočestični problem svodimo na kretanje jedne čestice sa redukovanom masom u centralnom polju (mada ovde definisanog »teškog« centra polja nema!) jer je jednočestični problem jedini koji umemo egzaktno da rešimo. Svojstvena rešenja ovakvog jednočestičnog problema predstavljaju moguća stanja nukleona koji se poštujući Paulijev princip po njima razmeštaju, u prvoj aproksimaciji ne interagujući više među sobom jer su svoje interakcione sposobnosti »potrošili« na stvaranje potencijalne jame (naziremo prilaz modela ljusaka). Znajući da energija veze deuterona iznosi $B=2{,}225$ MeV rešiti Schrödingerovu jednačinu redukovanog dvočestičnog problema za gornji potencijal i naći talasnu funkciju osnovnog stanja deuterona. Naći zatim vezu između dometa interakcije r_0 i dubine potencijalne jame V_0. Naći dubinu jame V_0 ako se za r_0 uzme vrednost 2×10^{-13} cm.

A20 U tablici su date vrednosti koje opisuju početni (strmo uzlazni) deo krive energije veze po nukleonu u funkciji masenog broja A; kao i broj parnih veza među nukleonima:

JEZGRO	$\frac{B}{A}=\frac{\text{energ. veze}}{\text{nukleon}}\left[\frac{\text{MeV}}{\text{nukl}}\right]$	broj parnih veza među nukleonima
^2H	1,112	$\frac{2\times1}{2}=1$
^3H	2,827	$\frac{3\times2}{2}=3$
^4He	7,074	$\frac{4\times3}{2}=6$

Aproksimirajući radijalnu talasnu funkciju osnovnog stanja deuterona funkcijom

$$u(r)=C\,e^{-\alpha r}$$

naći verovatnoću da proton i neutron u deuteronu budu na uzajamnom rastojanju r većem od dometa nuklearnih sila (r_0). Na osnovu ovoga kvalitativno objasniti podatke date u gornjoj tabeli.

A21 U nuklearnim tablicama često se navode vrednosti magnetnih momenata izotopa (obično osnovnih stanja). Veličina magnetnog momenta izražava se u nuklearnim magnetonima $\mu_N=e\hbar/2m_pc$. U teorijskim razmatranjima (sa konkretnim modelskim funkcijama nukleona (i jezgra)), magnetni moment definišemo kao očekivanu vrednost operatora magnetnog momenta za stanje sa definisanim spinom J i njegovom maksimalnom projekcijom $M=J$, tj.:

$$\mu=\langle JJ|\sum_k(g_{lk}\hat{l}_{zk}+g_{sk}\hat{s}_{zk})|JJ\rangle\cdot\frac{e\hbar}{2m_pc}$$

gde su $\hat{l}_{zk}$ i $\hat{s}_{zk}$ operatori projekcija orbitalnog momenta impulsa i spina k-tog nukleona, g žiromagnetni faktori ($g_l=0$ za neutron, $g_l=1$ za proton, $g_s=5{,}58$ za proton i $g_s=-3{,}89$ za neutron). Sumiranje se vrši po svim nukleonima. Napisati operator magnetnog momenta deuterona izražen preko operatora J_z. Pretpostavljajući da je deuteron pretežno u $^3S_1$ stanju sa malom primesom $^3D_1$ stanja izračunati iz poznate vrednosti magnetnog momenta deuterona ($0{,}8574\,\mu_N$) primesu $^3D_1$ stanja.

Napomena:

Iskoristiti operatorski identitet: $\hat{L}_z=\frac{\vec{L}\cdot\vec{J}}{J^2}\hat{J}_z$.

A22 Neka je magnetni moment jezgra:

$$\vec{\mu}_J=\mu_J\frac{\vec{I}}{I}\quad\text{gde je }\vec{I}\text{ spin jezgra}$$

a srednja vrednost magnetnog polja atomskih elektrona na mestu jezgra:

$$\langle\vec{\mathcal{H}}_e\rangle=-\text{const}\,\frac{\vec{J}}{J}$$

gde je $\vec{J}$ rezultujući moment impulsa atomskih elektrona.
Ova dva polja interaguju (hiperfina interakcija) energijom:

$$\langle U\rangle=-\vec{\mu}_J\cdot\langle\vec{\mathcal{H}}_e\rangle.$$

Usled ove interakcije term $^4F_{9/2}$ u atomu ^{59}Co je osmostruko rascepan. Naći spin ovog jezgra.

A23 Term $^2D_{3/2}$ atoma ^{209}Bi je hiperfinom interakcijom pocepan na četiri komponente. Odnos intervala (razmaka) među ovim komponentama je $\sim6:5:4$. Odrediti spin jezgra i broj komponenata hiperfinog cepanja spektralne linije $^2S_{1/2}-{}^2D_{3/2}$ ako je izborno pravilo u atomskim prelazima $\Delta F=0,\pm1$ (F je totalni moment impulsa atoma).

A24 Odnos intenziteta hiperfinih komponenata (rastavljenih svega 0,021 Å!) spektralne linije $^2P_1/_2$ — $^2S_1/_2$ u atomu ^{23}Na iznosi ~10 : 6 (linija 5890 Å iz čuvenog žutog dubleta). Ako je cepanje terma $^2P_1/_2$ zanemarljivo, naći spin jezgra ^{23}Na.

A25 Naći energiju Coulombove interakcije jezgra Z, homogene gustine naelektrisanja $\rho(X, Y, Z)$, i tačkastog naelektrisanja e u tački $A(x, y, z)$ ako je rastojanje r između njihovih centara mnogo veće od radijusa jezgra R. Nula koordinatnog sistema smeštena je u centar jezgra a z osa poklapa se sa pravcem momenta impulsa jezgra (zbog rotacije jezgra oko z ose distribucija naelektrisanja je, u srednjem, osno (φ) simetrična i izbor x i y ose nije kritičan). Naći Coulombov potencijal jezgra u tački $B(0, 0, z=r)$ i prodiskutovati rezultat.

A26 Naći kvadrupolni moment homogeno naelektrisanog elipsoidalnog jezgra (oblika cigare) male i velike poluose a i b respektivno. Osa z kolinearna je sa velikom poluosom.

A27 Pretpostavljajući da jezgro ^{176}Lu ima oblik rotacionog elipsoida bliskog sferi naći odnos velike poluose prema maloj (b/a) ako je poznata vrednost njegovog kvadrupolnog momenta, $Q_0=7$ barna.

A28 Nuklearni električni kvadrupolni moment uslovljen samo jednim protonom definisan je kao očekivana vrednost kvadrupolnog operatora $Q_{20}=3z^2-r^2$ u stanju sa maksimalnom projekcijom spina (stanje maksimalne orijentacije). Pretpostavljajući da je proton opisan jednočestičnom talasnom funkcijom, $R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\,\alpha$, (gde je α spinska funkcija koja odgovara spinu »gore«) naći vrednost kvadrupolnog momenta. Proceniti zatim kvadrupolni moment za proton u stanju $d_{5/2}$ ($l=2$, $j=l+1/2$) za jezgro sa radijusom 5 fm.
Napomena:

$$\int Y_{ll}\,Y_{20}\,Y_{ll}\,d\Omega = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{l}{2l+3}\,.$$

A29 Eksperimentalni podaci iz rasejanja naelektrisanih čestica na jezgru, primarno, određuju dva parametra jezgra: radijus (R) i površinsku debljinu jezgra (t), definisanu kao interval poluprečnika na kome gustina naelektrisanja (mase) spadne sa 90% na 10% centralne vrednosti ρ_0.
Raspodela naelektrisanja u jezgru dobijena iz eksperimenata sa rasejanjem naelektrisanih čestica može da se predstavi funkcijom:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}\,.$$

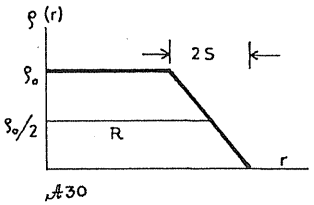
Ako parametar a iznosi 0,54 fm (za sva jezgra sa $A>16$), odrediti površinsku debljinu jezgra.

A30 Funkcionalna zavisnost gustine nukleona od poluprečnika jezgra prikazana je uprošćeno na slici. Vrednosti parametara R i S su:

$$R=1{,}1\,A^{1/3}\ fermi$$

$$2S=2{,}5\ fermi.$$

Odrediti parametar gustine ρ_0, pa izračunati zatim broj nukleona koji se nalazi u oblasti promenljive gustine (»blizu« površine jezgra) za jezgro sa masenim brojem $A=216$.



A30

A31 Model fermi-gasa razmatra jezgro kao gas neinteragujućih protona i neutrona zatvorenih u potencijalnu jamu dimenzija jezgra. Pomoću ovog modela može se naći približna dubina nuklearne potencijalne jame; može se objasniti povećanje gustine nuklearnih stanja sa energijom; emisija čestice može se shvatiti kao proces »isparavanja« nukleona. Ekscitacija jezgra, tj. stepen do koga su popunjena viša energetska stanja, može se shvatiti ako se gasu pripiše određena temperatura. Na temperaturi $T=0$ (osnovno stanje) broj stanja do najvišeg popunjenog stanja jednak je baš ukupnom broju nukleona A (nukleoni su fermioni te za njih važi Paulijev princip, odnosno Fermi-Diracova statistika). Opišemo li, dakle, jezgro kao nukleonski gas zatvoren u kutiju dimenzija jezgra tada će nukleon na najvišem energetskom stanju na $T=0$ imati maksimalni impuls $p_{max}=p_F$.
Naći ovu vrednost impulsa kao i maksimalnu kinetičku energiju nukleona E_F a odatle i dubinu nuklearne potencijalne jame za proizvoljno jezgro sa A nukleona. Na primeru nekog lakog jezgra prodiskutovati rezultat i objasniti kvalitativno razliku između oblika jame za protone i neutrone.

A32 U modelu fermi-gasa naći srednju kinetičku energiju po nukleonu i na osnovu toga pokazati da nukleone u jezgru zaista možemo tretirati nerelativistički.

A33 Jezgra poseduju mnogo pobuđenih stanja. Niska pobuđena stanja mogu se pripisati ekscitaciji jedne čestice (kao u atomu). Visoka stanja su, pak, sasvim različita; energija pobuđenja ovde se deli na veći broj nukleona. Nukleon u pobuđenom stanju nije više u fermijevom moru (po energiji ili impulsu). Energija ekscitacije E^* podiže nuklearnu temperaturu na vrednost T. Za fermi-gas od A nukleona između njih postoji veza:

$$E^*=const\ AT^2.$$

Na osnovu ovakvog statističkog prilaza pokazati da gustina pobuđenih stanja raste sa energijom ekscitacije, kao i sa brojem nukleona i naći zakon ovog porasta.

RA1 Radijus prve Bohrove orbite elektrona u atomu jednak je:

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{mZe^2}$$

sa porastom Z on opada. Na nekoj vrednosti Z on će postati reda Komptonove talasne dužine elektrona

$$\lambda^* = \frac{\hbar}{mc}$$

i njegova neodređenost položaja biće istog tog reda veličine. Iz relacija neodređenost donja granica njegovog impulsa biće

$$\Delta p = p_{min} \geqslant \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{\hbar}{\lambda^*} = mc$$

i donja granica energije:

$$E_{min} \geqslant mc^2$$

što je dovoljno (po redu veličine) da elektron u polju sopstvenog jezgra kreira elektronsko-pozitronski par. Takav atom, dakle, neće biti stabilan. Potreban uslov za njegovu stabilnost je znači:

$$\frac{\hbar^2}{mZe^2} \geqslant \frac{\hbar}{mc}$$

tj.:

$$Z \leqslant \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha} \simeq 137$$

što se podudara sa nuklearnim kriterijumom.

RA2 Presek za Kulonovo rasejanje u prostorni ugao $d\Omega$ pod uglom ϑ u odnosu na upadni pravac (diferencijalni presek, tj. broj ovako rasejanih čestica u odnosu na ukupan broj upadnih čestica) je:

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = n\left(\frac{Ze^2}{2E_\alpha}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

gde je n broj jezgara mete po cm^2. Problem je očigledno φ simetričan pa je ukupan broj α čestica koji se rasejao pod uglovima $\vartheta > 6^\circ$ jednak:

$$\frac{dN}{N} = n\left(\frac{Ze^2}{2E_\alpha}\right)^2 \int_{6^0}^{180^0} \sin^{-4}\frac{\vartheta}{2}\, 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Posle trigonometrijskih transformacija pod integralom i uvođenja smene $\sin(\vartheta/2) = y$ dobijamo:

$$\frac{dN}{N} = n\left(\frac{Ze^2}{2E_\alpha}\right)^2 8\pi \int_{0,0523}^{1} y^{-3}\, dy = 4{,}58 \times 10^3\, n \frac{Z^2 e^4}{4E_\alpha^2}$$

odakle je:

$$Z^2 = \frac{dN}{N} 4E_\alpha^2 \frac{1}{4{,}58 \times 10^3 ne^4} \simeq 843$$

tj.:

$$Z_{Cu} = 29$$

što je tačna vrednost.

RA3 Ako α čestica radijalno napušta atom tada se njena putanja deli na deo unutar ($r = r_1 < R$) i van jezgra ($r = r_2 > R$). Dok se nalazi unutar jezgra na nju deluje polje $\mathcal{E}_1$ koje nalazimo iz Gaussove teoreme:

$$\mathcal{E}_1 S = 4\pi q = \mathcal{E}_1 \cdot 4\pi r_1^2 = 4\pi\rho V_1$$

što uz:

$$\rho = q/V = (Z-2)\, e \Big/ \frac{4}{3}\pi R^3$$

daje:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{(Z-2)\, e}{R^3} r_1$$

Sila na α česticu je dakle $F = 2e\,\mathcal{E}_1$ pa je prirast kinetičke energije na ovom delu puta:

$$E_1 = \int_0^R F dr_1 = (Z-2)\frac{e^2}{R}$$

Kada napusti jezgro na nju će delovati polje:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{4\pi q}{4\pi r_2^2} = (Z-2)\, e \frac{1}{r_2^2}$$

koje na ovom delu puta daje prirast energije:

$$E_2 = \int_R^\infty F dr_2 = 2(Z-2)\frac{e^2}{R}$$

Konačno je:

$$E_\alpha = E_1 + E_2 = 3\,(Z-2)\,\frac{e^2}{R}.$$

Vidimo, prvo, da energija α čestice opada linearno sa Z, što nije slučaj i, drugo, da su te energije za faktor 10^3 premale (reda keV umesto MeV za $Z>100$) te da bi atom morao imati mnogo manji radijus (jače polje) da bi obezbedio observirane energije čestica.

RA4 Neka je t dela jedinice vremena proton goli proton sa $\mu_p^g=1$ i $(1-t)$ dela jedinice vremena u disociranom stanju na goli neutron sa $\mu_n^g=0$ i π^+ mezon. U srednjem će, dakle, biti:

$$\mu_p = t\,\mu_p^g + (1-t)\,(\mu_\pi + \mu_n^g).$$

Kako je:

$$\mu_{\pi\pm} = \pm\frac{e\hbar}{2\,m_\pi\,c} = \pm\frac{m_p}{m_\pi}\,\frac{e\hbar}{2\,m_p\,c} = \pm\frac{m_p}{m_\pi}\,\mu_N \cong 6{,}6\,\mu_N$$

dobijamo:

$$\mu_p = [t+(1-t)6.6]\,\mu_N = 2{,}79\,\mu_N$$

i, konačno, $t=0{,}68$. Proton je, znači, $\sim 2/3$ vremena goli proton a $1/3$ vremena u disociranom stanju.

Slično, ako pretpostavimo da je T vremena neutron goli neutron a $(1-T)$ vremena disociran na goli proton i π^- mezon, imaćemo:

$$\mu_n = T\,\mu_n^g + (1-T)\,(\mu_\pi + \mu_p^g)$$
$$= (1-T)\,(\mu_N - 6{,}6\,\mu_N) = -1{,}91\,\mu_N$$

tj. $T=0{,}66$. (alternativno, mogli smo T u ovoj relaciji zameniti sa vrednošću za t i dobiti magnetni moment neutrona sa sasvim zadovoljavajućom tačnošću !). Ova jednakost vremena t i T govori nam da je postulirana jednakost protona i neutrona u pogledu jakih interakcija i sa ovog gledišta ispravna kao i da gornja slika strukture nukleona verovatno dobro opisuje realnost.

RA5 U zadatku su date razlike masa jona, i one su do na malu razliku energija veza elektrona (reda eV) jednake razlikama masa atoma. U skali u kojoj je $^{16}O=16$ ajm dobijamo:

$$M_S = 32 - m, \qquad M_C = 12 + \frac{n-m}{4}$$

$$M_H = 1 + \frac{4p-n+m}{16}$$

dok u skali u kojoj je $^{12}C=12$ ajm

$$M_O = 16 + \frac{m-n}{3}, \qquad M_S = 32 - \frac{m+2n}{3}$$

$$M_H = 1 + \frac{32p+m-n}{12}.$$

RA6 Defekt mase jezgra, koje se sastoji od Z protona i $A-Z$ neutrona, iznosi

$$\Delta M_j(Z,A) = Zm_p + (A-Z)\,m_n - M_j(Z,A)$$

gde je m_p masa protona, m_n masa neutrona i $M_j(Z,A)$ masa jezgra. S druge strane je:

$$M_j(Z,A) = M_a(Z,A) - Zm_e + B_e(Z)$$

gde je $M_a(Z,A)$ masa atoma, m_e masa elektrona i $B_e(Z)$ vezivna energija elektrona. $B_e(Z)$ za lake elemente iznosi nekoliko eV a za teške oko 1 MeV, i u odnosu na $M_j(Z,A)$ je mala veličina te se može i zanemariti. Prema tome izraz za defekt mase jezgra postaje

$$\Delta M_j(Z,A) = Z\,M_a(^1H) + (A-Z)\,m_n - M_a(Z,A)$$

gde je $M_a(^1H)$ masa vodonikovog atoma.

Na osnovu dobijenog izraza se nalazi da defekt mase jezgra ^3H iznosi

$$\Delta M_j(1,3) = 9{,}12\times 10^{-3}\ \text{ajm} = 8{,}49\ \text{MeV}$$

a za ^3He

$$\Delta M_j(2,3) = 8{,}3\times 10^{-3}\ \text{ajm} = 7{,}73\ \text{MeV}.$$

Vidi se da je vezivna energija ^3H veća od vezivne energije ^3He. To znači da su nukleoni u ^3He slabije vezani nego kod ^3H. Razlika energije veze iznosi 0,76 MeV. Da bismo objasnili ovu razliku razmotrićemo sile koje deluju među nukleonima. Kod ^3H imamo dve sile izazvane $(n-p)$ interakcijom i jednu silu izazvanu $(n-n)$ interakcijom. Kod ^3He imamo dve sile tipa $(n-p)$ i jednu silu tipa $(p-p)$. Na osnovu napred iznetog može se napisati:

$$(n-n) = (p-p) + 0{,}76\ \text{MeV}$$

Iz ovoga proizlazi da razliku u veličinama energije veze moramo pripisati Coulombovoj sili, koja deluje između dva protona.

RA7 a) Polazeći od izraza za defekt mase jezgra (videti prethodni zadatak):

$$\Delta M_j(Z,A) = Z\,M_a(^1H) + (A-Z)\,m_n - M_a(Z,A)$$

i definicije dekrementa mase atoma Δ, tj.:

$$\Delta = M_a(Z,A) - A$$

lako se nalazi da je:

$$\Delta M_j(Z,A) = Z\,[M_a(^1H) - m_n] + A\,(m_n - 1) - \Delta$$

što predstavlja traženi izraz.

b) Defekti mase jezgara (izraženi u MeV) atoma ^4He, ^{12}C, ^{16}O, ^{23}Na, ^{59}Co, ^{197}Au i ^{238}U iznose: 28,3; 92,16; 127,61; 186,55; 517,3; 1559,32 i 1801,62 MeV respektivno.

RA8 Vezivna energija jezgra ^{16}O jednaka je:

$$B(^{16}O) = [8\,m_p + 8\,m_n - M_j(^{16}O)]\,c^2$$

Na osnovu uslova zadatka sledi da je:

$$M_j(^{16}O)=M_j(^{12}C)+M_j(^4He)-7{,}69\times10^{-3}\ \text{ajm}.$$

Dalje, može se pokazati da je

$$M_j(^{12}C)+M_j(^4He)=8\,m_p+8m_n-\frac{B(^{12}C)+B(^4He)}{c^2}.$$

Prema tome $B(^{16}O)$ iznosi:

$$B(^{16}O)=B(^{12}C)+B(^4He)+7{,}69\times10^{-3}\times931{,}44=127{,}62\ \text{MeV}.$$

RA9 Za nuklearnu reakciju

$$^6Li+^2H\rightarrow{}^4He+Q$$

Q vrednost iznosi:

$$Q=[M_j(^6Li)+M_j(^2H)-2\,M_j(^4He)]\,c^2$$

Na osnovu izraza:

$$M_j(Z,A)=Zm_p+(A-Z)\,m_n-\frac{1}{c^2}B(Z,A)$$

može se napisati da je:

$$M_j(^6Li)=3\,m_p+3\,m_n-\frac{1}{c^2}B(^6Li)$$

$$M_j(^2H)=m_p+m_n-\frac{1}{c^2}B(^2H)$$

$$M_j(^4He)=2\,m_p+2\,m_n-\frac{1}{c^2}B(^4He).$$

Zamenom ovih izraza u izraz za Q vrednost dobija se

$$Q=2\,B(^4He)-B(^6Li)-B(^2H).$$

Koristeći vezu između vezivne energije $B(Z,A)$ i vezivne energije po nukleonu $f(Z,A)$, tj.:

$$B(Z,A)=Af(Z,A)$$

konačno se dobija

$$Q=2A(^4He)\,B(^4He)-A(^6Li)\,B(^6Li)-A(^2H)\,B(^2H)=22{,}4\ \text{MeV}.$$

RA10 Koristeći izraz za vezivnu energiju jezgra

$$B(Z,A)=\Delta M_j(Z,A)\,c^2=[ZM_a(^1H)+(A-Z)\,m_n-M_a(Z,A)]\,c^2$$

nalazi se da razlika vezivnih energija jezgara ^{29}P i ^{29}Si iznosi:

$$\Delta B=[M_a(^1H)-m_n-\Delta M_a]\,c^2$$

gde je

$$\Delta M_a=M_a(^{29}P)-M_a(^{29}Si).$$

S druge strane vezivna energija jezgra može se izračunati i pomoću semiempirijske formule

$$B(Z,A)=\left[a_vA-a_sA^{2/3}-a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}-a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}+\delta(A,Z)\right]c^2.$$

Treći član u ovoj formuli odgovoran je za elektrostatičku interakciju među protonima. Pretpostavljajući da je jezgro sfernog oblika i da su protoni ravnomerno raspoređeni po zapremini jezgra može se pokazati da ovaj član ima vrednost

$$a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}c^2=\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}Z(Z-1)$$

gde su Z redni broj jezgra a R poluprečnik jezgra.
Razlika vezivnih energija jezgara ^{29}P i ^{29}S, računata pomoću semiempirijske formule, iznosi

$$\Delta B=-\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}2Z(^{29}Si)$$

Prema tome, može se napisati da je:

$$[M_a(^1H)-m_n-\Delta M_a]\,c^2=-1{,}2\frac{e^2}{R}Z(^{29}Si)$$

odakle je

$$R=\frac{1{,}2\,e^2Z(^{29}Si)}{[\Delta M_a+m_n-M_a(^1H)]\,c^2}=5{,}35\,fm.$$

Pomoću formule $R=1{,}5\times10^{-13}A^{-1/3}$ dobija se da poluprečnik ovih jezgara iznosi

$$R=4{,}6\ \text{fm}.$$

RA11 Iz uslova za minimum funkcije

$$M_j(Z,A)=Zm_p+(A-Z)\,m_n-a_vA+a_sA^{2/3}+a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}+a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}+\delta(Z,A)$$

tj.:

$$\left(\frac{\partial M_j}{\partial Z}\right)_{A=\text{const}}=0$$

pod pretpostavkom da je $\delta(A,Z)$ konstanta dobijamo:

$$m_p-m_n+2\,a_c\frac{Z}{A^{1/3}}-4\,a_a\frac{(A-2Z)}{A}=0$$

odakle je:

$$Z_{st}=\frac{(4\,a_a+m_n-m_p)\,A}{8\,a_a+2\,a_cA^{2/3}}.$$

Zamenom brojnih vrednosti za a_c, a_a, m_n i m_p konačno se dobija

$$Z_{st}=\frac{A}{1{,}98+0{,}015\,A^{2/3}}.$$

Pomoću gornjeg izraza nalazi se da je za:

$$A=23,\quad Z_{st}\simeq 11 \qquad (^{23}Na)$$
$$A=89,\quad Z_{st}\simeq 39 \qquad (^{89}Y)$$
$$A=114,\quad Z_{st}\simeq 49 \qquad (^{114}In).$$

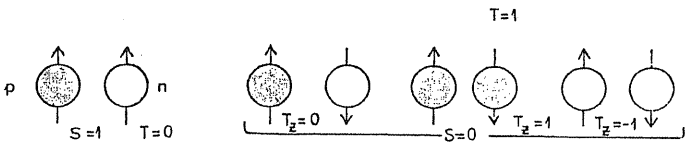
RA12 Pošto smo pretpostavili da je, do na energiju sparivanja, funkcija $B(Z, N)$ glatka, možemo da je razvijemo u Taylorove redove oko tačaka N i $N-1$ na sledeći način:

$$B(N+1)=B(N)+\left.\frac{\partial B}{\partial N}\right|_N-\Delta$$
$$B(N-1)=B(N)-\left.\frac{\partial B}{\partial N}\right|_N-\Delta$$
$$B(N)=B(N-1)+\left.\frac{\partial B}{\partial N}\right|_{N-1}+\Delta$$
$$B(N-2)=B(N-1)-\left.\frac{\partial B}{\partial N}\right|_{N-1}+\Delta.$$

Ako prvu i drugu jednačinu pomnožimo sa -1 pa sumiramo sve četiri jednačine, pošto se izvodi $\frac{\partial B}{\partial N}$ međusobno potiru, dobijamo:

$$\Delta=\frac{1}{4}[B(N-2, Z)-3B(N-1, Z)+3B(N, Z)-B(N+1, Z)].$$

RA13 Neutron i proton su, osim po naelektrisanju (i magnetnom momentu), veoma slične čestice (masa, spin) i apstrahovanje elektromagnetnih osobina sugerira njihovu identičnost u pogledu jakih (nuklearnih) interakcija (Heisenberg, Ivanenko 1932). Ovaj zaključak i vodi do pojma izotopskog spina (izospina) t. Nepostojanje vezanog dvoprotonskog sistema moglo bi se pripisati elektromagnetnim interakcijama (odbojne kulonove sile) no za dvoneutronski sistem ovo ne važi i morali bismo naći drugi razlog. Nukleoni su fermioni sa $s=1/2$ i $t=1/2$ te se dvonukleonski sistem može naći u spinskom singletnom ($S=0$) i tripletnom ($S=1$) stanju i izospinskom singletnom ($T=0$) i tripletnom ($T=1$) stanju. Vodeći računa o Paulijevom principu u spinsko-izospinskom prostoru moguće kombinacije su, šematski, dakle:



Rješ13

od kojih, za sada možemo reći, u prirodi u vezanom stanju postoje samo prve dve. Zašto se ne javljaju druge dve mogućnosti? U njima je sistem u singletnom spinskom stanju i možda je baš to razlog što ovakvi sistemi ne postoje; možda jake interakcije zavise od uzajamne orijentacije spinova interagujućih čestica na takav način da je za antiparalelne spinove interakcija nedovoljno jaka da može da oformi vezani sistem? Ako je to slučaj onda je i deuteron uvek samo u čistom tripletnom stanju. Kako je magnetni moment deuterona vrlo približno jednak prostom zbiru magnetnih momenata protona i neutrona:

$$\mu_D=0{,}8574\,\mu_N \quad \text{a} \quad \mu_p+\mu_n=0{,}8797\,\mu_N\ (\pm 0{,}0015)$$

(razlika od 0,0223 μ_N objašnjava se sa 2—8% primese $^3D_1$ stanja) to odmah sugerira da je osnovno stanje deuterona zaista skoro čisto $^3S_1$ stanje.

Nepostojanje dvoprotonskih i dvoneutronskih sistema je, dakle, zaista osnovni dokaz da jake interakcije zavise od uzajamne orijentacije spinova interagujućih čestica. Svi eksperimenti sa deuteronima daju informaciju isključivo o tripletnom nuklearnom dvočestičnom potencijalu. Informacije o singletnom potencijalu možemo dobiti samo iz eksperimenata sa rasejanjem neutrona na protonima (videti zadatak E.18) jer pri rasejanju, kada sistem nije u vezanom stanju, do izražaja dolazi i interakcija preko singletnog potencijala.

RA14 Nađimo moguće smeše stanja sa različitim L pod dejstvom operatora S_{12}:

1. Za singletna stanja ($S=0$) biće $J^2=L^2$ ($\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$) pa je i L konstanta kretanja, tj. necentralne sile ne utiču na singletna stanja. U njima je $\vec{\sigma_1}=-\vec{\sigma_2}$ i

$$S_{12}=-\frac{3}{r^2}(\vec{\sigma_1}\cdot\vec{r})^2+\vec{\sigma_1}^2=-3+3=0$$

što potvrđuje gornji zaključak. Sledi da su moguća stanja dvonukleonskog sistema u ovom slučaju:

$$\text{sa } J=0;\quad {}^1S_0$$
$$\text{sa } J=1;\quad {}^1P_1$$
$$\text{sa } J=2;\quad {}^1D_2 \quad \text{itd.}$$

2. Za tripletna stanja ($S=1$), pošto se stanja sa parnim i neparnim L ne mešaju (parnost stanja je $(-1)^L$ i L je dobar kvantni broj), moguća su sledeća stanja:

$$\text{sa } J=0,\ L=1\ ;\quad {}^3P_0$$
$$\text{sa } J=1,\ L=0,\ 2;\quad {}^3S_1+{}^3D_1$$
$$\text{sa } J=1,\ L=1\ ;\quad {}^3P_1$$
$$\text{sa } J=2,\ L=1,\ 3;\quad {}^3P_2+{}^3F_2$$
$$\text{sa } J=2,\ L=2\ ;\quad {}^3D_2 \quad \text{itd.}$$

Pošto je za deuteron $J=1$ i pošto smo već utvrdili da $^3S_1$ stanje dovoljno dobro u najgrubljoj aproksimaciji opisuje osobine deuterona to vidimo da je stvarna smeša stanja $^3S_1$ i $^3D_1$. Zaista, od 2 do 8% primese $^3D_1$ stanja daje dobre vrednosti i magnetnog i kvadrupolnog momenta deuterona.

RA15 Za nerelativističke brzine (što smo verifikovali u zadatku A.32) talasna funkcija nukleona je

$$\psi(x, y, z; s_z) = \Phi(x, y, z)\, \chi_{1/2}\, s_z.$$

Ako je $\vec{\hat{S}}$ vektorski operator spina tada je $\vec{\hat{S}}^2$ konstanta kretanja intenziteta $1/2\,(1/2+1)=3/4$ (u jedinicama $\hbar$) sa mogućim vrednostima projekcije $s_z+1/2$ (spin »gore«) i $-1/2$ (spin »dole«). Tako s_z ima samo dve svojstvene funkcije:

$$\chi_{1/2\,1/2} \equiv \alpha, \qquad \chi_{1/2\,-1/2} \equiv \beta$$

sa

$$s_z\alpha = \frac{1}{2}\alpha, \qquad s_z\beta = -\frac{1}{2}\beta, \qquad s^2\alpha = \frac{3}{4}\alpha \quad \text{i} \quad s^2\beta = \frac{3}{4}\beta.$$

Uobičajeno je definisati novi operator $\vec{\hat{\sigma}}$ preko $\vec{\hat{S}} = \frac{1}{2}\vec{\hat{\sigma}}$ pa je sada:

$$\sigma_z\alpha = \alpha, \quad \sigma_z\beta = -\beta, \quad \sigma^2\alpha = 3\alpha \quad \text{i} \quad \sigma^2\beta = 3\beta.$$

Kako je pak:

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \quad \text{i} \quad \sigma_z^2\alpha = \alpha \quad \text{i} \quad \sigma_z^2\beta = \beta$$

to mora biti i

$$(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\,\alpha = 2\alpha \quad \text{i} \quad (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\,\beta = 2\beta.$$

Ove su relacije, očigledno, zadovoljene ako je:

$$\sigma_x\alpha = \beta, \quad \sigma_x\beta = \alpha, \quad \sigma_y\alpha = i\beta \quad \text{i} \quad \sigma_y\beta = -i\alpha.$$

U matričnoj reprezentaciji ove relacije zadovoljavaju Paulijeve matrice:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spinska talasna funkcija sistema od dve identične čestice mora biti korektno simetrizovana (u skladu sa simetrijom prostornog dela talasne funkcije). Postoje tri simetrične spinske funkcije:

$$\chi_{11}(1, 2) = \alpha_1\alpha_2$$

$$\chi_{10}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \qquad \text{koje odgovaraju tripletnom stanju (paralelni spinovi)}$$

$$\chi_{1-1}(1, 2) = \beta_1\beta_2$$

i jedna antisimetrična:

$$\chi_{00}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \qquad \text{koja odgovara singletnom stanju (antiparalelni spinovi).}$$

Nas interesuju svojstvene vrednosti operatora $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ u svim gore navedenim stanjima gde $\vec{\sigma}_1$ deluje na jednu a $\vec{\sigma}_2$ na drugu česticu sistema. Najlakše ćemo ih direktnom primenom operatora $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \sigma_{x1}\sigma_{x2} + \sigma_{y1}\sigma_{y2} + \sigma_{z1}\sigma_{z2}$ na gornje spinske funkcije uz pomoć već definisanih delovanja pojedinih operatora. U singletnom stanju biće:

$$\sigma_{x1}\sigma_{x2}\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) = -\chi_{00}$$

$$\sigma_{y1}\sigma_{y2}\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}[i\beta_1(-i\alpha_2) - i\beta_2(-i\alpha_1)] = -\chi_{00}$$

$$\sigma_{z1}\sigma_{z2}\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = -\chi_{00}$$

i konačno

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,\chi_{00} = -3\,\chi_{00}.$$

Slično, u tripletnim stanjima biće:

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,\chi_{11} = \chi_{11}$$

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,\chi_{10} = \chi_{10}$$

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\,\chi_{1-1} = \chi_{1-1}.$$

Ovaj smo način ovde prosledili vežbe radi a rezultat smo mogli dobiti i mnogo brže koristeći vektorski model. Klasično:

$$S^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

odakle:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{S^2 - (s_1^2 + s_2^2)}{2}.$$

Prelazeći na rezultat kvantne mehanike:

$$\left(\frac{1}{2}\vec{\sigma}_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{\sigma}_2\right) = \frac{S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)}{2}$$

tj.:

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 2\,[S(S+1) - 2s(s+1)]$$

U tripletnom stanju $S=1$ i $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 1$

U singletnom stanju $S=0$ i $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = -3$.

Tako konačno za potencijale tripletne i singletne interakcije imamo:

$$V_c^{\text{triplet}} = V_r(r) + V_s(r)$$

i

$$V_c^{\text{singlet}} = V_r(r) - 3\,V_s(r)$$

Očigledno je da opšti karakter ovih potencijala odgovara realnom tripletnom i singletnom potencijalu sa slike A.15 i da se pogodnim izborom $V_r(r)$ i $V_s(r)$ mogu ovi tačno i dobiti. Singletna interakcija nije dakle dovoljno jaka (jama nije dovoljno duboka) da omogući postojanje vezanog dvonukleonskog stanja.

RA16 Spinovi dveju čestica, od kojih svaka ima spin 1/2, mogu da budu $S=0$ (singletno stanje) i $S=1$ (tripletno stanje). Za singletno stanje $J=L$, a za tripletno $J=L-1$, L, $L+1$. Vidimo da za fiksirano J postoje četiri različita (energetska) stanja sistema (jedno singletno i tri tripletna). Izuzetak je slučaj kada je $J=0$. Tada postoje samo dva stanja $S=J=L=0$ i $L=1$ $S=L$.

Spektroskopske oznake stanja za tri najniže vrednosti J su:

$$J=0 \qquad {}^1S_0,\ {}^3P_0$$

$$J=1 \qquad {}^3S_1,\ {}^1P_1,\ {}^3P_1,\ {}^3D_1$$

$$J=2 \qquad {}^3P_2,\ {}^3F_2,\ {}^3D_2,\ {}^1D_2$$

RA17 Ukupni operator spina dva nukleona je:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}_1+\frac{1}{2}\vec{\sigma}_2.$$

Kako je $\vec{\sigma}_1^2=\vec{\sigma}_2^2=3$, množenjem $\vec{S}$ sa $\vec{S}$ dobićemo:

$$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2=2S^2-3.$$

Polazeći od izraza $(\vec{S}\cdot\vec{r})^2$ vidimo:

$$(\vec{S}\cdot\vec{r})^2=\frac{1}{4}[(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})^2+(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})^2+2(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})]$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})^2=(\sigma_x x+\sigma_y y+\sigma_z z)(\sigma_x x+\sigma_y y+\sigma_z z)$$

$$=(\sigma_x x)(\sigma_x x)+(\sigma_x x)(\sigma_y y)+(\sigma_x x)(\sigma_z z)$$

$$+(\sigma_y y)(\sigma_x x)+(\sigma_y y)(\sigma_y y)+(\sigma_y y)(\sigma_z z)$$

$$+(\sigma_z z)(\sigma_x x)+(\sigma_z z)(\sigma_y y)+(\sigma_z z)(\sigma_z z).$$

Kako σ_x komutira sa x, y, z

imaćemo $(\sigma_x x)(\sigma_x x)=(\sigma_x\sigma_x)(x^2)=\sigma_x^2 x^2=x^2$ itd.,

dakle:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})^2=r^2+xy[\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x]+xz[\sigma_x\sigma_z+\sigma_z\sigma_x]+yz[\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_y].$$

Međutim, kako su antikomutatori projekcija spinskih koordinata jednaki nuli:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})^2=r^2.$$

Dakle:

$$(\vec{S}\cdot\vec{r})^2=\frac{1}{2}[r^2+(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})]$$

Prema tome operator S_{12} dobija oblik:

$$S_{12}=2\left[3\frac{(\vec{S}\cdot\vec{r})^2}{r^2}-S^2\right].$$

Da bismo pokazali da operator S_{12} zavisi samo od uglova ϑ i φ, posmatraćemo samo prvi član operatora pošto drugi (S^2) nije funkcija vektora $\vec{r}$. Pređimo na tzv. sferne vektore definisane trojkom brojeva (A_0, A_+, A_-) gde je:

$$A_+=-\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x-iA_y)$$

$$A_-=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x+iA_y)$$

$$A_0=A_z$$

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$ možemo da opišemo preko sfernih komponenti u obliku

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_0B_0-A_-B_+-A_+B_-.$$

Dakle:

$$\frac{\vec{S}\cdot\vec{r}}{r}=\frac{S_0Z}{r}-S_+\frac{(x+iy)}{\sqrt{2}r}+S_-\frac{(x-iy)}{\sqrt{2}r}.$$

Međutim, kako je

$$\frac{z}{r}=\cos\vartheta;\qquad \frac{x}{r}=\sin\vartheta\cos\varphi;\qquad \frac{y}{r}=\sin\vartheta\sin\varphi$$

vidimo da je:

$$\left(\frac{\vec{S}\cdot\vec{r}}{r}\right)^2=f(\sin\vartheta,\ \sin\varphi)$$

što je trebalo i dokazati!

RA18 Iz definicije operatora P_M^{12} sledi da dvostruka primena operatora ne menja funkciju pa da prema tome spada u klasu idempotentnih operatora. Svojstvena vrednost operatora $(P_M^{12})^2$ je, dakle, jednaka jedinici a samog operatora P_M^{12} je ±1. Kako ovaj operator zamenjuje $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ to znači da praktično menja znak komponenti radijus vektora $\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ koji spaja čestice (vrši refleksiju

sistema). Pošto se parnost u jakim interakcijama održava i, imajući u vidu da je parnost talasne funkcije čestice u centralno simetričnom polju definisana kao:

$$\psi(-\vec{r}_{12}, s_1, s_2) = (-1)^l \psi(\vec{r}_{12}, s_1, s_2)$$

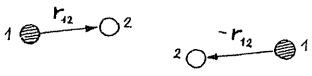
(ponašanje funkcije u odnosu na refleksiju prostornih koordinata), upoređenjem sa definicijom operatora P_M^{12} vidimo da je njegova svojstvena vrednost jednaka $(-1)^l$, tj. da je:

$$P_M^{12}\psi(\vec{r}_{12}, s_1, s_2) = \psi(-\vec{r}_{12}, s_1, s_2) = (-1)^l \psi(\vec{r}_{12}, s_1, s_2).$$

Schrödingerova jednačina sada glasi:

$$\left(\frac{\hbar^2}{m}\nabla^2 + E\right)\psi(\vec{r}_{12}, s_1, s_2) = (-1)^l V(r)\psi(\vec{r}_{12}, s_1, s_2)$$

i vidimo da se, u stanjima u kojima je l parno (S, D, G itd) Majoranine sile svode na Wignerove, tj. da u ovim stanjima nukleoni ne interaguju silama izmene već običnim centralnim silama. Alternativno nukleoni interaguju običnim potencijalom $V(r)$ koji u zavisnosti od parnosti l može biti pozitivan ili negativan, tj. privlačan ili odbojan (odnosno u zavisnosti od toga da li je prostorni deo talasne funkcije simetričan odnosno antisimetričan u odnosu na zamenu $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, tj. refleksiju vektora $\vec{r}_{12}$ (videti sliku).



RA18

Sada nam je jasno da se saturacija ne javlja u jezgrima do ^4He (koje je saturisano) jer prostorni deo može biti simetričan za sve četiri čestice bez narušenja Paulijevog principa na račun antisimetrije spinsko-izospinskog dela (dva protona i dva neutrona sa antiparalelnim spinovima). Pošto su tako sve čestice u s stanju ($l=0$) to su sile među njima Wignerove, tj. privlačne. Dodamo li, međutim, peti nukleon (bilo neutron bilo proton; ^5He ili ^5Li respektivno) ovaj se mora smestiti u p stanje ($l=1$) pa će shodno gornjem rezultatu sa ma kojom drugom česticom interagovati odbojnim Majoraninim silama. Sistem će tako biti nestabilan što potvrđuje i veoma kratak poluživot ovih jezgara.

Pošto Paulijev princip garantuje da se u težim jezgrima nukleoni nalaze smešteni po stanjima različitog l to će se izvestan broj nukleona uzajamno privlačiti dok će drugi interagovati odbojnim silama. Tako se postiže ravnotežno stanje koje i rezultuje u stvarnim dimenzijama jezgara. Ovakve sile izmene, dakle, sprečavaju kolabiranje jezgara (opet vidimo veliku ulogu Paulijevog principa koji se ovde može uslovno shvatiti kao kvantno-mehanička varijanta klasičnog stava da se »dva tela ne mogu istovremeno naći na istom mestu«).

RA19 U centralno-simetričnom potencijalu talasna se funkcija separiše na radijalni i ugaoni deo

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\, Y(\vartheta, \varphi)$$

(radimo u prirodnim, sfernim koordinatama). Pošto znamo da je osnovno stanje deuterona S-stanje ($l=0$) koje je sferno simetrično to nas ugaoni deo talasne funkcije (ovde konstantan) neće interesovati. Radijalna Schrödingerova jednačina, bez centrifugalnog potencijala, ima oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] + V(r)R = ER$$

ili:

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{m}{\hbar^2}[E-V](rR) = 0$$

što nam sugerira smenu $u(r) = rR(r)$.
Jednačina za $u(r)$ je sada:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}(E-V)u = 0 \quad \text{i uz} \quad R^2 = \frac{m}{\hbar^2}(E-V),$$

sa opštim rešenjem oblika $u(r) = ce^{\pm ikr}$. No, potražimo rešenja po oblastima konstantnog potencijala.

U oblasti I ($r<r_0$) je $V=-V_0$ i $E=-B$ pa imamo:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}(V_0 - B)u \equiv \frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = 0.$$

U oblasti II ($r>r_0$) je $V=0$ i $E=-B$ pa je:

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2}Bu \equiv \frac{d^2u}{dr^2} - \alpha^2 u = 0$$

gde smo uveli oznake:

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{m(V_0 - B)} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar}\sqrt{mB}.$$

Uz granične uslove da rešenja moraju biti konačna u nuli i beskonačnosti iz opšteg rešenja dobijamo rešenja:

$$u_I(r) = C_1 \sin kr \quad \text{i} \quad u_{II}(r) = C_2 e^{-\alpha r}.$$

Konstante normiranja C_1 i C_2 možemo naći iz uslova da rešenje mora biti glatka funkcija (neprekidna i funkcija i prvi izvod), (tj. iz jednakosti logaritamskih izvoda u tački $r=r_0$):

$$C_1 \sin kr_0 = C_2 e^{-\alpha r_0} \qquad (*)$$

$$C_1 k \cos kr_0 = -C_2 \alpha e^{-\alpha r_0} \qquad (**)$$

i iz uslova normiranja:

$$4\pi\int_0^\infty |R|^2 r^2\, dr = 4\pi\int_0^\infty u^2\, dr = 1$$

odakle je:

$$\frac{C_1^2}{2k}(2kr_0 - \sin 2kr_0) + \frac{C_2^2}{\alpha} e^{-2\alpha r_0} = \frac{1}{2\pi}.$$

Odavde možemo naći C_1 i C_2. Nas, međutim, interesuje veza između V_0 i r_0. Deljenjem jednačine (*) sa jednačinom (**) odmah dobijamo traženu vezu:

$$\operatorname{ctg} kr_0 = -\frac{\alpha}{k} = -\sqrt{\frac{B}{V_0 - B}} \simeq -\sqrt{\frac{B}{V_0}}$$

jer je energija veze B znatno manja od dubine jame V_0. Vidimo da je ctg (kr_0) jednak malom negativnom broju tj. da je kr_0 malo veće od $\pi/2$ (ne od $3\pi/2$ jer bi tada talasna funkcija imala nulu (čvor) što za osnovno stanje nije dozvoljeno!). Tako je:

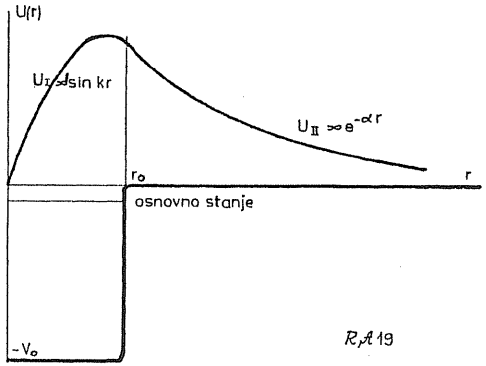
$$kr_0 \simeq \pi/2 \quad \text{tj.} \quad r_0\sqrt{m(V_0 - B)} \simeq \frac{\pi\hbar}{2}$$

i ako još jednom zanemarimo B u odnosu na V_0 konačno imamo:

$$V_0 r_0^2 \simeq \frac{\pi^2\hbar^2}{4m} = \text{const.}$$

Vidimo da mogućnost formiranja stabilnog p—n sistema ne zavisi odvojeno od V_0 i/ili r_0 već od proizvoda $V_0 r_0^2$ koji je konstantan! Ako uzmemo $r_0 \simeq$ radijus dejstva nuklearnih sila $\simeq 2$ fm biće:

$$V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{4mr_0^2} \simeq 50 \text{ MeV}.$$



R,A 19

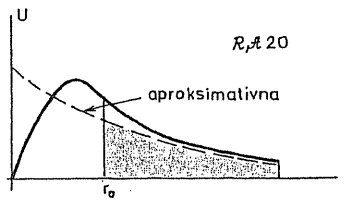
Jama je, dakle, »uska i duboka«, osnovno stanje je veoma visoko (plitko) i jasno je što nema pobuđenih stanja.

Nacrtajmo tok nađene talasne funkcije $u(r)$. Uz gornje vrednosti parametara r_0 i V_0 biće:

$$kr_0 = \frac{r_0}{\hbar}\sqrt{m(V_0 - B)} \simeq \frac{2}{3}\pi > \frac{\pi}{2}$$

Znači da u_I ima maksimum malo levo od tačke $r = r_0$ (deo sinusoide) i da se u u_{II} (eksponencijalni pad) nastavlja u tački $r = r_0$. Tok funkcije je, dakle, kao na slici napred.

RA20 Data aproksimativna radijalna talasna funkcija deuterona u poređenju sa u prošlom zadatku nađenom izgleda kao na slici. Prvo moramo da je normiramo:



$$\int |\psi|^2 d\tau = \int_0^\infty u^2 \frac{1}{r^2} r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$4\pi C^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha r} dr = 1$$

odakle je

$$u(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\, e^{-\alpha r}.$$

Verovatnoća da se čestica nađe na rastojanju između r i $r + dr$ je $4\pi u^2 dr$ pa je tražena verovatnoća da se čestice u deuteronu nađu na rastojanju većem od dometa potencijala r_0 (van dejstva nuklearnih sila) jednaka:

$$4\pi \int_{r_0}^\infty \left\{\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\, e^{-\alpha r}\right\}^2 dr = e^{-2\alpha r_0} \cong 40\%. \qquad \text{(Zad. A.19)}$$

Vidimo, dakle, da se u deuteronu nukleoni, u srednjem, oko 40% vremena nalaze van dometa nuklearnih sila (rezultat jako male vezivne energije) tj. da nuklearna interakcija nije u potpunosti iskorišćena. U jezgru ^4He, na primer, ima 6 parnih veza među nukleonima; potencijalna energija sistema šest puta je veća a broj nukleona samo dva puta. Energija privlačenja postaje dovoljna da dovede nukleone na takva rastojanja na kojima će se nuklearna interakcija u potpunosti iskoristiti. U ovoj jednostavnoj slici, dakle, broj parnih veza od kojih svaka doprinosi energiji veze oko 1,1 MeV po nukleonu, možemo smatrati odgovornim za rezultujuću energiju veze po nukleonu (u težim jezgrima javljaju se efekti saturacije nuklearnih sila i ovaj se rezon ne može primeniti, zadatak A.18). Imaćemo dakle, u poređenju sa vrednostima iz tabele:

$(B/A)_{^3H} = 1{,}11 \times \textit{broj parnih veza} \simeq 3{,}3$ MeV (~2,8 iz tabele)

$(B/A)_{^4He} = 1{,}11 \times 6 \simeq 6{,}7$ (~7,1 iz tabele).

(Ovakva argumentacija potiče od Wignera).

RA21 Pošto deuteron ima samo dva nukleona operator magnetnog momenta glasi:

$$\hat{\mu}_z = g_{lp}\,\hat{l}_{pz} + g_{sp}\,\hat{s}_{pz} + g_{sn}\,\hat{s}_{nz}.$$

Međutim, kako je u šemi LS sprezanja, koja važi za mali broj nukleona

$$\vec{L} = \vec{l}_p + \vec{l}_n; \qquad \vec{S} = \vec{s}_p + \vec{s}_n$$

gde operatori $\vec{L}$ i $\vec{S}$ označavaju orbitalni moment impulsa i spin (u užem smislu) deuterona, sleduje:

$$\hat{L}_z = \hat{l}_{pz} + \hat{l}_{nz}; \quad \hat{S}_z = \hat{s}_{pz} + \hat{s}_{nz}.$$

Ako pređemo u sistem centra masa ($\vec{l}_p = \vec{l}_n$):

$$\hat{l}_{pz} = \hat{l}_{nz} = \frac{1}{2}\hat{L}_z,$$

tako da operator magnetnog momenta postaje

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{2}\hat{L}_z + \frac{1}{2}(g_{sn} + g_{sp})\,\hat{S}_z + \frac{1}{2}(g_{sn} - g_{sp})(\hat{s}_{pz} - \hat{s}_{nz}).$$

Poslednji član ovog operatora za tripletna stanja (u kojima se nalazi deuteron) jednak je nuli, pošto za $S=1$ spinovi protona i neutrona moraju da budu paralelni.

Ako pređemo na operator $\hat{J}_z$ ($\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$) dobićemo:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{2}(g_{sp} + g_{sn})\,\hat{J}_z + \frac{1}{2}(1 - g_{sp} - g_{sn})\,\hat{L}_z.$$

Ako sada iskoristimo operatorski identitet

$$\hat{L}_z = \frac{\vec{L}\cdot\vec{J}}{\hat{J}^2}\,\hat{J}_z = \frac{1}{2}\,\frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2}{\hat{J}^2}\,\hat{J}_z$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{J(J+1)}\,\hat{J}_z$$

konačan izraz za operator magnetnog momenta deuterona glasi:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{2}\,J_z\left\{g_{sp} + g_{sn} + (1 - g_{sp} - g_{sn})\,\frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)}\right\}.$$

Pošto je deuteron u stanju $^3S_1$ sa malom primesom stanja $^3D_1$ njegovu talasnu funkciju možemo da pišemo u obliku:

$$|\,\psi^D_{11}\,\rangle = |\,^3S_1\rangle + a\,|\,^3D_1\rangle$$

gde je a amplituda primese.

Magnetni moment deuterona μ_D jednak je dakle:

$$\mu_D = \langle \psi^D_{11} \,|\, \hat{\mu}_z \,|\, \psi^D_{11}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[g_{sp} + g_{sn} + (1 - g_{sp} - g_{sn})\,\frac{1\times 2 - 0\times 1 - 1\times 2}{2\times 1\times 2}\right]\langle {}^3S_1 |\, \hat{J}_z \,|\, {}^3S_1\rangle\right.$$

$$\left. + a^2\left[g_{sp} + g_{sn} + (1 - g_{sp} - g_{sn})\,\frac{1\times 2 - 2\times 3 - 1\times 2}{2\times 1\times 2}\right]\langle {}^3D_1 |\, \hat{J}_z \,|\, {}^3D_1\rangle\right\}.$$

U izvođenju ovog izraza mešovite članove tipa $\langle\, {}^3S_1 \,|\, \hat{J}_z \,|\, {}^3D_1\,\rangle$ nismo uzeli u obzir pošto su oni jednaki nuli zbog ortogonalnosti orbitalnog dela talasnih funkcija stanja $^3S_1$ i $^3D_1$.

Kako je

$$\langle\, {}^3S_1 \,|\, \hat{J}_z \,|\, {}^3S_1\rangle = \langle\, {}^3D_1 \,|\, \hat{J}_z \,|\, {}^3D_1\,\rangle = 1$$

sledi da je:

$$\mu_D = \frac{1}{2}\left\{g_{sp} + g_{sn} + a^2\left[g_{sp} + g_{sn} + (1 - g_{sp} - g_{sn})\,\frac{3}{2}\right]\right\}.$$

Odnosno primesa stanja $^3D_1$; $|\,a^2\,|$, jednaka je:

$$|\,a^2\,| = \left|\frac{2\,\mu_D - (g_{sp} + g_{sn})}{g_{sp} + g_{sn} + \frac{3}{2}(1 - g_{sp} - g_{sn})}\right| = +0{,}07$$

tj. primesa stanja $^3D_1$ iznosi oko 7%.

RA22 Energija hiperfine interakcije je, dakle:

$$\langle U\rangle = \text{const}\,\mu_J\,\frac{\vec{I}\cdot\vec{J}}{IJ}$$

Totalni moment impulsa atoma $\vec{F}$ može da ima vrednosti

$$F = I+J,\ I+J-1,\ \ldots,\ |\,I-J\,|$$

tj. njih ukupno M, gde je

$$M \text{ broj manji od} \begin{cases} 2I+1 \\ 2J+1 \end{cases}$$

Pošto je $\vec{I}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}(F^2 - I^2 - J^2)$ biće:

$$\langle U\rangle = \text{const}\,\mu_J\,\frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)J(J+1)}}$$

što daje veličinu cepanja odgovarajućih termova.

U datom je slučaju, dakle, $M=8$ a $J=9/2$. Ako bi bilo $J<I$ onda bi se term pocepao na $M=2J+1=10$ komponenti pa zaključujemo da to nije slučaj. Dakle $I<J$ pa je $M=2I+1=8$, tj. $I=7/2$.

RA23 Energija hiperfine interakcije je (videti prethodni zadatak):

$$\langle U\rangle = \text{const}\,\mu_J \frac{F(F+1)-I(I+1)-J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)J(J+1)}}.$$

Sve hiperfine komponente jednog terma odgovaraju istim vrednostima I i J pa ova energija zavisi samo od vrednosti F i za dve sukcesivne vrednosti (F i $F-1$) razlika ovih energija (interval među hiperfinim komponentama) je:

$$\Delta U_{F,F-1} = \text{const}\,\frac{F(F+1)-a}{b} - \text{const}\,\frac{(F-1)[(F-1)+1]-a}{b}$$

$$= \text{const}\,\mu_J \frac{F}{\sqrt{I(I+1)J(J+1)}} = KF.$$

Sledi da se intervali među susednim hiperfinim komponentama odnose kao:

$$F : F-1 : F-2 : \ldots = J+I : J+I-1 : J+I-2 : \ldots$$

i, u našem slučaju:

$$6 : 5 : 4 = F : F-1 : F-2 = J+I : J+I-1 : J+I-2.$$

Kako je $J=3/2$ biće:

$$6\,(1/2+I) = 5\,(3/2+I) \quad \text{i} \quad 5\,(I-1/2) = 4\,(1/2+I)$$

Odakle je:

$$I=9/2.$$

Term $^2S_{1/2}$ biće rascepan na $M=2J+1=2$ komponente ($J<I$) sa $F=10/2$, $8/2=5$, 4 a term $^2D_{3/2}$ na $M=2J+1=4$ komponente (opet $J<I$) sa $F=12/2$, $10/2$, $8/2$, $6/2=6$, 5, 4, 3. Izborno pravilo $\Delta F=0,\pm1$ dozvoljava prelaze:

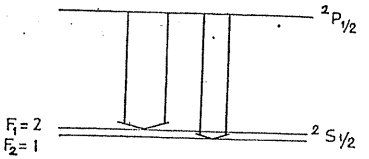
$$5-6,\ 5-5,\ 5-4,\ 4-5,\ 4-4,\ 4-3.$$

Linija $^2S_{1/2}-{}^2D_{3/2}$ cepa se, dakle, na 6 komponenti.

RA24 Pošto se cepa term $^2S_{1/2}$ za koji je $J=1/2$ to F može biti:

$$F_1 = I+1/2 \qquad \text{i} \qquad F_2 = I-1/2.$$

No, kako se u magnetnom polju term cepa na $2F+1$ komponentu i kako je intenzitet spektralne linije proporcionalan ovom broju komponenti (svaka komponenta ima istu statističku težinu) to će i odnos intenzitet linija biti jednak:



R.sl.24

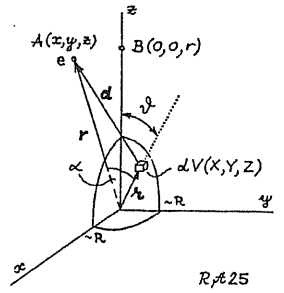
$$\frac{2F_1+1}{2F_2+1} = \frac{I+1}{I} = \frac{10}{6} = 1{,}67.$$

Odatle sledi da je:

$$I=3/2.$$

RA25 Potencijalna energija interakcije elementarne zapremine dV i naelektrisanja e je:

$$dU = \frac{ed\,q}{d} = \frac{e\,\rho\,dV}{d}.$$



R.sl.25

Kako je (sa slike):

$$d^2 = r^2 + u^2 - 2\,r\,u\cos\alpha$$

biće:

$$\frac{1}{d} = (r^2+u^2-2\,r\,u\cos\alpha)^{-1/2}$$

$$= r^{-1}\left\{1+\left[\left(\frac{u}{r}\right)^2 - 2\frac{u}{r}\cos\alpha\right]\right\}^{-1/2}.$$

Kako je $r \gg u$ to je član u vitičastoj zagradi oblika $(1+a)$ sa $a \ll 1$ pa se možemo zadržati (obično) na samo nekoliko prvih članova razvoja:

$$(1+a)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}a + \frac{3}{8}a^2 - \cdots$$

Dalje će, dakle, biti:

$$\frac{1}{d} = r^{-1}\left\{1+\frac{u}{r}\cos\alpha + \left(\frac{u}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right\},$$

Odakle je:

$$dU = \frac{e\,\rho\,dV}{r}\left\{1+\frac{u}{r}\cos\alpha + \left(\frac{u}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right\}$$

i konačno:

$$U = \int dU = \frac{\mathcal{Z}e^2}{r} + \frac{e}{r^2}\int \rho\,u\cos\alpha\,dV + \frac{e}{2r^3}\int \rho\,u^2\,(3\cos^2\alpha - 1)\,dV + \cdots$$

što predstavlja traženu energiju interakcije u obliku, u principu beskonačnog, a u praksi uvek konačnog, reda, koji brzo konvergira vrednosti totalne energije interakcije.

Potencijal polja u tački $B\,(0, 0, r)$ nalazimo odmah (ugao α postaje polarni ugao ϑ):

$$\varphi = \frac{U}{e} = \frac{\mathcal{Z}e}{r} + \frac{1}{r^2}\int \rho\,r\cos\vartheta\,dV + \frac{1}{2r^3}\int \rho\,u^2\,(3\cos^2\alpha - 1)\,dV + \cdots$$

Ovde lako prepoznajemo Legendreove polinome:

$$P_0(\cos\vartheta) = 1$$

$$P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta = \frac{Z}{u}$$

$$P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1) = \frac{1}{2}\left(3\frac{Z^2}{u^2} - 1\right)$$

pa potencijal možemo pisati u obliku:

$$\varphi = \frac{\mathcal{Z}e}{r} + \frac{1}{r^2}\int \rho\, u\, P_1(\cos\vartheta)\, dV + \frac{1}{r^3}\int \rho\, u^2\, P_2(\cos\vartheta)\, dV + \cdots$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\int \rho \left(\frac{u}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta)\, dV.$$

Nalazimo, dakle, poznati multipolni razvoj u kome član koji sadrži $P_n(\cos\vartheta)$ odgovara multipolnom momentu sistema naelektrisanja reda 2^n. Shodno tome ovo često pišemo kao:

$$\varphi = \frac{\mathcal{Z}e}{r} + D\frac{1}{r^2} + Q_0\frac{1}{2r^3} + \cdots$$

gde je:

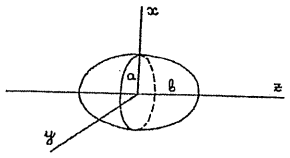
$$\mathcal{Z}e = \int \rho\, dV = \text{naelektrisanje jezgra}$$
$$= \text{„monopolni“ moment}$$

$$D \equiv \int \rho\, Z\, dV = \text{dipolni moment}$$

$$Q_0 \equiv \int \rho\,(3Z^2 - u^2)\, dV = \text{kvadrupolni moment, itd.}$$

(Ko u izrazu za $1/d$ prepoznaje funkciju generatrisu Legendreovih polinoma ovo dobija tako reći trenutno).

RA26 Po definiciji je (videti prethodni zadatak):



$$Q_0 = \int \rho\,(3z^2 - r^2)\, dV.$$

Uz:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ovo postaje:

RA26

$$Q_0 = \int \rho\,(2z^2 - y^2 - x^2)\, dx dy dz$$

$$= \rho\left\{4\int_0^b z^2 \int\int dx dy dz - 2\int_0^a y^2 \int\int dx dz dy - 2\int_0^a x^2 \int\int dy dz dx\right\}$$

$$= 4\rho\left\{\int_0^b z^2 \underbrace{\int\int dx\, dy}_{I}\, dz - \int_0^a x^2 \underbrace{\int\int dy dz}_{J}\, dx.\right.$$

Integral označen sa I jednak je površini preseka elipsoida sa x—y ravni (krug) a integral označen sa J jednak je površini preseka sa y—z ravni (elipsa). Iz jednačine elipsoida:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

sledi:

$$\frac{y^2}{a^2-x^2} + \frac{z^2}{(a^2-x^2)\frac{b^2}{a^2}} \equiv \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1$$

tj.:

$$J = P_{\text{elipse}} = AB\,\pi = (a^2 - x^2)\frac{b}{a}\,\pi$$

i

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2) \equiv R^2$$

tj.:

$$I = P_{\text{kruga}} = R^2\pi = \pi\frac{a^2}{b^2}(b^2 - z^2).$$

Tako je dalje:

$$Q_0 = 4\rho\left\{\frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b z^2(b^2 - z^2)\, dz - \frac{\pi b}{a}\int_0^a (a^2 - x^2)\, x^2\, dx\right\} = \frac{8}{15}\rho\pi\,(a^2 b^3 - b a^4).$$

Pošto je:

$$\rho = q/V = Ze/V$$

a

$$V = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

to je konačno:

$$Q_0 = \frac{2}{5}Ze\,(b^2 - a^2) \qquad (e \cdot barn).$$

Kvadrupolni je moment, dakle, pozitivan za izduženi (oblika cigare) elipsoid, negativan za spljošteni (oblika palačinke), i jednak nuli za sferno jezgro.

RA27 U jedinicama $e=1$ biće:

$$Q_0 = \frac{2}{5}Z\,(b^2 - a^2).$$

Zbog skoro sfernog oblika (po pretpostavci) možemo pisati:

$$b = a\,(1+\varepsilon) \qquad \text{sa} \qquad \varepsilon \ll 1$$

pa zanemarujući članove sa ε^2 dobijamo:

$$Q_0 \simeq \frac{4}{5}Za^2\varepsilon.$$

Uz

$$a^2 \simeq R_{Lu}^2 = [1{,}2 \times A^{1/3} \times 10^{-13}]^2$$

sledi:

$$\varepsilon = \frac{5 Q_0}{4 Z R_{Lu}^2} \simeq 0{,}27$$

tj.:

$$\frac{b}{a} = 1{,}27$$

što spada u najveće nuklearne deformacije. Jezgro lutecijuma nalazi se u sredini oblasti deformisanih jezgara sa $150<A<190$. Postojanje nenultih kvadrupolnih momenata glavna je indikacija njihovog nesfernog oblika.

RA28 Kako oblik kvadrupolnog operatora podseća na sferne harmonike inspekcijom tablica na kraju knjige nalazimo:

$$Q_{20} = 3z^2 - r^2 = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{20}(\vartheta, \varphi).$$

Jednočestična talasna funkcija (data u zadatku) odgovara projekciji spina nukleona $m_j = l + 1/2$, dakle i spinu $j = l + 1/2$.
Očekivana vrednost kvadrupolnog operatora jednaka je:

$$Q = \left\langle jj \left| 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{20}(\vartheta, \varphi) \right| jj \right\rangle = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int R_{nl}^2(r)\, r^4\, dr \int_\Omega Y_{ll}\, Y_{20}\, Y_{ll}\, d\Omega$$

$$= -\frac{2l}{2l+3} \int R_{nl}^2(r)\, r^4\, dr.$$

Ako uvedemo za očekivanu vrednost kvadrata koordinate protona oznaku $\langle r^2 \rangle$ i l zamenimo sa $j - 1/2$ dobijamo:

$$Q = -\frac{2j-1}{2j+2} \langle r^2 \rangle.$$

Da bismo procenili kvadrupolni moment za proton u stanju $d_{3/2}$ uvedimo procenu

$$\langle r^2 \rangle \sim R^2.$$

Dakle

$$Q(d_{5/2}) = -\frac{4}{7} R^2 = -14{,}3 \text{ fermi}^2 = -0{,}143 \ \textit{barn}.$$

RA29 Rešimo izraz za gustinu naelektrisanja po koordinati r:

$$r = a \ln\left\{\frac{\rho_0}{\rho(r)} - 1\right\} + R.$$

Koristeći definiciju površinske debljine t dobijamo:

$$t = r_{10\%} - r_{90\%} = 2a \ln 9 = 2{,}37 \ \textit{fermi}.$$

Vidimo da je površinska debljina nezavisna od radijusa jezgra.

RA30 Sa slike se vidi da gustinu nukleona možemo da predstavimo funkcijom sledećeg oblika:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & 0<r<R-S \\ -\dfrac{\rho_0}{2S} r + \dfrac{\rho_0}{2S}(R+S) & R-S<r<R+S \end{cases}$$

Parametar gustine ρ_0 moguće je odrediti iz uslova normiranja gustine na ukupan broj nukleona

$$\int \rho(r)\, d^3r = A \quad \text{tj.} \quad 4\pi \int_0^{R+S} \rho(r)\, r^2\, dr = A$$

odnosno:

$$\rho_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{\int_0^{R-S} r^2\, dr + \int_{R-S}^{R+S} \left[-\dfrac{r}{2S} + \dfrac{R+S}{2S}\right] r^2\, dr}$$

tj.:

$$\rho_0 = \frac{3A}{4\pi R^3 \left(1 + \dfrac{S^2}{R^2}\right)}.$$

Pošto je u našem slučaju $R = 1{,}1 \times A^{-1/3}$ fm $= 6{,}6$ fm dobijamo da je:

$$\rho_0 = 0{,}18 \text{ fermi}^{-3}$$

Prema tome broj nukleona u oblasti $R-S<r<R+S$ jednak je:

$$N = \int_{R-S}^{R+S} \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi\rho_0}{2S} \int_{R-S}^{R+S} [(R+S) - r]\, r^2\, dr$$

$$= \frac{\pi\rho_0 (R+S)^3}{6S} \left[R + S - \left(\frac{R-S}{R+S}\right)^3 (R + 7S)\right] = 109.$$

Na prvi pogled broj nukleona blizu nuklearne površine izgleda nam neočekivano velik. Stvar je u tome što na osnovu slike gradimo intuitivnu predstavu, ali sa funkcijom r^1 umesto da to činimo sa funkcijom r^3.

RA31 Broj stanja sa impulsom manjim od p_F (u zapremini impulsnog prostora $\left(\frac{4}{3}\pi p_F^3\right)$ nukleona ograničenog u zapremini Ω jednak je:

$$n = 4\, \frac{4\pi p_F^3 \Omega}{3(2\pi\hbar)^3}$$

gde je $(2\pi\hbar)^3$ zapremina elementarne ćelije faznog prostora (zadatak G.8), a faktor 4 (spinsko-izospinski faktor) dolazi usled toga što u svako dato stanje mogu da stanu 4 nukleona, dva protona i dva neutrona sa antiparalelnim spinovima. Takvo jezgro

ima, dakle, $A/4$ protona sa spinom $\uparrow$, $A/4$ sa spinom $\downarrow$, $A/4$ neutrona sa spinom $\uparrow$ i $A/4$ sa spinom $\downarrow$. Ukupan broj popunjenih stanja jednak je broju nukleona, tj.:

$$A = n = \frac{16\pi p_F^3 \Omega}{3(2\pi\hbar)^3}$$

Odavde nalazimo gustinu jezgra:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} = \frac{16\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}$$

Eksperimentalno su sve nuklearne gustine približno jednake (što verificira gornji rezultat) pa je razumno pretpostaviti da je i p_F jednako za sva jezgra (rezultat ne zavisi od A). Ova vrednost određuje granicu između popunjenih i nepopunjenih stanja u jami, tj. definiše takozvani Fermijev nivo (površinu) kao gornju granicu skupa popunjenih stanja koga zovemo »Fermijevim morem«. Ako je

$$R = r_0 A^{1/3} \quad \text{sa} \quad r_0 = 1{,}2 \times 10^{-13}\,\text{cm}$$

biće:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = \frac{16\pi}{3(2\pi\hbar)^3} p_F^3$$

tj.:

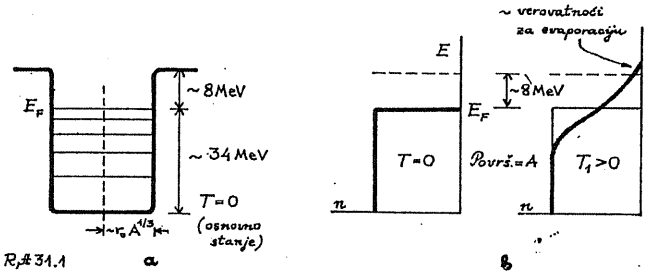
$$p_F = \sqrt[3]{9\pi}\,\frac{\hbar}{2r_0} \simeq 1{,}25 \times 10^{-14}\,\text{CGS}.$$

Nađimo sada kinetičku energiju ovog nukleona na površini Fermijevog mora koja će takođe biti približno jednaka za sva jezgra:

$$E_F = \frac{P_F^2}{2m} \simeq 34\,\text{MeV}.$$

Taj je nukleon vezan u jezgru slabije od svih ostalih. Eksperimentalno, energija veze po nukleonu iznosi oko 8 MeV za sva jezgra. Znači da je jama duboka ukupno oko 42 MeV. To je vrednost koja sasvim odgovara i modelu ljusaka (glava I).

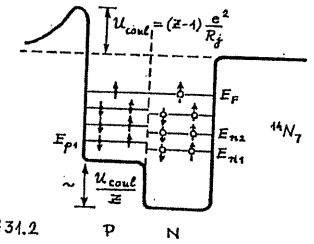
Potencijalna jama, dakle, ima oblik prikazan na slici (*a*). Na slici (*b*) prikazan je raspored nukleona po stanjima (popunjenost stanja) za $T=0$ i za $T_1>0$. Što je veća ekscitaciona energija, tj. viša temperatura, verovatnoća za evaporaciju nukleona raste.



R,A 31.1 a b

Ovde smo posmatrali samo nuklearni potencijal zanemarujući Coulombovu interakciju među protonima. Ova energija odbijanja, jasno, smanjuje energiju veze protona (jama je za njih plića a stanja viša) i stvara Coulombovu barijeru pri pokušaju napuštanja jezgra. Rezultujući potencijal za protone i neutrone odvojeno, u slučaju, na primer, jezgra $^{14}_{7}N$, kao i popunjenost čestičnih stanja u osnovnom stanju jezgra, izgledao bi otprilike ovako:

Odavde možemo da zaključimo da protoni mogu da postoje u jezgru samo zahvaljujući Paulijevom principu; kada ovaj ne bi važio (ili kada bi nukleoni bili bozoni) uvek bi energetski bilo pogodnije da stabilno jezgro bude sastavljeno samo od čvršće vezanih neutrona. Ovako su protoni u stanju E_{p_1} ipak čvršće vezani od neutrona u stanju E_{n2}.



R,A 31.2 p N

RA32 Srednja kinetička energija biće jednaka (u osnovnom stanju):

$$\langle E\rangle = \frac{1}{A}\int_0^{E_F} E\frac{dn}{dE}\,dE = \frac{1}{A}\int_0^{E_F} E\frac{dn}{dp}\frac{dp}{dE}\,dE = \frac{1}{A}\int_0^{p_F} E\frac{du}{dp}\,dp.$$

Iz prethodnog zadatka:

$$\frac{dn}{dp} = \frac{16\pi p^2 \Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

pa je:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{A}\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m}\,\frac{16\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3}\,p^2\,dp = \frac{\Omega}{5Am\pi^2\hbar^3}\,p_F^5$$

Iz prethodnog zadatka opet imamo:

$$\frac{\Omega}{A} = \frac{1}{\rho} = \frac{3\pi^2\hbar^3}{2p_F^3}$$

i konačno

$$\langle E\rangle = \frac{3}{5}\,\frac{p_F^2}{2m} = \frac{3}{5}\,E_F \simeq 20\,\text{MeV}$$

što je prema $M=1$ GeV malo i opravdava u potpunosti nerelativistički tretman.

RA33 Nađimo entropiju jezgra pomoću uobičajene termodinamičke definicije:

$$S_T = \int_0^T \frac{dE^*}{T} = \text{const}\int_0^T (TdA + 2\,AdT) = \text{const}\,AT = \text{const}\sqrt{AE^*}.$$

Entropiju interpretiramo kao logaritam verovatnoće da se ekscitacija realizuje u određenom intervalu energija dE*, tj. kao logaritam broja stanja dozvoljenih u intervalu dE*. Tako, iz statističke definicije entropije imamo:

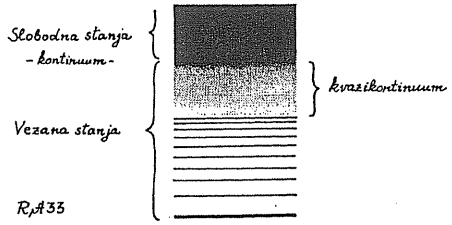
$$S_T = k \ln W(T), \quad S_0 = k \ln W(0) = 0 \qquad \text{tj.}$$

$$\frac{\text{gustina stanja na temperaturi } T}{\text{gustina stanja na temperaturi } 0} \equiv \frac{W(T)}{W(0)} = \frac{e^{S_T/k}}{e^{S_0/k}} = e^{S_T/k}.$$

Rezultat je, dakle, da gustina stanja zavisi od A i E po zakonu:

$$W(T) = \frac{dn_T}{dE^*} \simeq e^{\text{const}\sqrt{AE^*}} \qquad Q\,E\,I.$$

Ovaj je zakon kvalitativno potvrđen, jer gustina stanja raste u težim jezgrima (sa A) kao i sa energijom ekscitacije, tako da je opšti karakter šema pobuđenih stanja jezgra otprilike kao na slici



Statistički gledano, u težim jezgrima, čak su i niska slobodna stanja u izvesnom smislu vezana (sa velikim srednjim životom pa i dobro definisanom energijom) jer nijedna od čestica nema dovoljno energije da napusti jezgro osim ako se sva energija ne koncentriše baš na nju, što je statistički vrlo malo verovatno! Ovo odgovara »sporom isparavanju« i objašnjava pojavu »compound« jezgra. Na visokim ekscitacionim energijama, isparavanje je brzo, jezgro »ključa« (što stvara tipične »zvezde« u nuklearnim emulzijama).

Glava B

Radioaktivnost

B1 Verovatnoću da čestica, jezgro, ili ma koje pobuđeno stanje sistema, koje sigurno postoji u trenutku vremena $t=0$ još postoji neizmenjeno u trenutku vremena t označimo sa ω (videti zadatak F15). Tada je verovatnoća raspada stanja u intervalu vremena t i $t+dt$ jednaka:

$$-d\omega = \lambda\omega\, dt$$

gde je λ konstanta raspada koja ne zavisi od vremena. Posle integracije (uz $\omega(t=0)=1$) dobijamo:

$$\omega \equiv \omega(t) = e^{-\lambda t}$$

(zakon radioaktivnog raspada dobijamo množenjem obe strane sa N_0). Srednje vreme života stanja dobijamo po definiciji kao:

$$\tau = \int_0^\infty t(-d\omega) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ako u uzorku imamo N sistema u pobuđenom stanju (čestica, jezgara) kolika je verovatnoća $\omega_n^N(t)$ da u toku intervala vremena t opserviramo ukupno n produkata raspada (jedan opservabilni produkt po raspadu)? Neka su pri tom zadovoljeni uslovi $n \ll N$ i $\lambda t \ll 1$. Prodiskutovati rezultat. Kvalitativno objasniti da li i kako, možemo na osnovu merenog broja n i poznatih λ i t naći broj ekscitiranih sistema N. Objasniti kako se u ovom kontekstu utvrđuje i proverava zakon radioaktivnog raspada.

B2 Ako je $\omega_n(t)$ verovatnoća da se za vreme t raspadne n čestica iz ansambla koji ih na početku sadrži N i ako je λ konstanta raspada (Poissonova distribucija) tada je srednja vrednost ma koje veličine A koja zavisi od broja čestica n u tom intervalu vremena jednaka:

$$\langle A \rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)\, \omega_n(t).$$

Naći srednji broj čestica $\langle n \rangle_t$ koje će se za vreme t raspasti u gore definisanim uslovima kao i srednju aktivnost (broj raspada u jedinici vremena) koju daje ovakav ansambl.

Statistička odstupanja od srednjih vrednosti broja raspada u datom intervalu vremena mere se disperzijom pripadajuće Poissonove distribucije definisanom kao:

$$D = \langle (n - \langle n \rangle_t)^2 \rangle_t = \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2$$

kao i standardnim odstupanjem (devijacijom):

$$\sigma = \sqrt{D}$$

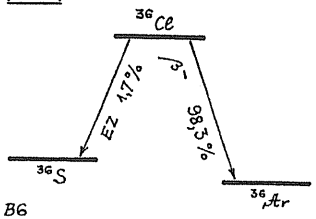
Izraziti obe ove veličine preko parametara Poissonove distribucije.

B3 Pokazati da Poissonova distribucija verovatnoća u slučaju velikih srednjih odbroja prelazi u Gaussovu (normalnu) distribuciju gustine verovatnoće i diskutovati osobine ove distribucije.

B4 Radioaktivni natrijum ^{24}Na raspada se emitujući beta čestice. Period poluraspada ^{24}Na iznosi 14,9 h. Izračunati broj raspadnutih atoma u preparatu datog radioaktivnog izotopa mase 5 mg za: a) 0,01 s i b) 10 h.

B5 Period poluraspada ^{212}Bi iznosi 60,5 minuta. ^{212}Bi raspada se bilo emisijom alfa bilo emisijom beta minus čestica. Produkt raspada ovog elementa sadrži 64% ^{212}Po i 36% ^{208}Tl. Izračunati parcijalne konstante raspada λ_α i λ_β.

B6



B6

Na slici je prikazana šema raspada ^{36}Cl, sa koje se vidi da se ^{36}Cl raspada bilo emisijom beta minus čestica (98,3%) bilo elektronskim zahvatom (1,7%). Period poluraspada ^{36}Cl iznosi

$$T_{1/2}=3{,}08\times10^5 \text{ godina}$$

Izračunati parcijalne konstante raspada λ_β i λ_{EZ}.

B7 Izotop ^{176}Lu emituje beta čestice. Mereći uzorak Lu_2O_3 mase 296 mg, na brojačkom uređaju čija je efikasnost za beta čestice 4,2%, dobijen je odbroj 68 imp/min. Izotopski sastav Lu je: 97,4% ^{175}Lu (stabilan izotop) i 2,6% ^{176}Lu. Izračunati srednji život ovog izotopa u odnosu na beta raspad.

B8 Odnos broja atoma ^{238}U prema broju atoma ^{208}Pb u nekoj uranovoj rudi iznosi 2,785. Odrediti starost rude pretpostavljajući da su atomi olova radiogene prirode. Period poluraspada ^{238}U iznosi $T_{1/2}=4{,}49\times10^9$ godina.

B9 Period poluraspada ^{226}Ra je $T_{1/2}=1{,}602\times10^3$ godina. Kolika je aktivnost izvora koji sadrži 1 g radijuma?

B10 Izotop fosfora ^{32}P je beta minus radioaktivan sa periodom poluraspada $T_{1/2}=14{,}3$ dana. Pomoću uređaja za detekciju elektrona utvrđeno je da preparat radioaktivnog fosfora ^{32}P daje 10^4 beta raspada u sekundi. Izračunati: a) masu ^{32}P u preparatu; b) kolika će biti aktivnost preparata 30 dana posle ovog merenja?

B11 Koliko je puta specifična aktivnost ^{238}U manja od specifične aktivnosti ^{226}Ra? Periodi poluraspada ^{238}U i ^{226}Ra su: $4{,}49\times10^9$ godina i $1{,}602\times10^3$ godina respektivno.

B12 Pacijentu je ubrizgan ^{24}Na aktivnosti $A=2\times10^3$ rasp/sec. Posle 5 h izmerena je aktivnost 1 cm³ krvi i nađeno da ona iznosi 15 rasp/min. Pod kojom pretpostavkom se na osnovu ovih podataka može naći zapremina ukupne krvi? Proceniti kolika je zapremina krvi datog pacijenta? (Period poluraspada ^{24}Na iznosi 14,9 h).

B13 Za jednu primenu radioaktivnog ^{24}Na potrebna je količina od 1 mCi. Koliku količinu ovog izotopa (u g) treba poručiti od proizvođača, ako od trenutka isporuke pa do trenutka primene prođe 2 dana? (Period poluraspada ^{24}Na dat je u zadatku B12).

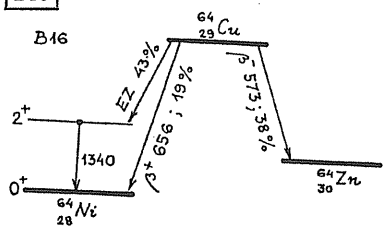
B14 Ugljenik ^{14}C proizvodi se u atmosferi usled bombardovanja kosmičkim zračenjem. Živi organizmi asimilišu radioaktivni ^{14}C zajedno sa neaktivnim i ugrađuju ga u tkiva. U atmosferi postoji stalan odnos ^{14}C i ostalih izotopa ugljenika tako da na svaki gram ugljenika dolazi aktivnost ^{14}C od 10 rasp/min. Smrću organizma asimilacija prestaje pa količina ^{14}C opada sa periodom poluraspada od $5{,}568\times10^3$ godina. Iz uzorka dobijenog iz jednog egipatskog groba dobijena je aktivnost ^{14}C od 7,64 rasp/min po gramu ugljenika. Proceniti starost groba.

B15 Morska voda sadrži 0,55 g kalijuma po litru. U prirodnom kalijumu ima 0,012% ^{40}K, koji je radioaktivan sa periodom poluraspada $T_{1/2}=1{,}2\times10^9$ godina. Izračunati:

a) Kolika je specifična aktivnost morske vode?

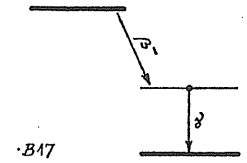
b) Koliko dugo treba meriti preparat dobijen od jednog litra morske vode, ako je ukupna efikasnost brojačkog uređaja 5% a rezultat se traži sa standardnom greškom od 1%?

B16

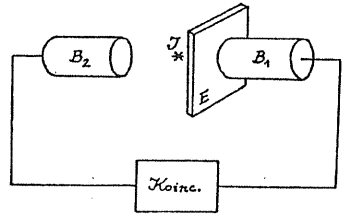


Izotop ^{64}Cu raspada se po šemi datoj na slici. Koje sve čestice i kvante emituje ^{64}Cu i koliki je njihov broj na 100 raspadnutih jezgara ^{64}Cu?

B17 Radioaktivni izvor I, sadrži izotop koji se raspada po šemi prostog beta raspada datoj na slici. Izvor je postavljen između dva brojača B_1 i B_2 uključenih u koincidentno kolo. Brojač B_1 zaštićen je od beta zraka ekranom E te zbog toga registruje samo gama zrake.



·B17

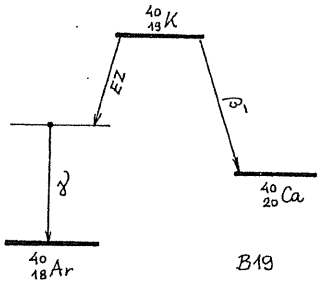


Izraziti apsolutnu aktivnost izvora (A (rasp/s)) preko sledećih eksperimentalno odredljivih veličina: $N_{\beta\gamma}$ — broj koincidencija u jednoj sekundi, N_γ — broj impulsa u sekundi, koje registruje brojač B_1, izazvanih gama-zracima i N_β — broj impulsa u sekundi, koje su izazvali beta zraci (Objasniti kako se određuje veličina N_β).

B18 a) Izračunati starost rude koja sadrži 50% torijuma, 30% urana i 8% olova, pretpostavljajući da je olovo radiogene prirode. Periodi poluraspada ^{238}U i ^{232}Th su: $4{,}49\times10^9$ godina i $1{,}39\times10^{10}$ godina respektivno.

b) Izračunati zapreminu He iz rastvora od 10 g ove rude pretpostavljajući da u toku vremena gas ostaje »zatvoren« u rudi.

B19 a) Na slici je prikazana šema raspada ^{40}K. Naći njegov period poluraspada znajući da:



B19

Prirodni kalijum sadrži izotope 39, 40 i 41 u odnosu 0,933; $1{,}19\times10^{-4}$ i 0,067% (izraženo u broju atoma). Izotopi 39 i 41 su stabilni.

Gram kalijuma emituje 3,4 gama zraka u sekundi. Ovi gama-zraci slede elektronski zahvat (gama kvant po raspadu, tj. po zahvatu).

Gram kalijuma emituje 31 beta minus česticu u prostorni ugao 4π u sekundi.

b) Kolika je starost minerala u kome je akumulirano (pod normalnim uslovima) $1{,}54\times10^{-2}$ cm³ Ar po gramu minerala?

(Mase atoma ^{39}K i ^{41}K su: 38,97 ajm i 40,97 ajm respektivno).

B20 Pri radioaktivnom raspadu jezgra izotopa A_1 konstante raspada λ_1 transformišu se u jezgra radioizotopa A_2 konstante raspada λ_2. Ako je u početnom trenutku izvor sadržao samo N_1^0 jezgara izotopa A_1 naći:

a) Zakon po kome se menja broj radioaktivnih jezgara izotopa A_2 u toku vremena.

b) Vreme posle koga se dobija maksimalni broj jezgara izotopa A_2.

B21 ^{222}Rn raspada se putem alfa emisije u ^{218}Po, koji je takođe radioaktivan. Periodi poluraspada Rn i Po su: 3,825 dana i 3,05 minuta respektivno. Izračunati:

a) Vreme po isteku koga će se sakupiti maksimalna količina Po, ako je u početku bio čist Rn.

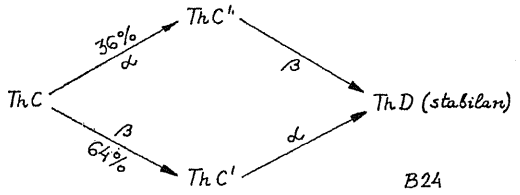
b) Maksimalnu količinu ^{218}Po (u gramima), ako je početna količina ^{222}Rn, pri normalnim uslovima, zauzimala zapreminu 0,65 cm³.

B22 Odrediti zapreminu radona Rn (na normalnoj temperaturi i pritisku) koja je u radioaktivnoj ravnoteži sa 1 g radijuma Ra. Period poluraspada Ra je $1{,}602\times10^3$ godina a Rn 3,825 dana. (Radon je produkt raspada radijuma ^{226}Ra u gasovitom stanju).

B23 Pri beta raspadu izotopa ^{112}Pd dobija se beta aktivni izotop ^{112}Ag. Periodi poluraspada ^{112}Pd i ^{112}Ag su: 21 h i 3,2 h respektivno. Ako je u početnom trenutku

izvor sadržao samo prvi izotop naći odnos maksimalne aktivnosti drugog izotopa prema prvobitnoj aktivnosti izvora.

B24 ThC (^{212}Bi) raspada se putem emisije alfa čestica (36%) i emisije beta-čestica (64%). Raspad ThC i njegovih potomaka šematski je prikazan na slici



B24

Periodi poluraspada ThC, ThC' i ThC'' su: 60,5 min, 5×10^{-9} min i 3,1 min respektivno. Od ^{212}Bi napravljen je radioaktivni izvor koji je sadržao 1×10^{-7} g ^{212}Bi. Izračunati kolika će biti alfa aktivnost a kolika beta aktivnost datog preparata posle 1 h od trenutka pripreme?

B25 Izotop ^{118}Cd se raspada izobarnim lancem:

$$^{118}Cd \xrightarrow[30\,\text{min}]{} {}^{118}I_n \xrightarrow[4{,}5\,\text{min}]{} {}^{118}Sn\ (stabilan)$$

gde su ispod strelica dati odgovarajući periodi poluraspada. Ako je preparat u početnom trenutku sadržao samo prvi radioizotop mase 0,1 g, odrediti masu stabilnog izotopa posle 1 h.

B26 Dat je sledeći izobarni lanac:

$$^{90}_{38}Sr \xrightarrow[28.4\,\text{god}]{\beta^-} {}^{90}_{39}Y \xrightarrow[64.8\,\text{h}]{\beta^-} {}^{90}_{40}Zn\ (stabilan)$$

Iz jednog uzorka ^{90}Sr—^{90}Y, u ravnoteži, hemijskim putem je odvojen sav ^{90}Y. Izračunati kolika će biti aktivnost odvojenog ^{90}Y posle 5 dana i 8 časova od trenutka odvajanja ako je u prvobitnom uzorku bilo 0,01 mg ^{90}Sr. Periodi poluraspada ^{90}Sr i ^{90}Y su naznačeni na slici.

B27 Bolnica ima uređaj za proizvodnju radona u kome se nalazi 1,5 g radijuma. Ako se sav stvoreni radon crpe na kraju svakog dana, kolika količina radona će se iskoristiti tokom jedne godine? (Periodi poluraspada radijuma i radona su: $1{,}602\times10^3$ godina i 3,825 dana respektivno).

B28 Da bi se pripremio radioaktivni izvor ^{140}La, koji predstavlja međustepen u izobarnom lancu:

$$^{140}Ba \xrightarrow[300\,\text{h}]{\beta^-} {}^{140}La \xrightarrow[40.2\,\text{h}]{\beta^-} {}^{140}Ce\ (stabilan)$$

koristi se »milking« postupak u kome se svaki put kada aktivnost ^{140}La dostigne

maksimum, ^{140}La izdvaja od svojih roditelja brzom hemijskom ekstrakcijom. Ovaj postupak se produžava sve dok aktivnost uzoraka ^{140}La tako dobivenih ne padne ispod 1 mCi.

a) Koliki broj uzoraka ^{140}La može da se uzme, ako prvobitna aktivnost radioaktivnog izvora iznosi 5 mCi?

b) Koliku aktivnost ima poslednji uzorak ^{140}La u trenutku njegovog izdvajanja i kolika je neto aktivnost svih uzoraka u tom trenutku?

B29 Jezgra radioaktivnog elementa, čija je konstanta raspada λ, stvaraju se konstantnom brzinom q. Izvesti zakon promene broja radioaktivnih jezgara sa vremenom, ako u početnom trenutku ($t=0$) nije bilo radioaktivnih jezgara ($N_0=0$).

B30 Radioizotop ^{124}Sb formira se konstantnom brzinom $q=2\times10^9$ jezgara u sekundi. ^{124}Sb je beta minus radioaktivan i sa periodom poluraspada $T_{1/2}=60$ dana on prelazi u stabilan ^{124}Te.

Naći:

a) Posle kog će vremena od početka stvaranja aktivnost ^{124}Sb iznositi 10 mCi?

b) Koliko će iznositi masa izotopa ^{124}Te, koja se »sakupi« u izvoru za 120 dana?

B31 Izračunati vreme za koje će specifična aktivnost ^{204}Tl, čiji je period poluraspada $T_{1/2}=3{,}56$ godina, iznositi 5 mCi/g, ako se on formira brzinom 10^{10} atoma/cm³s. (Gustina Tl iznosi 11,85 g/cm³).

B32 Tanka folija elementa ${}^{A}_{Z}X$, mase m, ozračuje se u toku vremena t snopom termalnih neutrona fluksa Φ. Jezgra elementa X apsorpcijom termalnog neutrona prelaze u jezgra radioizotopa ${}^{A+1}_{Z}Y$ konstante raspada λ. Efikasni presek za apsorpciju termalnog neutrona od strane jezgra elementa X je σ. Izvesti izraz koji daje zavisnost broja atoma elementa Y od vremena ozračivanja t i isti proanalizirati za slučaj kada je: a) $\sigma\Phi\gg\lambda$ i b) $\sigma\Phi\ll\lambda$.

B33 Meta od ^{118}Sn mase 38 mg ozračuje se u toku 20 dana fluksom termalnih neutrona $\Phi=6\times10^{13}$ n/cm²s, radi dobijanja ^{119}Sn koji je radioaktivan sa periodom poluraspada $T_{1/2}=250$ dana. Efikasni presek ^{118}Sn za apsorpciju termalnog neutrona iznosi 10^{-26} cm². Kolika je aktivnost ^{119}Sn nakon 50 dana po završetku ozračivanja?

B34 Tanka folija od ^{115}In mase $m=0{,}2$g izložena je izotropnom fluksu termalnih neutrona u toku 2 h. Posle vremena $t=0{,}5$ h od završetka ozračivanja aktivnost folije je bila $A=0{,}1$ μCi. Efikasni presek ^{115}In za apsorpciju termalnog neutrona je 155 barna. Period poluraspada ^{116}In iznosi približno 60 minuta. Naći koliko je iznosio fluks termalnih neutrona?

B35 Uzorak od zlata izložen je snopu termalnih neutrona takvog intenziteta da se svake sekunde 10^{10} neutrona apsorbuje usled reakcije tipa $^{197}Au\,(n,\gamma)\,^{198}Au$.

Jezgro ^{198}Au je beta minus radioaktivno i raspadom prelazi u ^{198}Hg sa periodom poluraspada $T_{1/2}=2{,}7$ dana. Koliko će atoma ^{198}Au i ^{198}Hg biti prisutno u uzorku nakon 10 dana, ako se pretpostavi da jezgra Hg ne stupaju u reakciju sa neutronima.

B36 Debela meta od ^{55}Mn bombarduje se (ozračuje se) u toku vremena $t=5{,}2$ h deuteronskim snopom jačine $i=4{,}8\times10^{-6}$ A, radi dobijanja ^{56}Mn, koji je beta radioaktivan sa periodom poluraspada $T_{1/2}=2{,}6$ h. Izračunati broj radioaktivnih jezgara prisutnih na kraju ozračivanja, pretpostavljajući da je domet svih deuterona $R=110$ mg/cm² i da je srednji presek interakcije duž dometa deuterona $\sigma=10^{-25}$ cm².

RB1 Verovatnoća da se jedna čestica za vreme t ne raspadne je, po definiciji:

$$\omega_0^1 = e^{-\lambda t}$$

a da se raspadne, tj. da opserviramo jedan produkt raspada:

$$\omega_1^1 = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Za dve čestice ($N=2$) imamo tri mogućnosti:

— da ne opserviramo nijedan raspad: $\omega_0^2 = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t}$

— da opserviramo jedan raspad: $\omega_1^2 = 2\, e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$

— da opserviramo dva raspada: $\omega_2^2 = (1 - e^{-\lambda t})\,(1 - e^{-\lambda t})$.

Za, recimo, četiri čestice mogućnosti su:

$$\omega_0^4 = e^{-4\lambda t} \qquad \omega_3^4 = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^3 \times 4$$

$$\omega_1^4 = e^{-3\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \times 4 \qquad \omega_4^4 = (1 - e^{-\lambda t})^4.$$

$$\omega_2^4 = e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^2 \times 6$$

Vidimo da brojni faktor pored eksponencijalnog predstavlja broj kombinacija N elemenata po n, tj. da je jednak:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}.$$

Opšti izraz za traženu verovatnoću bio bi, dakle:

$$\omega_n^N(t) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, e^{-(N-n)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^n.$$

No, kako je $n \ll N$ sledi da je:

$$N! = \overbrace{N(N-1)\cdots\underbrace{(N-n+1)}_{\simeq N}}^{n\ \text{faktora}}(N-n)! \simeq N^n (N-n)!$$

tj.:

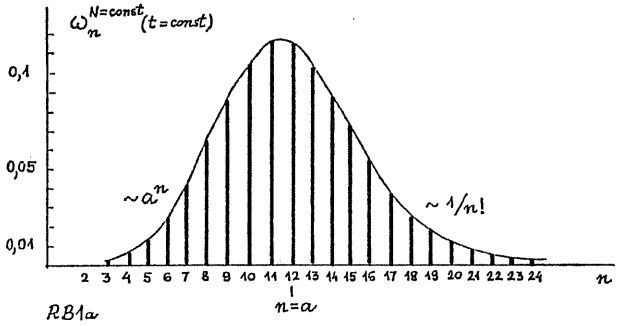
$$\omega_n^N(t) \simeq \frac{N^n}{n!}\, e^{-N\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^n$$

Uz $\lambda t \ll 1$ i $e^{-\lambda t} \simeq 1 - \lambda t$ sledi dalje:

$$\omega_n^N(t) = \frac{(N\lambda t)^n}{n!}\, e^{-N\lambda t} \equiv \frac{a^n}{n!}\, e^{-a}$$

sa $a = N\lambda t$.

Ovde prepoznajemo čuvenu Poissonovu distribuciju. Za fiksno $a = N\lambda t$ ova nam distribucija daje verovatnoću opserviranja n produkata raspada u intervalu $t = a/N\lambda$. Za, recimo $a = 12$, ona ima oblik:

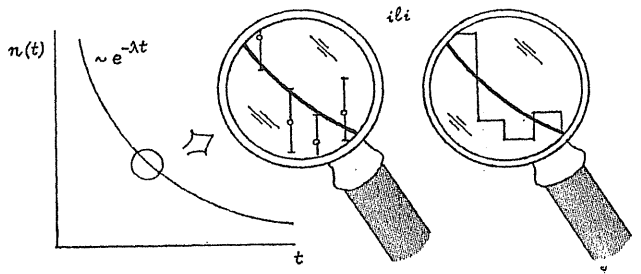


RB1a

Distribucija je, jasno, diskretna i definisana samo za celobrojne vrednosti n pa predstavljanje neprekidnom linijom nije dozvoljeno. Ova, međutim, bolje ističe asimetričnost distribucije. Za male n član koji preteže u funkciji je a^n (leva strana distribucije) a za velike n to je $n!$ (desna strana). Distribucija ima maksimum za vrednost $n = a = N\lambda t$ što se lako vidi i analitički. Ako su, dakle, N, λ i t takvi da je $a = N\lambda t = 12$ tada je to i najverovatniji broj registrovanih produkata raspada n u intervalu vremena t. Odbroji 11, 13, 10, 14 itd. sukcesivno su manje verovatni u skladu sa prikazanom distribucijom verovatnoća. Po jednom jedinom merenju broja n ne možemo, znači, ništa decizivno zaključiti o vrednosti broja N! (jer ne znamo kojoj distribuciji ovaj pripada). Uzrok ovome je inherentna statističnost procesa raspada koja nam, konačno, onemogućava da broj N ikada »tačno« upoznamo. Veliki broj identičnih merenja broja n daće nam distribuciju događaja u skladu sa određenom distribucijom verovatnoća pa iz nje nalazimo najverovatniju vrednost aktivnosti $n = a = N\lambda t$ odakle zatim i najverovatniju vrednost N. Statistička greška ovog broja biće dobro reprezentovana širinom ove distribucije; njenom disperzijom. (videti sledeći zadatak)

Slično, u slučaju praćenja krive raspada sa vremenom, pri čemu se prati broj produkata raspada u jednakim vremenskim intervalima, jasno je da ne možemo reprodukovati kontinuiranu krivu zakona raspada jer u svakom intervalu vremena nećemo registrovati najverovatniji broj produkata raspada koji odgovara srednjoj vrednosti $N\lambda t$ za dati interval već da, u skladu sa odgovarajućom distribucijom, možemo dobiti ma koji odbroj sa odgovarajućom verovatnoćom. Statistička greška svakog od ovih odbroja definisana je širinom pripadajuće distribucije (uobičajeno je, i uostalom jedino a priori moguće, datom odbroju pripisati grešku jednaku kvadratnom korenu iz istog — širini distribucije koja bi za srednju vrednost imala baš dati odbroj — što je aproksimacija koja zadovoljava samo za velike brojeve gde je širina distribucije relativno mala prema samom odbroju) i eksponencijalni zakon raspada je upravo ona funkcija koja najbolje »fituje« eksperiment, tj. prolazi kroz merene tačke tako da po metodu najmanjih kvadrata daje najmanji zbir svih

kvadratnih odstupanja vrednosti funkcije od merenih tačaka. Realna, »mikroskopska«, slika krive raspada izgleda, dakle, ovako:



RB16

što i predstavlja osnovnu manifestaciju inherentno verovatnostnog (statističkog) karaktera svih raspada, tj. svih promena stanja mikrosistema praćenih opservabilnim procesima.

RB2 Po definiciji srednje vrednosti srednji broj čestica koje se raspadnu u intervalu vremena t biće:

$$\langle n\rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} n\omega_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(N\lambda t)^n}{n!} e^{-N\lambda t} = N\lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-N\lambda t} = N\lambda t$$

što se poklapa sa najverovatnijom tačkom Poissonove distribucije. Srednja aktivnost je odavde:

$$A = \frac{\langle n\rangle_t}{t} = N\lambda.$$

Da bismo našli vrednost disperzije D nađimo još:

$$\langle n^2\rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(N\lambda t)^n}{n!} e^{-N\lambda t} = e^{-N\lambda t}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(N\lambda t)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(N\lambda t)^n}{n!} \right\} = e^{-N\lambda t}(N\lambda t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}(n-1) + N\lambda t$$

$$= e^{-N\lambda t}(N\lambda t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} + N\lambda t$$

$$= (N\lambda t)^2 + N\lambda t = \langle n\rangle_t^2 + \langle n\rangle_t.$$

Tako je disperzija konačno jednaka:

$$D = \langle n^2\rangle_t - \langle n\rangle_t^2 = \langle n\rangle_t^2 + \langle n\rangle_t - \langle n\rangle_t^2 = \langle n\rangle_t$$

i standardna devijacija kao mera širine distribucije, tj. statistička greška najverovatnijeg odbroja je, dakle:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\langle n\rangle_t} = \sqrt{N\lambda t}$$

Ako, recimo, želimo da relativnu grešku smanjimo 100 puta moramo ili N ili t povećati 10 000 puta! Prednosti »dobre statistike« (velikih najverovatnijih odbroja) su očigledne.

RB3 Poissonova distribucija je:

$$\omega_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

(videti zadatak B1).
U slučaju velikih srednjih odbroja možemo primeniti Stirlingov razvoj faktorijela i u zadovoljavajućoj aproksimaciji se zadržati samo na prvom članu:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

što očigledno daje kontinuiranu distribuciju oblika:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n e^{-y}$$

sa $y = a - n$. Kako su zbog velikih vrednosti srednjih odbroja relativna odstupanja mala, tj.:

$$\frac{y}{n} = \frac{a-n}{n} \ll 1$$

možemo iskoristiti razvoj:

$$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \simeq n\left(\frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2}\right).$$

Tako, dalje, dobijamo:

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^{\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)^n} \simeq e^{y-\frac{y^2}{2n}}$$

tj.:

$$\omega_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(a-n)^2}{2n}}$$

što i predstavlja kontinuiranu Gaussovu distribuciju gustine verovatnoće (normalnu distribuciju). Distribucija je oko srednje vrednosti a za koju je gustina verovatnoće jednaka $1/\sqrt{2\pi a}$ (maksimum distribucije) asimetrična, slično Poissonovoj.
I Poissonova i, u ovom obliku data, Gaussova raspodela za velike srednje vrednosti a očigledno prelaze u simetrične distribucije. Zamena n sa a je tako zadovoljavajuća aproksimacija koja i formalno daje simetričnu distribuciju:

$$\omega_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(a-n)^2}{2a}}.$$

Znači da veličina $y = a - n$, tj. odstupanje datog odbroja od srednjeg odbroja a ima gustinu verovatnoće:

$$\omega_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{y^2}{2a}}.$$

Nađimo disperziju Gaussove distribucije jednaku srednjoj vrednosti kvadrata odstupanja $\langle(a-n)^2\rangle=\langle y^2\rangle$. Po definiciji srednje vrednosti biće:

$$D=\langle(a-n)^2\rangle=\langle y^2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{y^2}{2a}}dy=\frac{I}{\sqrt{2\pi a}}.$$

Uz poznatu vrednost integrala:

$$\int_0^{\infty}e^{-cx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\quad\text{tj.}\quad J=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2a}}dx=\sqrt{2\pi a}$$

i njegovim diferenciranjem po a:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}=\frac{d}{da}\;J=\frac{1}{2a^2}\;I=\frac{1}{2a^2}\sqrt{2\pi a}\cdot D$$

nalazimo traženu vrednost disperzije:

$$D=a$$

što je identično vrednosti za Poissonovu distribuciju. Standardna devijacija distribucije je:

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{a}$$

i standardni oblik Gaussove distribucije postaje, posle svih aproksimacija:

$$\omega_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-n)^2}{2\sigma^2}}\quad\text{QEI.}$$

RB4 a) Pošto je vremenski interval $\Delta t=0{,}01$ s mali (tj. ispunjen je uslov $\lambda\Delta t\ll 1$) broj raspadnutih atoma za ovo vreme iznosi:

$$\Delta N=N_0\lambda\Delta t=\frac{m}{M}N_{AV}\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\Delta t=1{,}62\times10^{13}.$$

U gornjem izrazu m je masa ^{24}Na, M — masa gram atoma ^{24}Na, N_{AV} Avogadrov broj i $T_{1/2}$ — period poluraspada ^{24}Na.

b) Broj raspadnutih atoma za vreme $t=10$ h iznosi:

$$\Delta N=N_0(1-e^{-\lambda t})=\frac{m}{M}N_{AV}\left(1-e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}\right)=4{,}65\times10^{19}.$$

RB5 Na osnovu definicije parcijalnih konstanti raspada mogu se napisati relacije:

$$\lambda_\alpha=\frac{N_\alpha}{N_\alpha+N_\beta}\lambda_{TOT};\quad\lambda_\beta=\frac{N_\beta}{N_\alpha+N_\beta}\lambda_{TOT}$$

gde je N_α— broj jezgara ^{212}Bi koji se raspao alfa emisijom, N_β — broj jezgara ^{212}Bi koji se raspao beta emisijom i λ_{TOT} totalna (ukupna) konstanta raspada.

Iz uslova zadatka sledi da se od 100 raspadnutih jezgara ^{212}Bi 64 raspalo beta emisijom a 36 alfa-emisijom, tj. za $N_\alpha+N_\beta=100$; $N_\beta=64$ a $N_\alpha=36$. Kako je $\lambda_{TOT}=\ln 2/T_{1/2}=1{,}909\times10^{-4}\text{s}^{-1}$ dobija se:

$$\lambda_\alpha=0{,}687\times10^{-4}\,\text{s}^{-1};\quad\lambda_\beta=1{,}222\times10^{-4}\,\text{s}^{-1}.$$

RB6 Parcijalne konstante raspada λ_{β^-} i λ_{EZ} (videti prethodni zadatak) iznose:

$$\lambda_{\beta^-}=2{,}21\times10^{-6}\,\text{god}^{-1};\quad\lambda_{EZ}=0{,}0382\times10^{-6}\,\text{god}^{-1}.$$

RB7 Koristeći relacije: $A=\lambda N$ i $R=\varepsilon A$ dobija se

$$\tau=\frac{1}{\lambda}=\frac{\varepsilon N}{R}$$

gde je ε — ukupna efikasnost brojačkog uređaja, R — odbroj i N — broj radioaktivnih atoma u uzorku.

S druge strane:

$$N=\frac{2mpN_{AV}}{M(Lu_2O_3)}$$

gde su p — procentualna zastupljenost ^{176}Lu u prirodnom Lu, m — masa merenog uzorka i $M(Lu_2O_3)$ — masa gram molekula datog jedinjenja. Zamenom vrednosti za N u izraz za τ dobija se

$$\tau=2{,}74\times10^{10}\text{ god.}$$

RB8 Polazeći od izraza za radioaktivni raspad dobija se da starost uranove rude iznosi:

$$T=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N(^{238}U)+N(^{208}Pb)}{N(^{238}U)}\simeq2\times10^9\,\text{god}$$

gde je sa $N(^{238}U)$ označen broj atoma urana, a sa $N(^{208}Pb)$ broj atoma olova u uranovoj rudi u sadašnjem trenutku.

Smatra se da je starost Zemlje približno $4{,}5\times10^9$ godina.

RB9 Aktivnost 1 g ^{226}Ra iznosi: $A=\lambda N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{M}N_{AV}=3{,}65\times10^{10}$ rasp/s.

RB10 a) Masa ^{32}P u preparatu koji ima aktivnost $A_0=10^4$ rasp/s iznosi:

$$m=\frac{A_0M(^{32}P)T_{1/2}}{N_{AV}\ln 2}\simeq9{,}5\times10^{-13}\,\text{g}.$$

b) Aktivnost preparata posle vremena $t=30$ dana biće:

$$A=A_0e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}=2{,}35\times10^3\,\text{rasp/s}.$$

RB11 Polazeći od izraza za specifičnu aktivnost dobijamo da odnos specifične aktivnosti ^{238}U prema specifičnoj aktivnosti ^{226}Ra iznosi:

$$\frac{A_s(^{238}U)}{A_s(^{226}Ra)} = \frac{T_{1/2}(^{226}Ra)\,M(^{226}Ra)}{T_{1/2}(^{238}U)\,M(^{238}U)} = 3{,}38 \times 10^{-6}$$

tj. specifična aktivnost ^{238}U je manja $3{,}38 \times 10^{-6}$ puta.

RB12 Ako se pretpostavi da tkiva organizma nisu adsorbovala radioaktivnu supstancu (tj. da se ona »zadržala« samo u krvi) može se naći da aktivnost ukupne zapremine krvi posle 5 h iznosi: $1{,}588 \times 10^3$ rasp/s. Kako je izmereno da 1 cm^3 krvi posle 5 h ima aktivnost 15 rasp/min sledi da zapremina ukupne krvi pacijenta iznosi $V=6{,}35$ litara.

RB13 Radioaktivni izvor ^{24}Na, koji posle $t=2$ dana treba da ima aktivnost $A=1$ mCi, sadrži:

$$N_0 = \frac{AT_{1/2}}{ln\,2}\, e^{\lambda t}\ atoma\ ^{24}Na$$

što odgovara masi:

$$m = \frac{M(^{24}Na)\,N_0}{N_{AV}} = 1{,}055 \times 10^{-9}\,\mathrm{g}$$

RB14 Iz uslova zadatka sledi:

— da se u trenutku smrti organizma u njemu nalazi količina ^{14}C kojoj odgovara specifična aktivnost $A_s^0=10$ rasp/min,
— specifična aktivnost »istog uzorka« posle vremena t iznosi $A_s(t)=7{,}64$ rasp/min.

Veličine A_s^0 i $A_s(t)$ povezane su relacijom:

$$A_s(t) = A_s^0\, e^{-\lambda t} = A_s^0\, 2^{-t/T_{1/2}}$$

odakle se za starost groba dobija:

$$t = \frac{lg\,\dfrac{A_s^0}{A_s(t)}}{lg\,2} \simeq 2{,}23 \times 10^3\ \mathrm{god.}$$

RB15 a) Specifična aktivnost morske vode (računata po 1 litru) iznosi:

$$A_s = \frac{0{,}693\,p\,m\,N_{AV}}{T_{1/2}\,M} = 18{,}22\ \mathrm{rasp/s.l} = 4{,}92 \times 10^{-4}\,\mu\mathrm{Ci}/l$$

gde su upotrebljene oznake: p-procentualna zastupljenost ^{40}K u prirodnom kalijumu, m-masa kalijuma, M-masa gram atoma ^{40}K, N_{AV}-Avogadrov broj i $T_1/_2$-period poluraspada ^{40}K.

b) Standardna greška rezultata merenja, u kome je na brojačkom uređaju sa ukupnom efikasnošću ε za vreme t registrovano r impulsa iznosi $\pm\sqrt{r}$. Jasno je da za relativnu standardnu grešku od 1% treba registrovati 10^4 impulsa. Vreme merenja t izračunava se pomoću relacije: $r=\varepsilon A t$ tj.:

$$t = \frac{r}{\varepsilon A} \simeq 3{,}05\ \mathrm{h.}$$

RB16 Na svakih 100 raspadnutih jezgara ^{64}Cu emituje se u srednjem:
— 38 beta minus čestica (elektrona) maksimalne energije 656 keV
— 19 beta plus čestica (pozitrona) maksimalne energije 573 keV
— 43 kvanta karakterističnog K zračenja ^{64}Ni i Ože-ovih elektrona
— 43 gama kvanta energije 1340 keV
— 38 gama kvanta energije 511 keV (»anihilaciono« zračenje).

RB17 Pošto između pravca emisije beta minus čestice i gama kvanta (koji sledi beta raspad) ne postoji korelacija to se akti registracije ovih čestica brojačima B_2 i B_1 mogu smatrati nezavisnim slučajnim događajima. Ako označimo sa W_β i W_γ verovatnoće (tj. ukupne efikasnosti) registrovanja beta-čestice i gama kvanta odgovarajućim brojačima, tada je:

$$N_\beta = W_\beta A \qquad \text{i} \qquad N_\gamma = W_\gamma A.$$

Akt koincidencije je složen događaj te je njegova verovatnoća jednaka $W_\beta \times W_\gamma$ i zbog toga je

$$N_{\beta\gamma} = W_\gamma W_\beta A.$$

Kombinujući dobijene relacije dobija se da aktivnost izvora iznosi:

$$A = \frac{N_\beta N_\gamma}{N_{\beta\gamma}}.$$

(Veličina N_β određuje se na taj način što se između brojača B_2 i izvora I postavi tanak ekran, koji apsorbuje beta zrake a ne »oslabljuje« snop gama zraka. N_β se izračunava kao razlika odbroja merenja bez ekrana i sa ekranom).

RB18 a) Ako uvedemo oznake: m-masa rude, m_1-masa torijuma, m_2-masa urana i m_3-masa olova u rudi, tada je prema uslovu zadatka:

$$m_1 = 0{,}50\ m, \qquad m_2 = 0{,}30\ m, \qquad m_3 = 0{,}08\ m.$$

Olovo, koje se nalazi u rudi, nastalo je delimično iz raspada ^{232}Th a delimično iz raspada ^{238}U, pri tome u rezultatu raspada ^{232}Th i njegovih potomaka nastaje izotop olova ^{208}Pb, a raspadom ^{238}U i njegovih potomaka nastaje izotop ^{206}Pb. Prema tome masa olova u rudi (m_3) je jednaka:

$$m_3 = m_3\ (^{208}Pb) + m_3\ (^{206}Pb). \qquad (1)$$

Uzmimo trenutak formiranja rude za početni trenutak ($t=0$) i označimo: sa N_1^0 -broj atoma ^{232}Th u početnom trenutku, sa N_1-broj atoma ^{232}Th posle isteka vremena t i sa λ_1 konstantu raspada ^{232}Th. Prema uvedenim oznakama (pod uslovom da su periodi poluraspada torijumovih potomaka zanemarljivi u odnosu na $T_{1/2}$ torijuma) broj atoma izotopa ^{208}Pb biće jednak:

$$N_3\,(^{208}Pb) = N_1^0 - N_1 \qquad (2)$$

Koristeći relaciju:

$$N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

jednačina (RB18.2) može se napisati u obliku:

$$N_3(^{208}Pb) = N_1(e^{\lambda_1 t} - 1).$$

Na osnovu relacije: $N = \frac{m}{M} N_{AV}$ može se preći sa broja atoma na odgovarajuću masu, tj.:

$$m_3(^{208}Pb) = m_1 \frac{208}{232}(e^{\lambda_1 t} - 1) \tag{3}$$

Analogno se dobija

$$m_3(^{206}Pb) = m_2 \frac{206}{238}(e^{\lambda_2 t} - 1) \tag{4}$$

gde je λ_2 konstanta raspada ^{238}U.
Zamenom (RB18.3) i (RB18.4) u (RB18.1) dobija se:

$$m_3 = m_1 \frac{208}{232}(e^{\lambda_1 t} - 1) + m_2 \frac{206}{238}(e^{\lambda_2 t} - 1). \tag{5}$$

U jednačini (RB18.5) sve veličine su poznate osim vremena t, koje predstavlja traženu starost rude. Međutim, jednačina (RB18.5) ne može se rešiti algebarskim metodama. No, kako je $T_{1/2}$ za oba elementa dovoljno veliko to znači da je λt mala veličina te se $\exp(\lambda t)$ može razviti u red i uzeti u obzir samo prva dva člana (tj. $\exp(\lambda t) \simeq 1 + \lambda t$). Kada se to uradi jednačina (RB18.5) postaje:

$$m_3 = m_1 \frac{208}{232}\lambda_1 t + m_2 \frac{206}{238}\lambda_2 t$$

a odatle

$$t = \frac{m_3}{m_1 \frac{208}{232}\lambda_1 + m_2 \frac{206}{238}\lambda_2},$$

odnosno uz:

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}(^{232}Th)} \qquad t \simeq 1{,}28 \times 10^9 \text{ godina.}$$

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}(^{238}U)}$$

Gornji rezultat je dobijen u prvoj aproksimaciji. Može se pokazati da kada se iz razvoja $e^{\lambda t}$ uzme i treći član da se rezultat ne menja bitno, što opravdava korišćenu aproksimaciju.

b) Broj atoma *He* koji su nastali za vreme t jednak je broju emitovanih alfa čestica za to vreme. Transformacija atoma ^{232}Th u atom ^{208}Pb ostvaruje se uz emisiju 6 alfa-čestica, a transformacija atoma ^{238}U u atom ^{206}Pb uz emisiju 8 alfa-čestica.

Prema tome broj formiranih atoma *He* iznosi:

$$N(He) = 6\,N_3(^{208}Pb) + 8\,N_3(^{206}Pb),$$

odnosno

$$N(He) = 6\,N_1(e^{\lambda_1 t} - 1) + 8\,N_2(e^{\lambda_2 t} - 1).$$

Masa *He* iz 100 g rude je jednaka:

$$m(He) = m_1 \frac{24}{232}(e^{\lambda_1 t} - 1) + m_2 \frac{32}{238}(e^{\lambda_2 t} - 1) = 1{,}39 \text{ g.}$$

Konačno zapremina *He* (pod normalnim uslovima) iznosi:

$$V(He) \simeq 7{,}79 \text{ l.}$$

RB19 a) Period poluraspada ^{40}K je jednak:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_{TOT}} = \frac{\ln 2}{\lambda_{\beta-} + \lambda_{EZ}}.$$

Parcijalne konstante raspada $\lambda_{\beta-}$ i λ_{EZ} su, po definiciji, date izrazima:

$$\lambda_{\beta-} = \frac{N_{\beta-}}{N(^{40}K)}, \qquad \lambda_{EZ} = \frac{N_{EZ}}{N(^{40}K)}.$$

Iz uslova zadatka nalazi se da je:

$$N(^{40}K) = 1{,}832 \text{ at/g} \qquad \text{i} \qquad N_{\beta-} = 31 \text{ at/g} \cdot \text{s}$$

$$N_{EZ} = 3{,}4 \text{ at/g} \cdot \text{s}.$$

Prema tome:

$$T_{1/2} = \frac{N(^{40}K)\ln 2}{N_{\beta-} + N_{EZ}} = 1{,}17 \times 10^9 \text{ god.}$$

b) Ako označimo sa t starost minerala a sa N_0 broj atoma ^{40}K po gramu minerala u trenutku stvaranja minerala, tada broj atoma ^{40}K koji se sada nalaze u mineralu iznosi $N = N_0 \exp(-\lambda t)$, gde je λ totalna konstanta raspada ^{40}K. Broj raspadnutih atoma za vreme t iznosi:

$$N_r = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = N(e^{\lambda t} - 1).$$

Sa šeme raspada ^{40}K vidi se da je jedan deo raspadnutih atoma ^{40}K »otišao« na stvaranje atoma *Ar* a drugi na stvaranje *Ca*.
Postoji, dakle, grananje. Faktor grananja za formiranje *Ar* iznosi

$$F_G(Ar) = \frac{N_{EZ}}{N_{\beta-} + N_{EZ}}.$$

Prema tome, broj atoma *Ar* stvorenih za vreme t iznosi

$$N(^{40}Ar) = F_G N_r = \frac{N_{EZ}}{N_{\beta-} + N_{EZ}} N(e^{\lambda t} - 1).$$

S druge strane iz podatka da je u 1 g minerala (pod normalnim uslovima) akumulirano $1{,}54\times10^{-2}$ cm^3 *Ar* nalazi se

$$N(^{40}Ar)=\frac{N_{AV}}{V_{mol}}V_{Ar}=4{,}14\times10^{17}\text{ atoma.}$$

Dakle

$$4{,}14\times10^{17}=\frac{3{,}4}{34{,}4}\,1{,}832\times10^{18}\left(e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}-1\right)$$

odakle se dobija da je:

$$t\simeq 2\times10^{9}\text{ god.}$$

RB20 a) Ovde se radi o takozvanom složenom sukcesivnom raspadu, koji se šematski može prikazati na sledeći način:

$$A_1\xrightarrow{\lambda_1}A_2\xrightarrow{\lambda_2}A_3\text{ (stabilan).}$$

Promene broja jezgara (N_1) izotopa A_1 i broja jezgara (N_2) izotopa A_2 određene su sistemom jednačina:

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1N_1;\qquad\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1N_1-\lambda_2N_2.$$

Smisao ovih jednačina je: broj jezgara izotopa A_1 smanjuje se na račun njihovog raspada, a broj jezgara izotopa A_2 opada na račun sopstvenog raspada a povećava se na račun raspada jezgara izotopa A_1.

Prema uslovima zadatka za gornji sistem jednačina mogu se napisati početni uslovi:

$$\text{Za } t=0:\quad N_1(0)=N_1^0,\quad N_2(0)=N_2^0=0.$$

Rešenje sistema jednačina, sa datim početnim uslovima, ima oblik:

$$N_1=N_1^0e^{-\lambda_1t}$$

$$N_2(t)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1^0(e^{-\lambda_1t}-e^{-\lambda_2t}).$$

Izraz za $N_2(t)$ predstavlja traženi zakon promene broja radioaktivnih jezgara izotopa A_2.

b) Vreme posle koga se dobija maksimalan broj jezgara izotopa A_2 nalazi se iz uslova za nalaženje maksimuma funkcije $N_2(t)$, tj.:

$$\frac{dN_2(t)}{dt}=0$$

odnosno:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1^0\,(-\lambda_1e^{-\lambda_1t}+\lambda_2e^{-\lambda_2t})=0$$

odakle se dobija da je:

$$t_{\max}=\frac{ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

ili

$$t_{\max}=\frac{(T_{1/2})_1(T_{1/2})_2}{[(T_{1/2})_1-(T_{1/2})_2]\ln 2}\,ln\frac{(T_{1/2})_1}{(T_{1/2})_2}.$$

RB21 a) Maksimalna količina *Po* sakupiće se po isteku vremena t_{max} (videti prethodni zadatak) koje za ovaj slučaj iznosi:

$$t_{\max}=\frac{(T_{1/2})_{Rn}(T_{1/2})_{Po}}{\ln 2\,[(T_{1/2})_{Rn}-(T_{1/2})_{Po}]}\,ln\frac{(T_{1/2})_{Rn}}{(T_{1/2})_{Po}}=33{,}01\text{ min.}$$

b) Maksimalna količina *Po* nalazi se (videti rešenje prethodnog zadatka) pomoću izraza:

$$m_{\max}=\frac{N_1^0}{N_{AV}}M_1\frac{\lambda_{Rn}}{\lambda_{Po}-\lambda_{Rn}}(e^{-\lambda_{Rn}t_{\max}}-e^{-\lambda_{Po}t_{\max}})$$

Zamenjujući odgovarajuće brojne vrednosti dobija se:

$$m_{\max}=3{,}49\times10^{-9}\text{ g.}$$

RB22 Iz jednačine radioaktivne ravnoteže

$$\lambda_{Ra}N_{Ra}=\lambda_{Rn}N_{Rn}$$

i podatka da 1 g *Ra* sadrži 2.66×10^{21} atoma nalazimo da je

$$N_{Rn}=\frac{\lambda_{Ra}N_{Ra}}{\lambda_{Rn}}=1{,}76\times10^{16}\text{ atoma.}$$

Prema tome, zapremina radona koja je u radioaktivnoj ravnoteži sa 1 g *Ra* iznosi:

$$V_{Rn}=\frac{N_{Rn}}{N_{AV}}V_{mol}=0{,}66\text{ mm}^3.$$

RB23 Maksimalnu aktivnost drugi izotop (^{112}Ag) imaće (videti zadatak B20) posle vremena

$$t_{\max}=\frac{\ln(\lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}=10{,}24\text{ h.}$$

Ako izraz

$$N_2^{\max}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_1^0(e^{-\lambda_1t_{\max}}-e^{-\lambda_2t_{\max}})$$

pomnožimo sa λ_2 imaćemo:

$$\lambda_2N_2^{\max}=A_2^{\max}=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}A_1^0(e^{-\lambda_1t_{\max}}-e^{-\lambda_2t_{\max}})$$

odakle se dobija da traženi odnos maksimalne aktivnosti drugog izotopa prema prvobitnoj aktivnosti iznosi:

$$\frac{A_2^{max}}{A_1^0} = \frac{(T_{1/2})_{Pd}}{(T_{1/2})_{Pd} - (T_{1/2})_{Ag}} \left\{ e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_{Pd}} t_{max}} - e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_{Ag}} t_{max}} \right\} = 0{,}713.$$

RB24 Alfa aktivnost preparata potiče delom od raspada *ThC* putem α- raspada a drugim delom od α-raspada *ThC'*, tj.:

$$A_\alpha^{TOT} = A_\alpha(ThC) + A_\alpha(ThC').$$

Uvedimo oznake: λ_1 — konstanta raspada *ThC*, λ_2 — konstanta raspada *ThC'*, λ_3 — konstanta raspada *ThC''*, p_α — procenat *ThC* koji se raspada putem α-emisije i p_β — procenat *ThC* koji se raspada putem β-emisije.
Prema uvedenim oznakama može se napisati da je:

$$A_\alpha(ThC) = p_\alpha \lambda_1 N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

gde je N_1^0 — broj jezgara *ThC* u preparatu u početnom trenutku. Za $A_\alpha(ThC')$ (videti zadatak B20) može se napisati da iznosi:

$$A_\alpha(ThC') = p_\beta N_1^0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Prema tome:

$$A_\alpha^{TOT} = N_1^0 \left[p_\alpha \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_\beta \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \right].$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$A_\alpha^{TOT} = 738 \text{ mCi}.$$

Napomena:
Pošto je $(T_{1/2})_1 \gg (T_{1/2})_2$ tj. $\lambda_1 \ll \lambda_2$ može se pri računanju koristiti aproksimacija:

$$\frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \simeq \lambda_1.$$

Beta aktivnost preparata potiče od beta aktivnosti *ThC* i beta aktivnosti *ThC'*, tj.:

$$A_\beta^{TOT} = A_\beta(ThC) + A_\beta(ThC'').$$

Zbog simetričnosti (videti sliku) A_β^{TOT} se dobija iz izraza za A_α^{TOT} kada se p_α zameni sa p_β, p_β sa p_α i λ_2 sa λ_3:

$$A_\beta^{TOT} = N_1^0 \left[p_\beta \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_\alpha \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_3 t}) \right].$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$A_\beta^{TOT} = 752 \text{ mCi}.$$

RB25 Radi jednostavnosti, veličine koje se odnose na ^{118}Cd, ^{118}In i ^{118}Sn označićemo indeksima 1, 2 i 3 respektivno.
Zavisnost broja atoma ^{118}Cd i ^{118}In od vremena t (videti zadatak B20) date su relacijama:

$$N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = N_1^0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Brzina formiranja stabilnog izotopa ^{118}Sn je jednaka brzini raspadanja atoma ^{118}In, tj.:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$$

odakle se dobija da je:

$$N_3 = \int_0^\tau \lambda_2 N_2(t)\, dt.$$

Posle zamene vrednosti za $N_2(t)$ i integracije po vremenu t, dobijamo:

$$N_3 = N_1^0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \right\}.$$

Masa stabilnog izotopa m_3 biće jednaka:

$$m_3 = m_1^0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) \right\}.$$

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$m_3 = 7{,}06 \times 10^{-2} \text{ g}.$$

RB26 U trenutku izdvajanja ^{90}Y postojala je radioaktivna ravnoteža, te je:

$$A_{Sr} = A_Y^0$$

S druge strane

$$A_{Sr} = \lambda_{Sr} N_{Sr} = \frac{\ln 2}{(T_{1/2})_{Sr}} \frac{m}{90} N_{AV} = 7{,}34 \times 10^7 \text{ rasp/s}.$$

Prema tome, aktivnost ^{90}Y posle 128 h od trenutka izdvajanja iznosiće:

$$A_Y = A_Y^0 e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_Y} t} \simeq 0{,}5 \text{ m Ci}.$$

RB27 Pošto je $(T_{1/2})_{Ra} \gg (T_{1/2})_{Rn}$ na osnovu rešenja zadatka B20 sledi da je:

$$N_{Rn} = \frac{\lambda_{Ra}}{\lambda_{Rn}} N_{Ra}^0 (1 - e^{-\lambda_{Rn} t})$$

odnosno:

$$A_{Rn} = A_{Ra}^0 (1 - e^{-\lambda_{Rn} t}).$$

Za vreme $t=1$ dan dobija se

$$A_{Rn}=0{,}2475 \text{ Ci.}$$

Kako je $(T_{1/2})_{Ra} \gg 1$ godine možemo uzeti da je aktivnost Ra u toku jedne godine približno konstantna. Prema tome, u toku jedne godine iskoristiće se:

$$(A_{Rn})_{1\text{ god}} = 90{,}6 \text{ Ci radona.}$$

RB28 Aktivnost ^{140}La (videti zadatak B20) imaće maksimalnu vrednost posle vremena t_{max} koje iznosi:

$$t_{max}=\frac{(T_{1/2})_{Ba}(T_{1/2})_{La}}{[(T_{1/2})_{Ba}-(T_{1/2})_{La}]\ln 2}\ln\frac{(T_{1/2})_{Ba}}{(T_{1/2})_{La}}=134{,}6 \text{ h.}$$

Ako sa A^0_{Ba} označimo aktivnost Ba u početnom trenutku ($t=0$) tada se njegova aktivnost posle isteka vremena t_{max} može izračunati na osnovu izraza:

$$A_{Ba}(t_{max})=A^0_{Ba}\,e^{-\lambda_{Ba}t_{max}}$$

a aktivnost prvog uzorka La, u trenutku njegovog izdvajanja, može se naći pomoću izraza:

$$A_{La}(t_{max})=\frac{(T_{1/2})_{Ba}}{(T_{1/2})_{Ba}-(T_{1/2})_{La}}A^0_{Ba}(e^{-\lambda_{Ba}t_{max}}-e^{-\lambda_{La}t_{max}}).$$

Koristeći gornje izraze i podatke kao i uslove date u zadatku može se naći:

a) Da je moguće uzeti pet uzoraka ^{140}La.

b) Poslednji (peti) uzorak ^{140}La u trenutku njegovog izdvajanja ima aktivnost od 1,06 mCi a neto aktivnost svih uzoraka u tom trenutku iznosi 1,21 mCi.

RB29 Kako se u jedinici vremena formira q jezgara datog radioaktivnog elementa, a raspadne se $\lambda N(t)$, to je ukupna promena data diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dN(t)}{dt}=q-\lambda N(t).$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine za date početne uslove je:

$$N(t)=\frac{q}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}).$$

Iz oblika funkcije $N(t)$ zaključujemo da broj radioaktivnih atoma raste sa porastom vremena t i teži graničnoj vrednosti $\frac{q}{\lambda}$.

RB30 a) Zavisnost aktivnosti radioizotopa ^{124}Sb od vremena t (videti prethodni zadatak) data je izrazom:

$$A=q\,(1-e^{-\lambda t})$$

odakle se dobija:

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{q}{q-A}\simeq 17{,}7 \text{ dana.}$$

b) Broj stvorenih atoma ^{124}Te za vreme $t=120$ dana je jednak broju raspadnutih atoma ^{124}Sb u tom vremenskom intervalu, tj.:

$$N_{Te}=qt-\frac{q}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})=\frac{q}{\lambda}(e^{-\lambda t}+\lambda t-1).$$

Prema tome, masa izotopa ^{124}Te koja se sakupi u izvoru za 120 dana iznosi:

$$m_{Te}=\frac{M}{N_{AV}}\frac{q}{\lambda}(e^{-\lambda t}+\lambda t-1)\simeq 2\,\mu\text{g.}$$

RB31 Specifična aktivnost ^{204}Tl, ako se on formira brzinom $q=10^{10}$ atoma/$/\text{cm}^3\text{s}$, iznosiće 5 mCi/g posle vremena:

$$t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{q}{q-A_s\rho}=2{,}96 \text{ godina.}$$

(sa ρ je označena gustina Tl).

RB32 Diferencijalna jednačina koja opisuje promenu broja atoma elementa X je:

$$\frac{dN_X}{dt}=-N_X\sigma\Phi.$$

Rešenje gornje diferencijalne jednačine, za početne uslove $t=0$; $N^0_X=\frac{mN_{AV}}{M_x}$ je

$$N_X=\frac{mN_{AV}}{M_X}e^{-\sigma\Phi t}.$$

Diferencijalna jednačina koja definiše promenu broja atoma elementa Y je

$$\frac{dN_Y}{dt}=-\lambda N_Y+N_X\sigma\Phi=-\lambda N_Y+\frac{mN_{AV}\sigma\Phi}{M_X}e^{-\sigma\Phi t}$$

a njeno rešenje sa početnim uslovom: $t=0$; $N^0_Y=0$ je

$$N_Y=\frac{mN_{AV}\sigma\Phi}{M_X(\lambda-\sigma\Phi)}(e^{-\sigma\Phi t}-e^{-\lambda t}).$$

a) Kada je $\sigma\Phi\gg\lambda$ gornji izraz se može napisati u jednostavnijem obliku:

$$N_Y=\frac{mN_{AV}}{M_X}(1-e^{-\sigma\Phi t}).$$

b) Kada je $\sigma\Phi \ll \lambda$ izraz za N_Y može se napisati u obliku:

$$N_Y = \frac{mN_{AV}\sigma\Phi}{\lambda M_X}(1 - e^{-\lambda t}).$$

RB33 Izračunajmo najpre vrednosti za $\sigma\Phi$ i λ:

$$\sigma\Phi = 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2 \times 6 \times 10^{13}\,\mathrm{n\,cm^{-2}s^{-1}} = 6 \times 10^{-13}\,\mathrm{ns^{-1}};\quad \lambda \simeq 3{,}21 \times 10^{-8}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Pošto je zadovoljen uslov $\sigma\Phi \ll \lambda$ (videti prethodni zadatak) aktivnost ^{119}Sn u trenutku prestanka ozračivanja data je izrazom:

$$A_t = \frac{mN_{AV}\sigma\Phi}{M(^{118}Sn)}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Aktivnost mete nakon vremena τ po završetku ozračivanja biće:

$$A_\tau = A_t\, e^{-\lambda\tau} = \frac{mN_{AV}\sigma\Phi}{M(^{118}Sn)}(1 - e^{-\lambda t})\, e^{-\lambda\tau}.$$

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$A_\tau = 0{,}755\ \mathrm{mCi}.$$

RB34 Iz izraza:

$$A = \frac{mN_{Av}\sigma\Phi}{M}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)e^{-\lambda\tau}$$

sledi da je:

$$\Phi = \frac{AMe^{\lambda\tau}}{mN_{Av}\sigma\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

gde su A — aktivnost mete, m — masa ^{115}In, M — masa gram atoma ^{115}In, N_{AV} — — Avogadrov broj, σ — efikasni presek ^{115}In za apsorpciju termalnog neutrona, t — vreme ozračivanja mete i τ — vreme od trenutka prestanka ozračivanja do trenutka merenja aktivnosti mete. Zamenom brojnih vrednosti se dobija

$$\Phi = 4{,}3 \times 10^4\ \textit{neutrona}\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}}.$$

RB35 Zavisnost broja beta minus radioaktivnih atoma ^{198}Au od vremena ozračivanja t data je izrazom:

$$N(^{198}Au) = \frac{N(^{197}Au)\,\sigma\Phi}{\lambda(^{198}Au)}(1 - e^{-\lambda_{198}Au\, t}).$$

Iz uslova zadatka sledi da je:

$$N(^{197}Au)\,\sigma\Phi = 10^{10}\ \textit{atoma/s}.$$

Prema tome, broj radioaktivnih atoma ^{198}Au prisutnih u uzorku nakon $t = 10$ dana

iznosi:

$$N(^{198}Au) = 3{,}47 \times 10^{15}\ \textit{atoma}.$$

Broj atoma ^{198}Hg prisutnih u uzorku nakon $t = 10$ dana je jednak:

$$N(^{198}Hg) = N_{tot}(^{198}Au) - N(^{198}Au)$$

gde su $N_{tot}(^{198}Au)$ — broj atoma ^{198}Au formiranih u toku vremenskog intervala $t = 10$ dana, a $N(^{198}Au)$ — broj atoma ^{198}Au koji su prisutni u uzorku na kraju ovog vremenskog intervala.

Ako sa q označimo brzinu formiranja atoma ^{198}Au tada je:

$$N_{tot}(^{198}Au) = q\,t = 8{,}64 \times 10^{15}\ \textit{atoma}.$$

Prema tome:

$$N(^{198}Hg) = 5{,}17 \times 10^{15}\ \textit{atoma}.$$

RB36 Ako sa S označimo ozračivanu površinu a sa Φ fluks deuteronskog snopa tada je struja deuterona i data izrazom:

$$i = \Phi\, S\, e$$

gde je e — naelektrisanje deuterona.

Početni broj jezgara ^{55}Mn sa kojim mogu deuteroni iz snopa interagovati, unutar dometa R, iznosi:

$$N_0(^{55}Mn) = \frac{RS}{M}N_{AV}$$

gde je sa M označena masa gram atoma ^{55}Mn a N_{AV} je Avogadrov broj.

Broj radioaktivnih jezgara ^{56}Mn prisutnih na kraju ozračivanja (videti zadatak B32) može se izračunati pomoću izraza:

$$N(^{56}Mn) = \frac{RS\Phi\sigma N_{AV}}{M(\lambda - \sigma\Phi)}(e^{-\sigma\Phi t} - e^{-\lambda t}).$$

Izračunajmo, najpre, brojne vrednosti:

$$S\Phi = \frac{i}{e} = 3 \times 10^{13}\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\frac{R}{M}N_{AV} = 1{,}2 \times 10^{21}\,\mathrm{cm^{-2}}$$

$$\lambda = 7{,}4 \times 10^{-5}\,s^{-1}$$

Napomena:

Za razumne vrednosti ozračivane površine mete ($S \geqslant 1$ cm^2) imamo da je $\lambda \gg \sigma\Phi$ i za $t \simeq 5$ h je $\sigma\Phi t \simeq 0$.

To znači da se za dato relativno kratko vreme ekspozicije u slabom fluksu može zanemariti smanjenje broja jezgara ^{55}Mn u meti.

Na taj način konačno se dobija:

$$N(^{56}Mn) = \frac{RS\sigma\Phi N_{AV}}{M\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) = 3{,}7 \times 10^{13}\ \textit{jezgara}.$$

Glava C

Osnovi detekcije zračenja

C1 Teška čestica mase M, naelektrisanja ze i brzine v kreće se kroz sredinu atomske težine A, rednog broja Z i gustine ρ. Pretpostaviti da je trajektorija čestice pravolinijska i da je čestica nerelativistička pa zatim naći koliki su gubici energije na jonizaciju atoma sredine po jedinici puta čestice ako je energija potrebna za jonizaciju u srednjem jednaka I (srednji jonizacioni potencijal). Pri traženju transfera impulsa (i energije) elektronu sredine u funkciji parametra sudara pretpostaviti da su elektroni slobodni.

C2 Naći koliku energiju α čestica, početne energije 10 MeV, izgubi prolazeći kroz sloj vazduha debljine 1 cm, kao i koliki broj jonskih parova pri tom stvori. Naći njen domet u vazduhu smatrajući da gubici na jonizaciju ne zavise od energije čestice, a rezultat uporediti sa empirijskom formulom $R_\alpha \simeq 9{,}8 \times 10^{-28} v_\alpha^3$ cm. Specifični gubitak energije računati po izrazu:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2 N}{mv^2}\left\{ln\frac{2mv^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2\right\}\frac{1}{1{,}6 \times 10^{-6}} \text{ MeV/cm}$$

gde je N broj elektrona po cm^3 vazduha. Srednji jonizacioni potencijal za vazduh I je $\simeq 35$ eV.

C3 Domet teške naelektrisane čestice mase M i naelektrisanja z može da se izrazi na sledeći način

$$R = \frac{M}{z^2} g(v).$$

Funkcija $g(v)$ zavisi samo od brzine čestice. Pretpostavljajući da je poznat domet protona u funkciji energije naći izraz za domet bilo koje čestice mase M_1 i naelektrisanja z_1.

C4 Poznato je da sve čestice iste upadne energije (E_0) nemaju isti domet. Ova pojava naziva se osipanje dometa a posledica je fluktuacije energetskog gubitka čestice na jedinici puta. Osipanje dometa čestice oko srednje vrednosti dometa R_0 može da se opiše Gaussovom raspodelom:

$$W(R)\,dR = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{\pi}{4\sigma^2}(R-R_0)^2} dR$$

gde je $\sigma^2 = \frac{\pi}{2}\langle(R-R_0)^2\rangle$. Simbol $\langle(R-R_0)^2\rangle$ označava srednju kvadratnu devijaciju dometa.

Izračunati parametar osipanja (σ^2) koristeći Bohrovu formulu (1915) za srednju kvadratnu devijaciju gubitka energije na jedinici puta

$$\frac{d}{dx}\delta E^2 = 4\pi Z_1^2 Z_2 N e^4$$

(U kojoj je Z_1 naelektrisanje čestice, Z_2 redni broj atoma sredine, kojih ima N po jedinici zapremine).
Specifični gubitak energije čestice predstaviti izrazom:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi Z_1^2 Z_2 e^4 g(E).$$

C5 Eksperimentalno je utvrđeno da gubitak energije protona na jedinici puta kroz vazduh za upadne energije protona u intervalu 10—200 MeV može približno da se prikaže formulom:

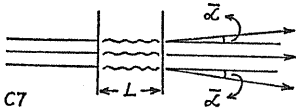
$$-\frac{dE}{dx} = \frac{45}{E^{0,8}}$$

u kojoj se energija izražava u MeV, a put u metrima. Koristeći ovu formulu odrediti domet u vazduhu protona od 10 i 100 MeV.

C6 Brza beta-čestica upada u gas. Pretpostavljajući da su sudari beta čestice i elektrona sredine kvazielastični, da su uglovi rasejanja mali i da je minimalni mogući transfer energije po jednom sudaru jednak srednjoj jonizacionoj energiji atoma gasa $e\bar{I}$, naći za beta česticu izraz za jonizacioni gubitak energije po jedinici puta.
Napomena:
Pretpostaviti da je presek za rasejanje beta elektrona na atomskom elektronu oblika:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4e^4m^2}{p^2}\frac{1}{\vartheta^4}.$$

C7 Kolimisani snop elektrona talasne dužine λ^*, manje od poluprečnika jezgra, prolazi kroz sredinu debljine L (videti sliku) koja ima N atoma po jedinici zapremine. Usled višestrukog rasejanja po izlasku iz materijala snop je proširen za neki ugao $2\bar{\alpha}$.



C7

Pošto je za homogenu i izotropnu sredinu podjednako verovatno da elektron skrene »gore« ili »dole« srednji ugao skretanja snopa jednak je nuli, ali je od nule različit srednji kvadrat ugla skretanja $\langle\alpha^2\rangle$, koji određuje raspodelu elektrona po uglovima u izlaznom snopu, ako je ta raspodela gausovskog tipa:

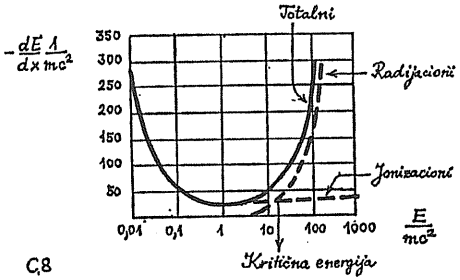
$$\rho(\alpha) = const\, e^{-\frac{\alpha^2}{\langle\alpha^2\rangle}}.$$

Proceniti veličinu $\langle\alpha^2\rangle$ pretpostavljajući da svaki pojedinačni sudar (sa atomima ili jezgrima materijala) doprinosi podjednako konačnoj veličini $\langle\alpha^2\rangle$, kao i da je rasejanje Raderfordovskog tipa.

Napomena:
Diferencijalni efikasni presek Raderfordovog tipa, za male uglove rasejanja elektrona glasi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2}{mv^2}\right)\frac{1}{\vartheta^4} \quad (\vartheta \ll 1).$$

C8 Prolazeći kroz materijalne sredine elektroni gube energiju uglavnom na dva načina: na jonizaciju i ekscitaciju atoma sredine i na zakočno zračenje ("bremsstahlung") na elektromagnetnim poljima. Relativni doprinosi totalnom gubitku energije prikazani su na slici (za olovo):



C8

Na energijama većim od ~10 MeV (kritična energija) radijacioni gubici su dominantni. Radijacionu debljinu, l_R, definišemo kao onu debljinu posle koje energija snopa elektrona (u srednjem) padne na $1/e$ od svoje početne vrednosti (E_0). Naći zakon promene energije elektrona u funkciji pređene debljine materijala kao i verovatnoću (presek) za emisiju kvanta zakočnog zračenja sa učestanošću između neke vrednosti ν_1 i maksimalne vrednosti $\nu_0 = E_0/h$. Naći konkretnu vrednost preseka ako je $E_0 = 100$ MeV, $E_1 = 50$ MeV a materijal je gvožđe za koje je

$$l_R = 13{,}8 \text{ g cm}^{-2}.$$

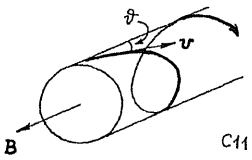
C9 Brzi elektron energije E prolazi kroz bakarnu ploču debljine 0,3 cm (radijaciona dužina bakra je 12,8 g/cm²). Kolika je verovatnoća da ovaj elektron usled zakočnog zračenja po izlasku iz ploče ima energiju u intervalu (0,5 do 0,75) E?

C10 Elektron na zakočno zračenje po jedinici puta gubi energiju

$$-\frac{dE}{dx} = 4Z^2\alpha N r_e^2 \ln\frac{180}{Z^{1/3}}$$

gde su: Z naelektrisanje, N broj jezgara sredine, α konstanta fine strukture, E energija elektrona a r_e klasičan radijus elektrona $= e^2/mc^2$. Polazeći od ovog izraza naći debljinu materijala (x_0) koja energiju elektrona smanjuje na 1/2.

C11 Naelektrisana čestica (m, e, $\vec{v}$) kreće se u homogenom magnetnom polju $\vec{H}$. Pod dejstvom Lorentzove sile $\vec{F}=\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}$ trajektorija je, u opštem slučaju, helikoidalna. Kako je kretanje ubrzano čestica će zračiti elektromagnetno zračenje koje se naziva magnetozakočnim zračenjem ("magnetobremsstrahlung") ili sinhrotronskim zračenjem jer predstavlja glavni proces kojim čestice u kružnim akceleratorima gube energiju.



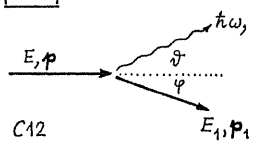
C11

Opserviranje ovog zračenja daje dragocene podatke o magnetnim poljima i distribucijama naelektrisanja u udaljenim oblastima prostora. Koristeći opšti relativistički izraz za intenzitet elektromagnetnog zračenja emitovanog od strane naelektrisanja koje se kreće u kombinovanom električnom i magnetnom polju E, B:

$$I=\frac{2\,e^2\gamma^2}{3\,m^2c^3}\left\{\left[e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right]^2-\frac{e^2}{c^2}(\vec{E}\cdot\vec{v})^2\right\}$$

gde je $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$, naći gubitak energije naelektrisane čestice u jedinici vremena u gore opisanom slučaju. Uporediti intenzitet sinhrotronskog zračenja ultrarelativističkog elektrona i protona u inače istim uslovima.

C12



C12

Primenom zakona održanja energije i impulsa pokazati da se Čerenkovljevo zračenje u datoj sredini emituje pod uglom $\vartheta\simeq\arccos(c_1/v)$ u odnosu na pravac upadne čestice. Brzina čestice je $v>c/n=c_1$, gde je n indeks prelamanja sredine. Pretpostaviti da je energija Čerenkovljevog fotona znatno manja od energije čestice.

C13 Tam-Frankova teorija Čerenkovljevog efekta daje spektralnu distribuciju emitovanog zračenja oblika $N(\omega)=\frac{e^2}{\hbar c^2}\sin^2\vartheta$ gde je $\vartheta=\arccos(c_1/v)$ i $c_1=c/n$ a n indeks prelamanja sredine (tj. broj Čerenkovljevih fotona u jediničnom intervalu učestanosti koje čestica emituje po jedinici puta ne zavisi od učestanosti). Ako se elektron energije 1 MeV kreće kroz vodu ($n=1{,}33$) naći gubitak energije po jedinici puta na emisiju vidljive svetlosti (4000 Å$<\lambda<$7600 Å).

C14 Pozitron kinetičke energije $T=750$ keV naleće na elektron u miru. Posle anihilacije nastaju dva gama kvanta istih energija. Odrediti ugao između pravaca gama kvanata.

Napomena:

Zadatak rešiti korišćenjem »algebre« kvadri vektora impulsa $\mathfrak{p}\{\vec{p}, iE\}$; $\mathfrak{p}^2=-m_0^2$ u sistemu jedinica u kojem je brzina svetlosti $c=1$.

C15 Ako energija fotona zadovoljava uslov $W_K\ll h\nu\ll 0{,}5$ MeV gde je W_K energija veze K-elektrona, presek za fotoefekat na K-ljusci je približno:

$$\sigma_k\simeq 1{,}1\times 10^8 Z^5\left[\frac{13{,}6}{h\nu\,(eV)}\right]^{3.5}\ barn/atom$$

Naći srednji slobodni put γ-kvanata energije 14 keV na kome se oslobađaju K-elektroni u aluminijumu.

C16 Presek za apsorpciju fotona fotoefektom brzo opada sa energijom. Sa porastom energije, međutim, značajno postaje uklanjanje fotona iz upadnog snopa rasejanjem na slobodnim elektronima (Comptonovo rasejanje). Na niskim energijama ($h\nu\ll mc^2$) rasejanje se dobro opisuje i klasično (Thomsonovo rasejanje). Pretpostaviti da ravan linearno polarisan talas pada na slobodan elektron koji pod dejstvom električnog vektora osciluje i zrači energiju brzinom

$$I=\frac{dE}{dt}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2$$

gde je a ubrzanje elektrona. Naći presek po elektronu za ovakav proces (Thomsonov presek).

C17 Totalni presek za Comptonovo rasejanje nepolarisanog snopa γ kvanata opisuje se Klein-Nishinainom formulom:

$$\sigma_c^{\alpha}=2\pi r_e^2\left\{\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left[\frac{2\,(1+\alpha)}{1+2\,\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln(1+2\,\alpha)\right]+\frac{1}{2\,\alpha}\ln(1+2\,\alpha)-\frac{1+3\,\alpha}{(1+2\,\alpha)^2}\right\}\ \text{barn}$$

gde je r_e klasični radijus elektrona a α odnos energije gama kvanta prema masi mirovanja elektrona, $\alpha=\hbar\,\omega/mc^2$.

Naći aproksimativne izraze za presek Comptonovog rasejanja u graničnim slučajevima $\alpha\ll 1$ i $\alpha\gg 1$. Naći preseke za rasejanje gama kvanata od 5 keV i 5 MeV.

C18 Komptonski elektroni energije 0,23 MeV registruju se pod uglom od 30° u odnosu na upadni snop γ zračenja izotopa ^{181}Hf. Naći energiju gama-zračenja.

C19 Kolimisan snop γ zračenja energije 0,15 MeV prolazeći kroz srebrnu foliju debljine 2 mm slabi 4 puta. Naći totalni presek za interakciju γ kvanata sa atomima srebra.

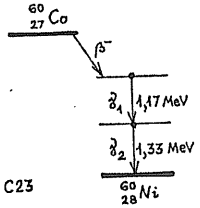
C20 Kolimisan snop gama zraka, koji sadrži jednak broj gama kvanata svih energija u intervalu 800 do 1000 keV pada na Cu ploču debljine 2 cm. Maseni atenuacioni koeficijent Cu za energije 800 i 1000 keV je 0,0654 i 0,0585 cm²/g respektivno. Gustina Cu je 8,93 g/cm². Naći smanjenje intenziteta snopa pri prolazu kroz ploču pretpostavljajući da je u datom intervalu energija atenuacioni koeficijent linearna funkcija energije zračenja.

C21 Tačkasti izvor monohromatskih gama kvanata smešten je u centar sferičnog sloja olova, čija debljina iznosi 4 cm a spoljašnji radijus 6 cm. Aktivnost izvora iznosi 0,5 mCi (na jedan raspad emituje se jedan gama kvant). Energija gama kvanata iznosi 1 MeV a debljina poluapsorpcije olova za ovu energiju gama kvanata iznosi 0,877 cm. Odrediti fluks (broj kvanata/cm²s) nerasejanih gama kvanata na spoljašnjoj površini olovnog ekrana.

C22 Iz jednog izvora emituje se zračenje dveju energija. Debljine poluapsorpcija ovih zračenja stoje u odnosu 1 : 2. Oba zračenja su približno istog intenziteta. Naći

čemu su jednaki njihovi relativni intenziteti posle prolaska kroz apsorbere, čija je debljina jednaka 1, 2, 3, . . . , n debljina poluapsorpcije manje prodornog zračenja.

C23



C23

Izvor ^{60}Co, aktivnosti $A=1$ Ci, okloplјen je olovom čija debljina iznosi tri debljine poluapsorpcije za energiju gama zračenja $E_\gamma=1{,}25$ MeV. Šema raspada ^{60}Co prikazana je na slici. Pretpostavljajući da je $E_{\gamma_1} \simeq E_{\gamma_2} \simeq 1{,}25$ MeV odrediti količinu toplote koja se u jednoj sekundi oslobodi u olovnom oklopu usled apsorpcije gama zračenja.

C24 Pri bombardovanju olovne mete, debljine 20 mg/cm², brzim neutronima (talasne dužine mnogo manje od dimenzija jezgra) dolazi do elastičnog rasejanja. Proceniti poluprečnik jezgra atoma olova ako se od olovne mete rasejava $1{,}4 \times 10^{-4}$ deo upadnog neutronskog snopa.

C25 Pri prolasku teške brze čestice naelektrisanja ze kroz fotoemulziju na jedinici puta čestice obrazuje se ukupno

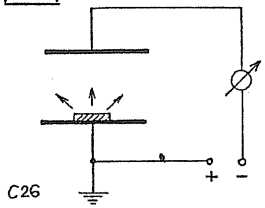
$$N = \frac{2\pi n z^2 e^4}{m_e v^2}\left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{2m_e v^2}\right) \delta \text{ (sekundarnih) elektrona}$$

gde je v brzina upadne čestice, m_e masa elektrona, n koncentracija elektrona u fotoemulziji a T_k minimalna kinetička energija elektrona potrebna za obrazovanje vidljivog traga u foto-emulziji.

Odrediti: a) minimalnu energiju α-čestice potrebnu za formiranje δ-elektrona u fotoemulziji u kojoj je $T_k=12$ keV,

b) Za foto-emulziju sa koncentracijom elektrona $n=10^{24}$ cm^{-3} odrediti pri kojoj energiji α-čestice se formira najveći broj δ-elektrona. Izračunati zatim maksimalan broj δ-elektrona na 1 mm trajektorije α-čestice.

C26



C26

Izvor polonijuma aktivnosti 5 μ Ci postavljen je između obloga kondenzatora, kao što je prikazano na slici. Izvor emituje alfa-čestice izotropno. Kolika je jačina struje koja se meri instrumentom ako se pretpostavi da se svi joni proizvedeni alfa česticama polonijuma sakupljaju na kolektoru? Energija alfa-čestica polonijuma iznosi $E_\alpha=5{,}3$ MeV. Za stvaranje jednog jonskog para potrebna je energija $E_{jp}=35$ eV.

C27 Jonizaciona komora (koja radi u integralnom režimu) ispunjena je vodonikom do pritiska od 10 at. Efektivna zapremina komore iznosi 2 dm³. Komora je ozračena monoenergetskim neutronima energije 1 MeV, a fluksa 10^8 n/cm²s. Pretpostaviti

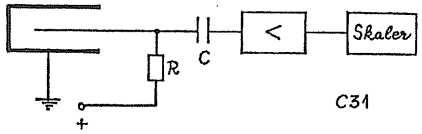
da neutroni u sudarima sa protonima predaju prosečno po 1/2 upadne energije. Kolika je vrednost struje koju daje komora ako je presek za rasejanje neutrona na protonu 5 barna, energija za stvaranje jonskog para 20 eV a komora se nalazi na temperaturi 300°K?

C28 Mezonski fluks na nivou mora iznosi 1 mezon/cm²min. Specifična jonizacija vazduha za mezone pod normalnim uslovima iznosi 100 jonskih parova/cm. Kolika je struja proizvedena u cilindričnoj jonizacionoj komori orijentisanoj u pravcu snopa mezona, ako je prečnik komore 30 cm, visina 50 cm a pritisak u komori 15 at?

C29 Naći vreme za koje pozitivni jon stvoren u neposrednoj blizini anode stigne do zida GM brojača. Prečnik žice je $2a=0{,}013$ cm a prečnik katode $2b=2{,}86$ cm. Primenjen je napon od 1000 V, pritisak gasa je $p=100$ mm Hg a pokretljivost jona pri gradijentu potencijala od 1 V/cm na normalnom pritisku je $\mu=1{,}5$ cm/s.

C30 Koaksijalni proporcionalni brojač ispunjen je argonom do pritiska od 10 mm Hg. Srednji slobodni put elektrona na ovom pritisku iznosi 10^{-2} cm. Spoljašnja elektroda ima prečnik 3 cm a unutrašnja 3×10^{-2} cm. Ako se na anodu (unutrašnja elektroda) dovede napon od 600 V da li brojač radi u proporcionalnom režimu? Srednji jonizacioni potencijal argona je 16 eV.

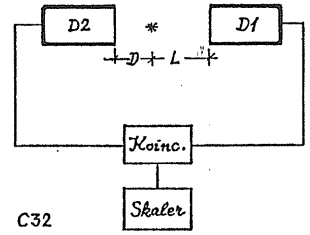
C31 Na slici je prikazano elektronsko kolo impulsne jonizacione komore. Komora se nalazi na atmosferskom pritisku i u nju upadaju alfa-čestice energije 6 MeV. Za stvaranje jednog jonskog para potrebna je energija od 30 eV. Unutrašnji kapacitet



C31

komore iznosi 10 pF. Koliko minimalno pojačanje mora da se ostvari linearnim pojačavačem pa da impulsi na njegovom izlazu budu dovoljni za pobuđenje skalera koji radi sa naponskim impulsima amplitude 3,2 V? Izabrati vrednost spoljašnjeg otpornika (R) tako da vreme trajanja impulsa bude 10^{-4}s.

C32



C32

Dva identična cilindrična detektora nalaze se na rastojanjima $L=10$ cm i $D=8$ cm od tačkastog β izvora apsolutne aktivnosti 8 μ Ci. Prečnik čeone površine detektora je 32 mm. Efikasnost za β čestice je 0,8. Detektori su vezani u koincidentno kolo sa vremenom razlaganja od 200 μ s. Koliko slučajnih koincidentnih događaja registruje ovakav sistem za jedan čas?

C33 Proporcionalni brojač cilindrične geometrije koristi se za detekciju termalnih neutrona. Brojač je ispunjen gasom BF_3 (bortrifluorit). Prirodni bor na svaka 82 atoma izotopa ^{11}B sadrži 18 atoma izotopa ^{10}B. Neutroni se detektuju posredno preko reakcije (n, α) na ^{10}B. (^{11}B i F ne daju reakcije ovog tipa sa termalnim neutronima).

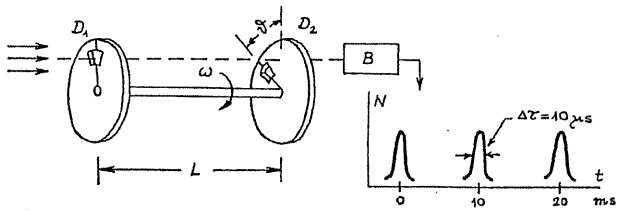
Znajući da efikasni presek za reakciju (n, α) na ^{10}B opada kao $1/v$, gde je v brzina termalnih neutrona i da je njegova vrednost obračunata za prirodan bor i energije neutrona 1 eV, 120 barna, izračunati efikasni presek za reakciju (n, α) na ^{10}B za neutrone energije 9 eV.

Ako paralelan snop monoenergetskih neutrona energije 9 eV prolazi kroz brojač paralelno njegovoj osi izračunati efikasnost detekcije neutrona u snopu. Osetljiva dužina brojača je $L=10$ cm. Gas BF_3 nalazi se na temperaturi od 0°C i pritisku 0,3 at.

Napomena:

Efikasnost detekcije definisati kao verovatnoću za (n, α) reakciju po jednom upadnom neutronu.

C34 Na slici je prikazana uprošćena aparatura za određivanje energije neutronskog snopa (metoda »time of flight«). Dva diska presvučena kadmijumom čvrsto su vezana za osu i mogu da se obrću konstantnom uglovnom brzinom. (Kadmijum ima veliki presek za apsorpciju neutrona). Na diskovima D_1 i D_2 zasečene su pukotine koje su pomerene jedna u odnosu na drugu za ugao ϑ.



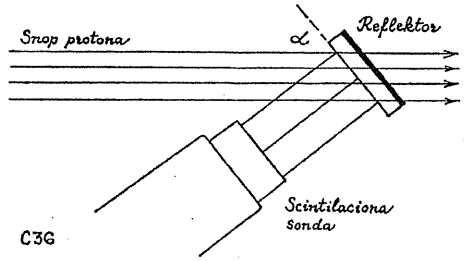
C34

Na slici je dat i vremenski »odgovor« neutronskog brojača B. Znajući da su diskovi jedan od drugog na rastojanju $L=1$ m, da je $\vartheta=6°$ odrediti: a) uglovnu brzinu sistema; b) energiju neutrona; c) uglovnu širinu pukotine.

C35 Čerenkovljevo zračenje proizvedeno je snopom naelektrisanih čestica u transparentnoj plan-paralelnoj pločici indeksa prelamanja $n=1,6$. Čestice padaju normalno na zatamnjenu površinu pločice koja apsorbuje Čerenkovljevo zračenje koje do nje stigne. Druga strana pločice je optički polirana tako da se svetlost koja do nje stigne posle prelamanja usmeruje u fotomultiplikator. Proceniti u kojem intervalu brzina mogu ovakvim sistemom da se analiziraju upadne čestice.

C36 Kristal scintilacione sonde postavljen je paralelno Čerenkovljevom radijatoru, čiji je indeks prelamanja 1,88. Zadnja strana radijatora premazana je tankim slojem

aluminijuma koji reflektuje Čerenkovljevo zračenje. Paralelan snop visoko energetskih protona upada na radijator. Eksperimentalno je utvrđeno da scintilaciona



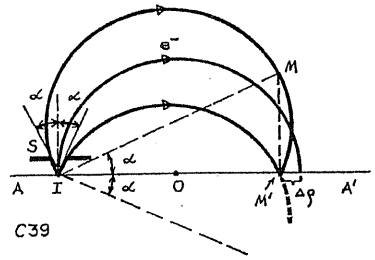
C36

sonda prima najveći fluks Čerenkovljevog zračenja ako je radijator postavljen pod uglom od 51,5° u odnosu na pravac upadnog snopa protona. Kolika je kinetička energija protona?

C37 Naći maksimalnu energiju β-spektra ^{80}Br ako kraj spektra u semicirkularnom magnetnom spektrometru odgovara polju od $H=334,6$ Öe. Radijus krivine trajektorije elektrona koji dospevaju do brojača spektrometra iznosi 25 cm.

C38 Proceniti efikasnost detekcije gama kvanta energije 2 MeV scintilacionim brojačem s kristalom NaJ debljine 2 cm u pravcu puta gama kvanta, ako je linearni koeficijent apsorpcije gama kvanata ove energije 0,18 cm^{-1}. Izračunati takođe maksimalan broj fotona koje emituje kristal pri komptonovskom rasejanju gama kvanta u kristalu ako je konverziona efikasnost kristala za elektrone 10% a srednja energija luminiscentnog fotona 3 eV.

C39



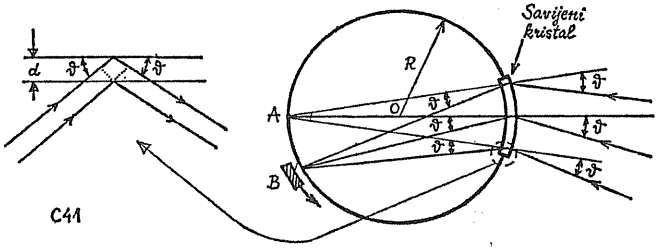
C39

Odrediti moć razlaganja (rezoluciju) magnetskog beta spektrometra sa konstantnim magnetnim poljem normalnim na ravan slike, ako ulazni procep (slit) S dozvoljava samo elektronima, čiji su uglovi $\alpha=\pm 2^0$ u odnosu na pravac normalan na pravu AA' da uđu u spektrometar. Koliko iznosi rezolucija za slučaj kada izvor ima konačnu širinu $x=1$ mm, a poluprečnik putanje elektrona iznosi 30 cm?

C40 Scintilacioni brojač sa kristalom antracena koristi se za detekciju protona energije 1 MeV. Odrediti amplitudu (naponskog) impulsa na anodi fotomultiplikatora ako je kapacitet anode $C=10$ pF, RC konstanta anode velika, konverziona efikasnost antracena (deo upadne energije zračenja koji se pretvara u svetlosnu

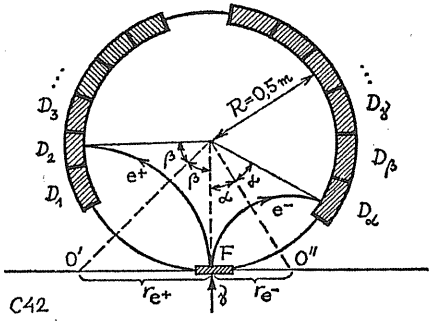
energiju) K_e=2%, faktor kolekcije svetlosti na fotokatodi K_s=50%, faktor konverzije fotokatode K_k=8% (broj fotoelektrona prema broju upadnih fotona), faktor multiplikacije fotomultiplikatora $F_m=10^6$, a talasna dužina svetlosti kojom antracen fluorescira oko 5000 Å.

C41 Vrlo precizna merenja energije gama kvanta moguće je izvesti na kristalnom spektrometru koji radi na principu Braggove interferencije rasejanog snopa gama zračenja. Na slici je prikazana jedna verzija takvog spektrometra izvedenog sa kristalom čija je konstanta rešetke d=4 Å, a poluprečnik krivine kristala jednak dvostrukom poluprečniku »detekcionog kruga« (R=4 m).



U tački B, u kojoj se nalazi prvi interferencioni maksimum postavljen je detektor gama zračenja, ili fotografska ploča. Pokazati da je merenjem dužine luka AB moguće odrediti energiju gama kvanta. Kolika je dužina luka za slabo kolimisan snop gama zraka energije 100 keV?

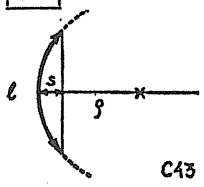
C42 Na slici je prikazan par (elektronsko-pozitronski) spektrometar koji se koristi za merenje energija visoko-energetskih gama kvanata (do 500 MeV). Gama kvant upada normalno na foliju F, kreira par, koji u homogenom magnetnom polju, normalnom na ravan slike opisuje dve kružnice poluprečnika r_{e^+} i r_{e^-}.



Scintilacioni brojači (sa plastičnim scintilatorom) sa leve i desne strane (D_1, D_2, . . . , D_α, D_β . .) vezani su u koincidentna elektronska kola, koja registruju događaje

jedino kada dve čestice padnu istovremeno i to jedna u neki od levih a druga u neki od desnih brojača. Polje normalno na ravan slike iznosi B=2 T, a poluprečnik spektrometra 0,5 m. Pretpostaviti da su čestice istovremeno pale u brojače D_2 i D_α koji se nalaze pod uglovima $2\beta=90°$ i $2\alpha=60°$ u odnosu na upadni pravac gama kvanta. Kolika je energija gama kvanta? (Pretpostaviti da su pozitron i elektron ultrarelativističke čestice).

C43



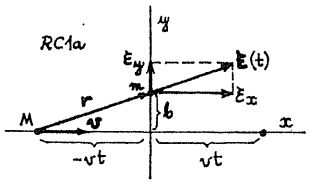
Postavljanje maglene (Wilsonove) ili mehuraste (»bubble«) komore u magnetno polje omogućava da se prema radijusu krivine trajektorije odredi impuls čestice. Kretanje u homogenom polju je kružno (brzina normalna na polje) sa radijusom krivine

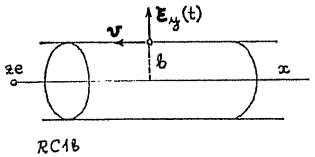
$$\rho=\frac{pc}{eB}.$$

Radijus krivine, pa i impuls, najčešće se određuju posredno, merenjem strele S (»sagitta«) i pripadajućeg luka l. Naći približan izraz za impuls preko veličina S i l za slučaj male zakrivljenosti trajektorije.

RC1 Iz simetrije problema (u položaju $-vt$ i vt) vidi se da je x-komponenta transfera impulsa jednaka nuli pa je:

$$p = p_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e\, \mathcal{E}_y(t)\, dt.$$





RC1b

Vrednost ovog izraza nađimo primenom Gaussove teoreme. Izaberimo cilindričnu Gaussovu površinu radijusa jednakog parametru sudara b. Biće:

$$\int \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y\, 2\pi b\, dx = 4\pi ze$$

tj.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y\, dx = \frac{2ze}{b}.$$

Promena polja $\mathcal{E}_y(t)$ na mestu elektrona ista je kao da se elektron kreće brzinom v po izvodnici cilindra prema čestici ze, tj.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y(x) \frac{dx}{v} = \frac{2ze}{bv}.$$

Tako je impuls elektrona jednak:

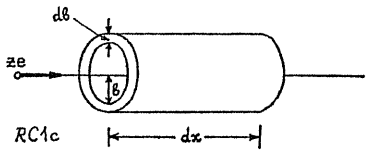
$$p = p_y = \int \mathcal{E}_y\, e\, dt = \frac{2ze^2}{bv}$$

a transfer energije:

$$T_e = \frac{p^2}{2m} = \frac{z^2 e^4}{b^2 T_M} \frac{M}{m} = \frac{2z^2 e^4}{mb^2 v^2}.$$

Ako po cm³ apsorbera ima $N = \frac{Z\rho N_{AV}}{A}$ elektrona, tada je broj elektrona sa parametrom sudara između b i $b+db$ na putu čestice dx jednak:

$$dN = NdV = \frac{Z\rho N_{AV}}{A} 2\pi b\, db\, dx$$



RC1c

pa je gubitak energije čestice na putu dx zbog jonizacije atoma u sloju b, $b+db$, jednak:

$$-dE(b) = T_e\, dN = 2\pi b\, db\, dx \frac{Z\rho N_{AV}}{A} \frac{2z^2 e^4}{mb^2 v^2}.$$

Otud je ukupan gubitak energije na ovom putu na jonizaciju (zasad samo prosti transfer energije elektronima) atoma sredine smeštenih u cilindru sa nekim $b_{\min}$ i $b_{\max}$ jednak:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 N_{AV} \rho Z}{mv^2 A} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \frac{4\pi z^2 e^4 nZ}{mv^2} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

gde je $n = \rho N_{AV}/A$ broj atoma po jedinici zapremine. Minimalnu vrednost parametra sudara nalazimo iz činjenice da je (klasično) maksimalna brzina koju elektron u sudaru može da dobije jednaka $2v$ (za najmanji mogući parametar sudara) te da je maksimalni mogući transfer energije:

$$T_e \leqslant \frac{1}{2} m (2v)^2 = \frac{2z^2 e^4}{mb_{\min}^2 v^2}$$

odnosno:

$$b_{\min} = \frac{ze^2}{mv^2}$$

Maksimalnu vrednost b nalazimo iz nevaženja pretpostavke da je elektron za vreme sudara slobodan. Elektroni su, defakto, vezani, i ako je transfer energije manji od srednjeg jonizacionog potencijala I (za $b > b_{max}$) do gubitka energije neće ni doći. Mora biti, dakle:

$$T_e > I = \frac{2z^2 e^4}{mb_{\max}^2 v^2}$$

odakle je:

$$b_{\max} = \frac{ze^2}{v} \left(\frac{2}{mI}\right)^{1/2}.$$

Tako je konačno:

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{2\pi z^2 e^4 Zn}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{I}, \qquad QEI$$

što je samo za faktor 2 manje od egzaktnijeg izraza (Bohr, 1913).

RC2 Kako je $\beta^2=v^2/c^2=5\times10^{-3}$ to ga svuda u datom izrazu za specifičnu jonizaciju možemo zanemariti. Za vazduh koji je smeša 22% O_2 i 78% N_2 nalazimo da je $\langle Z\rangle\simeq 14$ i $\langle A\rangle\simeq 29$ pa je uz $\rho=1{,}29\times10^{-3}$ g/cm^3

$$N=\frac{\rho}{\langle A\rangle}N_{AV}\langle Z\rangle=3{,}4\times10^{20}\,\mathrm{cm}^{-3}.$$

Tako je:

$$-\frac{dE}{dx}=0{,}6\ \mathrm{MeV\,cm}^{-1}$$

i α-čestica po 1 cm puta jonizuje ~17000 atoma. Domet joj je:

$$R_\alpha=\frac{E}{\left|\frac{dE}{dx}\right|}=16{,}7\ \mathrm{cm}$$

što je znatno veće od empirijskog dometa $R_\alpha^{\mathrm{emp}}\simeq 11$ cm jer smo zanemarili činjenicu da se gustina jonizacije na kraju puta povećava.

RC3 Energija i masa čestice povezani su izrazom $E=Mf(v)$ gde je $f(v)$ neka funkcija brzine. Dakle, izraz za domet u funkciji energije postaje

$$R(E)=\frac{M}{z^2}g\left(\frac{E}{M}\right).$$

Odnos dometa naelektrisane čestice (M_1, Z_1) i dometa protona jednak je, ako je energija čestice $\mathcal{E}$, a energija protona E,:

$$\frac{R_1(\mathcal{E})}{R_p(E)}=\frac{M_1}{M_p}\frac{1}{Z_1^2}\frac{g\left(\frac{\mathcal{E}}{M_1}\right)}{g\left(\frac{E}{M_p}\right)}.$$

Da ovaj količnik ne bi zavisio od nepoznate funkcije $g\left(\frac{E}{M}\right)$ mora da bude ispunjen uslov:

$$\frac{\mathcal{E}}{M_1}=\frac{E}{M_p}\qquad \text{tj.}\qquad E=\frac{M_p}{M_1}\mathcal{E}.$$

Dakle:

$$R_1(\mathcal{E})=\frac{M_1}{M_p}\frac{1}{Z_1^2}R_p\left(\frac{M_p}{M_1}\mathcal{E}\right).$$

RC4 Za fiksni put dx fluktuacija gubitka energije čestice neka bude δE^2, a za fiksni gubitak energije dE neka fluktuacija puta čestice bude δx^2. Tada između dve fluktuacije (puta i gubitka energije) postoji jednostavna veza:

$$\frac{\delta x^2}{dE}=\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-2}\frac{\delta E^2}{dx}.$$

Ukupno osipanje dometa biće:

$$\sigma^2=\frac{\pi}{2}\int_0^{E_0}\frac{d}{dE}(\delta x^2)\,dE=\frac{\pi}{2}\int_0^{E_0}\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-2}\frac{d}{dE}(\delta E^2)\,dE=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{E_0}\frac{d}{dx}(\delta E^2)\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-3}dE.$$

Ako iskoristimo sada Bohr-ovu formulu dobićemo:

$$\sigma^2=\frac{\pi}{2}4\pi z_1^2 z_2 Ne^4\int_0^{E_0}\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-3}dE.$$

Međutim, kako je:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-3}=\frac{1}{(4\pi z_1^2 z_2 e^4)^3}g^{-3}(E)$$

biće:

$$\sigma^2=\frac{\pi}{2}\frac{N}{(4\pi z_1^2 z_2 e^4)^2}\int_0^{E_0}\frac{dE}{g^3(E)}.$$

RC5 Domet čestice i njen specifični gubitak energije dE/dx povezani su izrazom:

$$R=\int_0^{E_0}\frac{dx}{dE}dE$$

gde je E_0 početna energija čestice.
U našem slučaju

$$R=\frac{E_0^{1{,}8}}{81}.$$

Dakle, za energiju od 10 MeV domet je:

$$R_{10}=\frac{10^{1{,}8}}{81}=0{,}78\ \mathrm{m}$$

a domet za energiju od 100 MeV je:

$$R_{100} = \frac{10^{3,6}}{81} = 49 \text{ m}$$

RC6 Budući da se radi o brzoj beta čestici impulsi atomskih elektrona su znatno manji od njenog impulsa, tako da u prvoj aproksimaciji možemo da smatramo da su u odnosu na beta-česticu atomski elektroni slobodni i u miru. Otud je i jasno zašto smo za presek za interakciju uzeli Raderfordov presek koji opisuje elastično rasejanje elektrona impulsa p na elektronu u miru.
Gubitak energije beta čestice na jedinici puta iznosi:

$$-\frac{dE}{dx} = NZ \int E(\vartheta) \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} d\Omega$$

gde je NZ broj elektrona gasa po jedinici zapremine, a $E(\vartheta)$ gubitak energije beta čestica u pojedinačnom sudaru. Veličina $E(\vartheta)$ je povezana sa transferom impulsa $\vec{q}$ izrazom:

$$E(\vartheta) = \frac{\vec{q}^{\,2}}{2m}; \quad |\vec{q}| = |\vec{p'} - \vec{p}| = 2p \sin\frac{\vartheta}{2} \underset{\vartheta \ll 1}{\simeq} p \cdot \vartheta; \quad |\vec{p'}| = |\vec{p}|.$$

Dakle:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi NZe^4 m}{p^2} \int \vartheta^2 \frac{d\vartheta}{\vartheta^4} = \frac{4\pi NZe^4 m}{p^2} \ln \frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_{\min}}.$$

Maksimalni ugao skretanja (ϑ_{max}) određujemo iz uslova da je najveći transfer impulsa u elastičnom rasejanju jednak baš impulsu upadne čestice, tj.:

$$q_{max} = p\,\vartheta_{max} = p$$

odavde zaključujemo da je $\vartheta_{max} \simeq 1$.
Minimalna predaja energije jednaka je srednjoj jonizacionoj energiji atoma $e\bar{I}$. Napišimo zakon održanja energije:

$$e\bar{I} = \frac{1}{2m}(p^2 - p'^2) = \frac{1}{m}\frac{p'+p}{2}(p - p'),$$

pošto se radi o kvazielastičnom rasejanju $p' \simeq p$, a za male uglove $(p - p') \simeq |\vec{p'} - \vec{p}| = q = p\,\vartheta_{min}$;
To jest:

$$e\bar{I} \simeq \frac{1}{m} p^2 \vartheta_{\min},$$

odnosno:

$$\vartheta_{\min} \simeq \frac{e\bar{I}}{pv}.$$

Korišćenjem vrednosti za kritične uglove rasejanja dobijamo sledeći izraz za gubitak energije beta čestice na jediničnom putu:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi NZm \frac{e^4}{p^2} \ln \frac{pv}{e\bar{I}}.$$

RC7 Neka u svakom pojedinačnom sudaru elektrona sa atomom sredine srednji kvadrat ugla skretanja elektrona bude mali i jednak

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \int \vartheta^2 f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Funkciju raspodele elektrona po uglovima za Raderfordovo rasejanje ($f(\vartheta)$) možemo da izrazimo preko diferencijalnog efikasnog preseka na sledeći način:

$$f(\vartheta) = \frac{\dfrac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}\dfrac{d\Omega}{d\vartheta}}{\displaystyle\int \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}\frac{d\Omega}{d\vartheta} d\vartheta} = \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}\frac{d\Omega}{d\vartheta}$$

gde smo sa σ označili totalni efikasni presek, a sa $d\Omega$ prostorni ugao ($d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$).
Dakle:

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{1}{\sigma} \int \vartheta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Big|_{\vartheta \ll 1} = \frac{2\pi}{\sigma}\left(\frac{2ze^2}{mv^2}\right)^2 \int \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{2\pi}{\sigma}\left(\frac{2ze^2}{mv^2}\right) \ln \frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_{\min}}.$$

Pošto smo pretpostavili da je talasna dužina λ^* elektrona manja od poluprečnika jezgra nikakva klasična ocena graničnih uglova (ϑ_{max} i ϑ_{min}) ne dolazi u obzir. Međutim, ako pođemo od izraza za predati impuls u aktu sudara

$$\vec{q} = \vec{p'} - \vec{p},$$

i imajući u vidu da je za elastičan sudar (kakvo je Raderfordovo rasejanje)

$$|\vec{p'}| = |\vec{p}| \quad \text{tj.} \quad q = 2p \sin\frac{\vartheta}{2}\Big|_{\vartheta \ll 1} = p\,\vartheta = \frac{\hbar}{\lambda^*}\vartheta;$$

Dobićemo:

$$\vartheta = \lambda^* \frac{q}{\hbar}.$$

Iskoristimo sada relaciju neodređenosti između impulsa (q) i koordinate (r). U slučaju »dalekog sudara« koji odgovara minimalnoj vrednosti ϑ, elektron se sudara sa atomom kao celinom, koji ima linearne dimenzije približno jednake Borovom radijusu (a_0), tj.:

$$\frac{q}{\hbar} \simeq \frac{1}{a_0} \quad \text{tj.} \quad \vartheta_{\min} = \frac{\lambda^*}{a_0}.$$

U slučaju »bliskog sudara«, kada se elektron sudara sa jezgrom (i kada je ostvaren maksimalni transfer energije) $q/\hbar \simeq 1/R$. (gde je R radijus jezgra).
Prema tome:

$$\vartheta_{\max} \simeq \frac{\lambda^*}{R}.$$

Sada, izraz za srednji kvadrat rasejanja elektrona u pojedinačnom sudaru postaje:

$$\langle\vartheta^2\rangle=\frac{2\pi}{\sigma}\left(\frac{2Ze^2}{mv^2}\right)^2\ln\frac{a_0}{R}.$$

Ako sa n označimo broj sudara elektrona na dužini puta kroz materijal (L), tada je ukupni srednji kvadrat skretanja elektrona zbog višestrukog rasejanja:

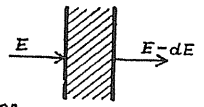
$$\langle\alpha^2\rangle=n\langle\vartheta^2\rangle=\frac{L}{\nu}\langle\vartheta^2\rangle$$

gde je $\nu=1/\sigma N$ dužina slobodnog puta elektrona u materijalu. Krajnji izraz za srednji kvadrat skretanja snopa glasi:

$$\langle\alpha^2\rangle=LN\sigma\langle\vartheta^2\rangle=2\pi N\left(\frac{2ze^2}{mv^2}\right)^2 L\ln\frac{a_0}{R}.$$

RC8 Kao i uvek, gubitak energije dE zavisiće od pređenog puta dx i energije E koju snop ima na ulazu:

$$-dE=k\,E\,dx$$



RC8

Odavde je integracijom:

$$\ln E\Big|_{E_0}^{E}=-kx\Big|_0^x \quad \text{tj.} \quad \ln\frac{E}{E_0}=-kx.$$

Kako je za $x=l_R$, po definiciji, $E=E_0/e$, biće:

$$k=1/l_R$$

tj. konačno:

$$E(x)=E_0\,e^{-x/l_R}$$

Početnu relaciju sada možemo pisati kao: $-\frac{dE}{dx}=\frac{E}{l_R}$.

Ako je gubitak energije dE na putu dx uslovljen emisijom $\Phi(\nu)\,d\nu=d\sigma$ fotona zakočenog zračenja sa učestanostima između ν i $\nu+d\nu$ biće očigledno:

$$-\frac{dE}{dx}=N\int_0^{\nu_{max}}h\nu\,\Phi(\nu)\,d\nu=N\int_0^{\nu_{max}}h\nu\,d\sigma=\frac{E}{l_R}=\frac{h\nu}{l_R}$$

gde je N broj atoma/cm³. Tako je:

$$\frac{d(h\nu)}{l_R}=N\,h\nu\,d\sigma$$

odnosno:

$$\sigma=\frac{1}{Nl_R}\int_{E_1=h\nu_1}^{E_0=h\nu_0}\frac{d(h\nu)}{h\nu}=\frac{1}{Nl_R}\ln\frac{E_0}{E_1}=\frac{1}{Nl_R}\ln\frac{\nu_0}{\nu_1}$$

što je i traženi rezultat. Za konkretan slučaj biće:

$$l_R=\frac{l_R\,(g\cdot\mathrm{cm}^{-2})}{\rho\,(g\cdot\mathrm{cm}^{-3})}=1{,}7\ \mathrm{cm}\quad\text{i}\quad N=\frac{\rho}{A}N_{AV}=8{,}4\times10^{22}\ \mathrm{cm}^{-3}$$

pa je:

$$\sigma=\frac{\ln 2}{Nl_R}=4{,}8\ \text{barn}.$$

RC9 Kako je $l_R=1{,}435$ cm > debljine d, to elektron gubi energiju samo jednom interakcijom i energija kvanta zakočnog zračenja treba da bude u intervalu $0{,}25\,E<h\nu<0{,}5\,E$. U skladu sa rezultatom prethodnog zadatka presek za ovakav proces je:

$$\sigma=\frac{1}{Nl_R}\int_{0{,}25}^{0{,}5}\frac{d(h\nu)}{h\nu}=\frac{\ln 2}{Nl_R}$$

i totalna verovatnoća:

$$W=\sigma Nd=\frac{d}{l_R}\ln 2=0{,}145\simeq 15\%$$

što je relativno velika verovatnoća. Preseci zakočnog zračenja u naizmeničnoj kombinaciji sa proizvodnjom parova odgovorni su za pojave »pljuskova« u kosmičkom zračenju upravo zbog ove velike verovatnoće za emisiju visokoenergetskih kvanata zakočnog zračenja.

RC10 Polazeći od izraza za specifični gubitak energije elektrona na zakočno zračenje dobijamo:

$$-\frac{dE}{E}=\frac{dx}{A}$$

gde je

$$A=4\,z^2\,\alpha\,NEr_e^2\ln\frac{180}{z^{1/3}}.$$

Integracijom se dobija:

$$E=E_0\,e^{-x/A}.$$

Ako je

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1}{2}$$

tada se za debljinu materijala (x_0) dobija:

$$x_0=A\ln 2=4\,z^2\,\alpha\,NEr_e^2\ln 2\ln\frac{180}{z^{1/3}}.$$

RC11 Korišćenjem datog izraza biće:

$$-\frac{dE}{dt}=I=\frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^5}(\vec{v}\times\vec{B})^2=\frac{2e^4B^2\sin^2\vartheta}{3m^2c^5}v^2\gamma^2$$

a kako je

$$v^2=\frac{1}{\gamma^2}c^2(\gamma^2-1) \quad \text{i} \quad \gamma=\frac{E}{mc^2}$$

to je:

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{2e^4B_\perp^2}{3m^2c^3}\left\{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2-1\right\}.$$

Za ultrarelativističku česticu sa $E\gg mc^2$ biće konačno

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{2e^4B_\perp^2}{3m^4c^7}E^2.$$

Intenzitet sinhrotronskog zračenja je, dakle, obrnuto proporcionalan četvrtom stepenu mase čestice; proton zrači $(m_p/m_e)^4\simeq 10^{13}$ slabije od elektrona. Praktično samo elektroni trpe značajne gubitke na ovu vrstu zračenja!

RC12 Zakoni održanja glase:

$$E=\hbar\omega+E_1$$

$$p=\frac{\hbar\omega}{c_1}\cos\vartheta+p_1\cos\varphi$$

$$\frac{\hbar\omega}{c_1}\sin\vartheta=p_1\sin\varphi.$$

Kvadriranje treće i druge jednačine respektivno, daje:

$$\cos^2\varphi=1-\frac{\hbar^2\omega^2}{c_1^2p_1^2}\sin^2\vartheta$$

i

$$p^2-p_1^2=2p\frac{\hbar\omega}{c_1}\cos\vartheta-\frac{\hbar^2\omega^2}{c_1^2}. \qquad (*)$$

Korišćenjem veze $E=(c^2p^2+m^2c^4)^{1/2}$ i prve jednačine je:

$$p-p_1^2=\frac{E^2-E_1^2}{c^2}=\frac{2E\hbar\omega-\hbar^2\omega^2}{c^2}$$

pa peta jednačina(*) uz $\vec{p}=\frac{E}{c^2}\vec{v}$ i $c=nc_1$, posle malih transformacija daje:

$$\cos\vartheta=\frac{c_1}{v}\left\{1+\frac{\hbar\omega(n^2-1)}{2E}\right\}.$$

Kako je $\hbar\omega\ll E$ to je konačno:

$$\cos\vartheta\simeq\frac{c_1}{v}. \qquad \text{QED}$$

RC13 Integracija date spektralne distribucije u određenom intervalu učestanosti daće nam direktno specifičan gubitak energije elektrona na emisiju Čerenkovljevog zračenja iz tog intervala:

$$-\frac{dE}{dx}=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\hbar\omega N(\omega)\,d\omega=\frac{e^2}{c^2}\sin^2\vartheta\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega\,d\omega.$$

Kako je

$$\sin^2\vartheta=1-\cos^2\vartheta=1-\frac{c_1^2}{v^2}=1-\frac{1}{n^2\beta^2}$$

biće dalje:

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\left(\frac{\omega_2^2}{2}-\frac{\omega_1^2}{2}\right)=2\pi^2e^2\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

što je i traženi opšti izraz za specifični gubitak energije. Kako je u našem slučaju $E=1$ MeV i $\beta^2=1-\frac{1}{\left(1+\frac{E}{mc^2}\right)^2}=0{,}886$ to je

$$-\frac{dE}{dx}=47\ \text{eV/cm}.$$

RC14 Za proces:

$$e^++e^-\to\gamma_1+\gamma_2$$

možemo da napišemo zakone održanja energije i impulsa kvadrivektorskom jednačinom:

$$\mathfrak{p}_{e+}+\mathfrak{p}_{e-}=\mathfrak{p}_{\gamma_1}+\mathfrak{p}_{\gamma_2}.$$

Kvadriranjem ovog izraza dobijamo:

$$\mathfrak{p}_{e+}^2+\mathfrak{p}_{e-}^2+2\,\mathfrak{p}_{e+}\,\mathfrak{p}_{e-}=\mathfrak{p}_{\gamma_1}^2+\mathfrak{p}_{\gamma_2}^2+2\,\mathfrak{p}_{\gamma_1}\mathfrak{p}_{\gamma_2}.$$

Kako je:

$$\mathfrak{p}_{e+}^2=\mathfrak{p}_{e-}^2=-m_e^2$$

$$\mathfrak{p}_{\gamma_1}^2=\mathfrak{p}_{\gamma_2}^2=0$$

i

$$\mathfrak{p}_{e+}\,\mathfrak{p}_{e-}=\vec{p}_{e+}\cdot\vec{p}_{e-}-E_{e+}E_{e-}=-m_e(T+m_e)$$

jer je elektron u miru.
Imaćemo:

$$-\mathfrak{p}_{\gamma_1}\mathfrak{p}_{\gamma_2}=m_e(T+2m_e)$$

$$-\mathfrak{p}_{\gamma_1}\mathfrak{p}_{\gamma_2}=-p_{\gamma_1}p_{\gamma_2}\cos\vartheta+E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}=E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}(1-\cos\vartheta),$$

(jer je $E_\gamma=p_\gamma$).

Dakle:

$$1-\cos\vartheta=\frac{m_e(T+2m_e)}{E_{\gamma_1}E_{\gamma_2}}. \qquad \text{(RC14.1)}$$

Zakon održanja energije i zahtev zadatka da energije dva gama kvanta budu jednake daje uslov:

$$2E_\gamma=E_{\gamma_1}+E_{\gamma_2}=T_e+2m_e. \qquad (E_{\gamma_1}=E_{\gamma_2}=E) \qquad \text{(RC14.2)}$$

Kombinovanjem jednačina (RC14.1) i (RC14.2) dobija se:

$$\sin\frac{\vartheta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{T}{2m_e}}}.$$

U našem slučaju $\vartheta\simeq 100°$.
Maksimalni ugao između dva kvanta dobija se u slučaju kada je energija pozitrona $T=0$ i iznosi $\vartheta=180°$.

RC15 Po datom izrazu nalazimo da je

$$\sigma_K\simeq 910 \text{ barn/atom}.$$

Srednji slobodni put $\langle l\rangle$ definisan je kao debljina materijala posle koje početni intenzitet opadne e puta, tj.:

$$\frac{J_0}{e}=J_0e^{-\mu\langle l\rangle}$$

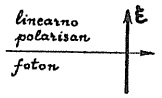
odakle je $\langle l\rangle=\frac{1}{\mu}$. Kako je

$$\mu=N\sigma=\frac{\rho}{A}N_{AV}\sigma\simeq 54{,}5 \text{ cm}^{-1}$$

nalazimo da je

$$\langle l\rangle=\frac{1}{\mu}=0{,}0185 \text{ cm}.$$

RC16 Ako je $\vec{a}$ ubrzanje elektrona biće:



RC16

elektron
m tj.

$$e\vec{\mathcal{E}}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\frac{e}{m}\vec{\mathcal{E}}$$

pa je srednja izražena snaga od strane elektrona jednaka:

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\frac{2}{3}\frac{e^4}{c^3m^2}\langle\mathcal{E}^2\rangle.$$

Ova je energija oduzeta od upadnog talasa čiji je intenzitet

$$I_0=\frac{c}{4\pi}\langle\mathcal{E}^2\rangle \qquad (\text{erg cm}^{-2}\text{ s}^{-1})$$

pa ponovo izračena u 4π i može se izraziti preko preseka po elektronu definisanom kao:

$$\sigma_T I_0=\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle.$$

Ova je definicija ekvivalentna tvrdnji da sva energija koja padne na površinu σ_T biva apsorbovana pa ponovo izračena u 4π čime je za upadni snop defakto izgubljena.
Tako je:

$$\sigma_T=\frac{\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle}{I_0}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2=\frac{8\pi}{3}r_e^2=0{,}66 \text{ barn/elektron}$$

gde je $r_e=2{,}8\times10^{-13}$ cm klasični radijus elektrona. Vidimo da rezultat ne zavisi od učestanosti (energije) fotona što je u protivurečnosti sa eksperimentom ali se za male energije fotona dobro slaže sa egzaktnom Klein-Nishina formulom.

RC17 Za $\alpha\ll 1$ važiće razvoji:

$$(1+2\alpha)^{-n}=1-2n\alpha+\frac{n(n+1)}{2!}(2\alpha)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}(2\alpha)^3+\cdots$$

i

$$\ln(1+2\alpha)=2\alpha-\frac{(2\alpha)^2}{2}+\frac{(2\alpha)^3}{3}-\frac{(2\alpha)^4}{4}+\cdots$$

Sređujući izraz i zadržavajući se samo na članovima linearnim po α dobijamo:

$$\sigma_c^{\alpha\ll1}\simeq 2\pi r_e^2\left\{\frac{\alpha^2-2\alpha-2}{2\alpha^3}\ln(1+2\alpha)+\frac{\alpha^3+9\alpha^2+8\alpha+2}{\alpha^2(1+2\alpha)^2}\right\}$$

$$=2\pi r_e^2\left\{\left(\frac{1}{2}\alpha^{-1}-\alpha^{-2}-\alpha^{-3}\right)\left(2\alpha-2\alpha^2+\frac{8}{3}\alpha^3-4\alpha^4\right)+\frac{\alpha^3+9\alpha^2+8\alpha+2}{\alpha^2(1+2\alpha)^2}\right\}$$

$$\simeq\frac{8}{3}\pi r_e^2(1-2\alpha)=\sigma_T(1-2\alpha)=0{,}66(1-2\alpha) \text{ barn}.$$

Za $\alpha\gg1$ biće:

$$\frac{1+\alpha}{\alpha}\simeq 1, \qquad \frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}\simeq 1, \qquad \frac{1}{\alpha}\ln(1+2\alpha)\simeq\frac{\ln 2\alpha}{\alpha}$$

pa je:

$$\sigma_c^{\alpha\gg 1} = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 2}{2\alpha^3} \ln(1+2\alpha) + \frac{\alpha^3 + 9\alpha^2 + 8\alpha + 2}{\alpha^2 (1+2\alpha)^2} \right\}$$

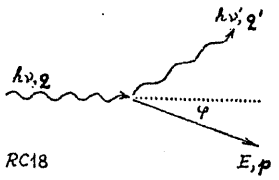
$$\simeq \pi r_e^2 \frac{1}{\alpha} \left(\ln 2\alpha + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \sigma_T \frac{1}{\alpha} \left(\ln 2\alpha + \frac{1}{2} \right) = 0{,}2475 \frac{1}{\alpha} \left(\ln 2\alpha + \frac{1}{2} \right) \text{ barn.}$$

Iz ovih izraza nalazimo da su preseci za date energije:

$$\sigma_c^{0{,}01} \simeq \sigma_T = 0{,}67 \text{ barn} \quad \text{i} \quad \sigma_c^{10} \simeq 0{,}09 \text{ barn.}$$

RC18 Kako je:

$$q' = \frac{h\nu'}{c} = \frac{h\nu - E}{c}$$



RC18

iz

$$q'^2 = q^2 + p^2 - 2qp\cos\varphi$$

biće:

$$h\nu = \frac{mc^2}{\left\{ 1 + \frac{2mc^2}{E} \right\}^{1/2} \cos\varphi - 1} \simeq 0{,}5 \text{ MeV.}$$

RC19 Kako je

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{4} = e^{-\mu x} \qquad \text{sa} \qquad \mu = \mu_{\text{foto}} + \mu_{\text{compton}}$$

nalazimo da je:

$$\mu = 6{,}9 \text{ cm}^{-1},$$

a kako je apsorpcioni koeficijent posledica interakcija na N atoma/cm^3 sa nekim srednjim presekom (verovatnoćom) σ, tj.:

$$\mu = N\sigma = \frac{\rho}{A} N_{AV} \sigma$$

to je:

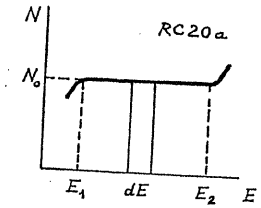
$$\sigma = \sigma_{\text{foto}} + \sigma_{\text{compton}} = \frac{\mu A}{\rho N_{AV}} \simeq 120 \text{ barn/atom.}$$

RC20 Početni intenzitet J_0 (videti sliku) jednak je:

$$J_0 = N_0 (E_2 - E_1)$$

odakle je:

$$N_0 = \frac{J_0}{E_2 - E_1}.$$



Dalje je:

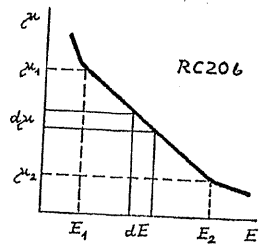
$$dJ_0 = N_0\, dE$$

$$= \frac{J_0}{E_2 - E_1} dE. \qquad (1)$$

Smanjenje diferencijalnog intenziteta dJ_0 iznosi:

$$dJ = dJ_0\, e^{-\mu x}$$

$$= \frac{J_0}{E_2 - E_1} e^{-\mu x} dE. \qquad (2)$$



Sa slike se vidi da je:

$$\frac{d\mu}{dE} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{E_2 - E_1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{E_2 - E_1}$$

tj.:

$$dE = \frac{E_2 - E_1}{\mu_1 - \mu_2} d\mu.$$

Jednačina za dJ sada se može napisati u obliku:

$$dJ = \frac{J_0}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu x} d\mu$$

Integracijom gornje jednačine dobija se:

$$J = \int_{E_1}^{E_2} dJ = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dJ = \frac{-J_0}{x(\mu_1 - \mu_2)} (e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x}) \qquad (3)$$

gde je μ_i (i=1, 2) linearni atenuacioni koeficijent a x debljina apsorbera. U zadatku su dati maseni atenuacioni koeficijenti. Veza između linearnog (μ) i masenog (μ_m) atenuacionog koeficijenta data je relacijom:

$$\mu = \mu_m \rho$$

gde je sa ρ označena gustina apsorbera. Na taj način izraz za J može se, konačno, napisati u obliku:

$$J = \frac{-J_0}{x\rho(\mu_m^1 - \mu_m^2)} \left(e^{-\mu_m^1 \rho x} - e^{-\mu_m^2 \rho x} \right).$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se: $J = 0{,}33\, J_0$.

RC21 Fluks gama kvanata na spoljašnjoj površini olovnog ekrana jednak je:

$$\Phi = \frac{J}{4\pi r^2}$$

gde je J — broj nerasejanih gama kvanata koji u 1 s prođu kroz spoljašnju površinu ekrana a r spoljašnji radijus ekrana. Kako je:

$$J = J_0 e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} x}$$

sledi da je:

$$\Phi = \frac{J_0 e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} x}}{4\pi r^2}$$

gde je J_0 — broj gama kvanata koje izvor emituje u 1 s, $d_{1/2}$ — debljina poluapsorpcije a x debljina olovnog apsorbera.
Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$\Phi = 1{,}73 \times 10^3 \ \gamma/\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}.$$

RC22 Intenziteti zračenja I_1 i I_2 posle prolaska kroz apsorber debljine x iznosiće:

$$I_1 = I_{01} e^{-\mu_1 x} = I_{01} e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} x} = I_{01} 2^{-\frac{x}{d_1}}$$

$$I_2 = I_{02} e^{-\mu_2 x} = \quad \ldots \quad = I_{02} 2^{-\frac{x}{d_2}}$$

gde su: μ_i ($i=1, 2$) koeficijent slabljenja a d_i ($i=1, 2$) debljina poluapsorpcije. Uzimajući u obzir da je $I_{01} \simeq I_{02}$ odnos intenziteta I_1 i I_2 biće jednak:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-x\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)}.$$

Iz uslova zadatka sledi da je:

$$d_2 = 2\, d_1.$$

Prema tome, izraz za I_1/I_2 (relativni intenzitet) može se napisati u obliku:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{-\frac{x}{2d_1}}.$$

Za vrednosti debljina apsorbera $x = d_1, 2d_1, \ldots, nd_1$ relativni intenzitet I_1/I_2 iznosi: $1/\sqrt{2}, (1/\sqrt{2})^2, \ldots, (1/\sqrt{2})^n$ respektivno.

RC23 Sa šeme raspada ^{60}Co vidi se da beta minus raspad jezgra ^{60}Co sledi kaskadna emisija dva gama fotona ^{60}Ni. Ako se u olovnom oklopu svake sekunde apsorbuje J_{ap}^1 fotona energije E_{γ_1} i J_{ap}^2 fotona energije E_{γ_2} tada će energija oslobođena u 1s u olovnom oklopu (tj. snaga) iznositi:

$$W = J_{ap}^1 E_{\gamma_1} + J_{ap}^2 E_{\gamma_2}.$$

Uzimajući u obzir pretpostavku da je $E_{\gamma_1} \simeq E_{\gamma_2} = E = 1{,}25$ MeV i da su početni intenziteti fotona J_0^1 i J_0^2 jednaki sledi da je:

$$J_{ap}^1 = J_{ap}^2 = J_{ap}.$$

S druge strane imamo da je:

$$J_{ap} = J_0 - J_0 e^{-\mu x} = J_0\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{d_{1/2}} 3 d_{1/2}}\right) = \frac{7}{8} J_0$$

gde je J_0 početni intenzitet koji je (ako se zanemari interna konverzija) brojno jednak aktivnosti izvora (A).
Prema tome, konačno se dobija:

$$W = \frac{7}{8} AE = 8{,}1 \ \mathrm{MeVs}^{-1} = 3{,}1 \ \mathrm{mcal\ s}^{-1}.$$

RC24 Slabljenje intenziteta neutronskog snopa iznosi:

$$\frac{\Delta J}{J_0} = -\mu_m \Delta d_m$$

gde su μ_m maseni atenuacioni koeficijent a Δd_m površinska gustina mete.
Presek za elastično rasejanje (σ) povezan je sa masenim atenuacionim koeficijentom (μ_m) izrazom:

$$\mu_m = \frac{N_{AV}}{\mathrm{M}} \sigma$$

gde je N_{AV} Avogadrov broj a M masa gram atoma olova.
S druge strane između preseka za elastično rasejanje i poluprečnika jezgra (za slučaj kada je talasna dužina λ neutrona mnogo manja od poluprečnika jezgra R) postoji veza:

$$\sigma \simeq R^2 \pi.$$

Kombinujući gornja tri izraza dobija se:

$$R \simeq \sqrt{\frac{M(\Delta J/J_0)}{\pi N_{AV} \Delta d_m}} = 8{,}8 \times 10^{-13} \ \mathrm{cm}.$$

RC25 a) Da bi broj δ-elektrona bio različit od nule mora da bude ispunjen uslov

$$T_k \leqslant 2 m_e v^2$$

gde je v brzina upadne alfa-čestice.
Odavde, u nerelativističkoj aproksimaciji, lako nalazimo minimalnu energiju alfa čestice:

$$E_\alpha^{\min} = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 = \frac{m_\alpha}{4 m_e} T_k = 22 \ \mathrm{MeV}.$$

b) Energiju alfa čestice pri kojoj se formira maksimalan broj δ-elektrona na jedinici dužine dobijamo iz uslova

$$\frac{\partial N}{\partial E_\alpha}=0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial N}{\partial v^2}=0$$

i

$$E_\alpha=\frac{1}{2}\frac{m_\alpha}{m_e}T_k=44\ \text{MeV}.$$

Na ovoj energiji broj δ-elektrona na 1 mm iznosi:

$$N_\delta=\frac{\pi n Z^2 e^4}{T_k^2}\simeq 185\ \text{mm}^{-1}.$$

RC26 Alfa-čestica energije E obrazuje ukupno $\frac{E}{E_{jp}}$ jonskih parova. Ako ovu veličinu pomnožimo sa naelektrisanjem elektrona (e) i sa brojem čestica koje upadaju u kondenzator u jedinici vremena dobićemo jačinu električne struje. Za slučaj koji je prikazan na slici jačina struje iznosi:

$$i=\frac{1}{2}A\frac{E}{E_{jp}}e=2{,}24\times 10^{-9}\ \text{A}$$

gde je A aktivnost izvora a faktor 1/2 dolazi zbog (tzv. 2π geometrije) toga što samo jedna polovina emitovanih alfa čestica dospeva u kondenzator.

RC27 Broj neutrona koji dospe u jedinici vremena u jonizacionu komoru iznosi ΦS, gde je Φ fluks neutrona, a S detekciona površina komore. Verovatnoća da jedan neutron interaguje sa atomima vodonika u komori iznosi:

$$W=\sigma n$$

gde je n broj atoma vodonika po jedinici površine,

$$n=\frac{1}{S}\left(\frac{pV}{kT}\right) \qquad (k\text{-Boltzmannova konstanta})$$

Dakle, ukupan broj interakcija neutron-atom vodonika u jedinici vremena iznosi:

$$N=\Phi SW=\sigma\Phi\left(\frac{pV}{kT}\right).$$

Ukupna struja u komori jednaka je:

$$i=eN\frac{E}{E_{jp}}\varepsilon=e\ \frac{E}{E_{jp}}\sigma\Phi\frac{pV}{kT}=9{,}6\times 10^{-7}A$$

gde je E energija neutrona, ε faktor konverzije neutronske energije a E_{jp} energija potrebna za stvaranje jednog jonskog para.

RC28 Ako je specifična jonizacija vazduha za mezone po jedinici dužine η, jedan mezon će na dužini komore (L) stvoriti ukupno:

$$n=\eta L\frac{p_k}{p_a} \qquad \text{jonskih parova}$$

gde su: p_k pritisak u komori, a p_a atmosferski (normalni) pritisak. Kako u komoru u jednoj sekundi dospeva ΦS mezona (S je površina komore) ukupna struja biće jednaka:

$$i=\frac{\pi}{4}e\eta L S^2\Phi\,(p_k/p_a)=1{,}4\times 10^{-13}\ \text{A}.$$

RC29 Poslužimo se Gaussovom teoremom da bismo našli polje u brojaču u funkciji rastojanja r. Za Gaussovu površinu izaberimo cilindar radijusa r i dužine l. Biće:

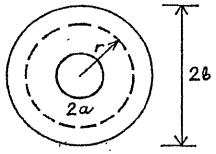
$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q}{\varepsilon_0 2\pi rl}=\frac{\text{const}}{r}=\frac{dV}{r}$$

pa je razlika potencijala

$$V=\text{const}\int_a^b\frac{dr}{r}=\text{const}\ln\frac{b}{a}$$

odakle je:

$$\text{const}=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}} \quad \text{i} \quad E(r)=\frac{V}{r\ln\frac{b}{a}}.$$



RC29

Brzina jona u ovom polju i na datom pritisku biće:

$$v(r)=\frac{dr}{dt}=\frac{\mu E}{p}=\frac{\mu V}{p\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{K}{r}$$

a odatle je:

$$\int_a^b rdr=\int_0^T Kdt$$

pa je traženo vreme:

$$T=\frac{1}{2K}(b^2-a^2)=\frac{(b^2-a^2)p\ln\frac{b}{a}}{2\mu V}\simeq 500\,\mu s.$$

RC30 Električno polje unutar koaksijalnog cilindra spoljašnjeg prečnika $2b$, na rastojanju x od anode prečnika $2a$ iznosi:

$$E=\frac{V_0}{x\ln\frac{b}{a}}$$

gde je V_0 napon između elektroda.

Na slobodnoj dužini puta λ blizu anode električno polje saopšti elektronu energiju od:

$$W = e\int_a^{a+\lambda} E\,dx = \frac{eV_0}{\ln\frac{b}{a}} \ln\frac{\lambda+a}{a} \simeq 37 \text{ eV}$$

Ova energija je veća od srednjeg jonizacionog potencijala argona (16 eV) tako da će doći do intenzivne lavinske jonizacije gasa. Zaključujemo da ovaj brojač ne radi u proporcionalnoj oblasti.

RC31 Pri prolasku kroz jonizacionu komoru jona vazduha napon na elektrodama promeni se za iznos

$$V_0 = \frac{e}{C}\,\frac{E}{E_{jp}} = 3{,}2 \times 10^{-3}\text{ V}$$

gde je C unutrašnji kapacitet komore, E energija upadne čestice a E_{jp} energija potrebna za stvaranje jonskog para.
Pojačanje linearnog pojačavača jednako je:

$$A = \frac{V_f}{V_0} \quad \text{i uz} \quad V_f = 3{,}2\text{ V} \quad \text{biće} \quad A = 1000.$$

Osipanje naponskog impulsa uslovljenog prolaskom alfa čestice možemo približno da prikažemo izrazom

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pošto želimo da ograničimo trajanje impulsa na 10^{-4} s mora biti zadovoljen uslov:

$$10^{-4} \simeq RC$$

Dakle, odvodni otpornik treba da ima vrednost: $R \simeq 10$ MΩ.

RC32 Neka se u trenutku vremena t odigra akt detekcije u brojaču 1. Skaler će registrovati slučajnu koincidenciju jedino ako se u vremenskom intervalu $(t-\tau, t+\tau)$ (gde je τ vreme razlaganja koinc. kola) odigra i akt detekcije u brojaču 2. Stvarni broj događaja koji može da registruje svaki brojač u jedinici vremena (bez koincidentnog kola) jednak je

$$N_1 = \varepsilon A \frac{\Omega_1}{4\pi} = \frac{\varepsilon A}{16}\,\frac{d^2}{L^2}$$

$$N_2 = \varepsilon A \frac{\Omega_2}{4\pi} = \frac{\varepsilon A}{16}\,\frac{d^2}{D^2}$$

gde su: A aktivnost izvora, ε efikasnost za detekciju beta čestica a d prečnik ulaznog otvora brojača.

Verovatnoća da se desi n događaja u brojaču 2 u intervalu vremena 2τ data je Poissonovom raspodelom

$$P(n) = \frac{(M_2)^n}{n!} e^{-M_2}$$

gde je M_2 srednji broj događaja u ovom vremenskom intervalu.
M_2 možemo da izrazimo preko vremena razlaganja 2τ i srednjeg broja stvarnih događaja N_2, tj.:

$$M_2 = 2\tau N_2.$$

Verovatnoća da se desi bar jedan akt detekcije u ovom vremenskom intervalu jednaka je:

$$P(n \geqslant 1) = 1 - P(n=0) = 1 - e^{-2\tau N_1} \simeq 2\tau N_2.$$

Dakle, na svaki akt detekcije brojača 1 (a ima ih ukupno N_1) može da se dogodi $2\tau N_2$ koincidentnih događaja u brojaču 2. Zaključujemo da je ukupan broj slučajnih koincidencija za vreme t jednak:

$$N_{sc} = 2\tau N_1 N_2 t = \frac{\tau \varepsilon^2 A^2 d^4 t}{128\, L^2 D^2} = 5{,}1 \times 10^6 \text{ događaja/h.}$$

RC33 Neka snop monoenergetskih neutrona fluksa Φ pada na uzorak prirodnog bora debljine dx. Ovaj snop proizvešće dN reakcija (n, α) u jedinici vremena po jedinici površine uzorka, tj.:

$$dN = \Phi\, n_B\, \sigma_B\, dx$$

gde je n_B broj atoma bora po jedinici zapremine.
U stvarnosti samo ^{10}B učestvuje u reakciji (n, α). Dakle:

$$dN = \Phi\, n_{10_B}\, \sigma_{10_B}\, dx.$$

Upoređujući gornje relacije, zaključujemo da je:

$$n_B\, \sigma_B = n_{10_B}\, \sigma_{10_B}$$

tj.:

$$\sigma_{10_B}(1\text{ eV}) = \sigma_B(1\text{ eV})\frac{n_B}{n_{10_B}} = 667 \text{ barn.}$$

Kako efikasni presek za reakciju (n, α) opada kao $1/v$, odnosno $1/\sqrt{T}$, gde je T kinetička energija neutrona, za dve kinetičke energije neutrona T_1 i T_2 možemo da napišemo:

$$\sigma(T_1)\sqrt{T_1} = \sigma(T_2)\sqrt{T_2}.$$

U zadatku biće:

$$\sigma_{10_B}(9\text{ eV}) = \sigma_{10_B}(1\text{ eV})\sqrt{\frac{1}{9}} = 222 \text{ barn.}$$

Označimo sa I_0 intenzitet snopa neutrona na ulazu u proporcionalni brojač. Posle dužine L, snop će da oslabi na vrednost

$$I = I_0\, e^{-\mu L}$$

gde je μ koeficijent slabljenja ($\mu = n_{10_B}\, \sigma_{10_B}$).

Efikasnost detekcije jednaka je:

$$\varepsilon = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-n_{10B}\,\sigma_{10B}\,L}.$$

Broj atoma ^{10}B nalazimo preko molarne zapremine V_m, Avogadrovog broja N_{AV}, i odnosa atmosferskog pritiska (p_a) i pritiska u detektoru (p_d)

$$n_{10B} = \frac{N_{AV}}{V_m}\,\frac{p_d}{p_a}\left(\frac{n_{10B}}{n_B}\right) = 1{,}45 \times 10^{18}\ \text{jezgara/cm}^3.$$

Dakle:

$$n_{10B}\ \sigma_{10B}\ L = 3{,}21 \times 10^{-3}.$$

Odnosno, efikasnost je:

$$\varepsilon \simeq 3{,}4 \times 10^{-3}.$$

RC34 a) Neutroni dospevaju u detektor B posle svakog punog obrta sistema diskova. Sa slike se vidi da obrtaj traje $\tau = 10$ ms. Dakle uglovna brzina sistema iznosi:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 628\ \text{rad/s}.$$

b) Vreme preleta neutrona (na konstantnoj uglovnoj brzini ω) jednako je vremenu potrebnom pukotini na disku D_2 da opiše ugao ϑ. Iz ovog uslova nalazimo brzinu i energiju neutrona:

$$v = \omega\,\frac{L}{\vartheta},$$

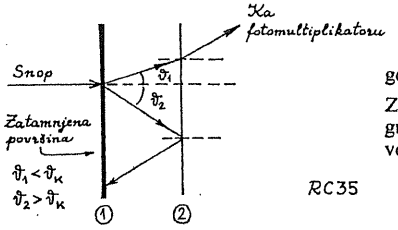
$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,mc^2\left(\frac{\omega L}{\vartheta c}\right)^2 = 0{,}19\ \text{eV}.$$

c) Ako širinu pukotine izrazimo uglom $\Delta\vartheta$ imaćemo:

$$\Delta\vartheta = 2\pi\,\frac{\Delta\tau}{\tau} = 0{,}36$$

gde je $\Delta\tau$ trajanje neutronskog »impulsa«.

RC35 Čerenkovljevo zračenje emitovano u pravcu ϑ u odnosu na upadni pravac čestica zadovoljava uslov



RC35

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\beta n}$$

gde je $\beta = v/c$ brzina upadnih čestica.

Za dati indeks prelamanja minimalna moguća brzina čestica koja će još da proizvodi Čerenkovljevo zračenje je

$$v_{\min} = c\,\beta_{\min} = \frac{c}{n} = 0{,}625\,c$$

Maksimalnu brzinu čestica odredićemo iz uslova za totalnu refleksiju Čerenkovljevog zračenja na optički-poliranoj površini 2. Kritički ugao ϑ_k za totalnu refleksiju određen je uslovom

$$n \sin\vartheta_k = 1.$$

Znači, do scintilacionog brojača, dolaziće samo zračenje pod uglovima ϑ koji zadovoljavaju uslov:

$$\sin\vartheta \leqslant \frac{1}{n}$$

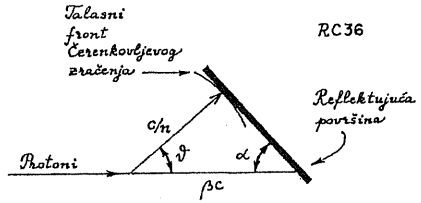
Kritičan ugao (ϑ_k) određuje i kritičnu maksimalnu brzinu čestice

$$v_{\max} = c\,\beta_{\max} = \frac{c}{n\cos\vartheta_k} = \frac{c}{n\sqrt{1-\sin^2\vartheta_k}} = \frac{c}{\sqrt{n^2-1}} = 0{,}8\,c.$$

Dakle, Čerenkovljevo zračenje dolazi do brojača jedino ako su brzine čestica u intervalu:

$$0{,}625 \leqslant \beta \leqslant 0{,}8.$$

RC36 Maksimalan odgovor scintilacionog brojača odgovara uslovu da Čerenkovljevo zračenje upada normalno na reflektujuću površinu i izlazi iz radijatora bez prelamanja (videti sliku)



Iz uslova:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

i

$$\cos\vartheta = 1/n\,\beta$$

određujemo brzinu protona:

$$v_p = c\,\beta = \frac{c}{n\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 0{,}68\,c.$$

Kinetička energija protona jednaka je:

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = 341\ \text{MeV}.$$

RC37 Impuls elektrona koji imaju datu trajektoriju nalazimo iz uslova:

$$\frac{e}{c}\,vB = \frac{mv^2}{\rho}$$

odakle je:

$$p = \frac{e}{c} B \cdot \rho$$

Energiju preko parametara trajektorije i polja (magnetne »čvrstine« $B\rho$) nalazimo kao:

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = mc^2 \left\{ \sqrt{\frac{e^2}{m^2 c^4} (B\rho)^2 + 1} - 1 \right\} = 2{,}05\,\text{MeV}.$$

RC38 Efikasnost detekcije definišemo kao relativni odnos atenuiranog i upadnog intenziteta gama kvanata koji dospevaju u kristal

$$\varepsilon = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\mu x} = 1 - e^{-0{,}36} = 30\%$$

gde je x dužina puta gama kvanta kroz kristal, a μ linearni apsorpcioni koeficijent.
U Komptonovom rasejanju maksimalna energija koju može da dobije elektron iznosi:

$$T_{max} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{mc^2}{2E_\gamma}} = 1{,}77\,\text{MeV}.$$

Dakle, ovakav elektron može da kreira ukupno

$$N = \frac{\varepsilon_k T_{max}}{\varphi} = 6 \times 10^4 \quad \text{luminescentnih fotona}$$

(ε_k je konverziona efikasnost kristala, a φ energija luminescentnog fotona).

RC39 Za tačkasti radioaktivni izvor u beta spektrometru sa konstantnim magnetnim poljem moć (impulsnog) razlaganja (η) određena je samo ulaznom aperturom instrumenta, kao što se vidi i iz geometrijske konstrukcije tri kritične elektronske putanje, za elektrone sa istim ulaznim impulsima (apsolutnim vrednostima) a različitim pravcima u prostoru.
Po definiciji:

$$\eta = \frac{\Delta p}{p}$$

gde je Δp neodređenost impulsa merena duž prave AA'. Međutim, kako je

$$p \sim H \cdot \rho$$

gde je ρ poluprečnik putanje elektrona, sledi da je:

$$\eta = \frac{\Delta (H\rho)}{H\rho} = \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

(zbog konstantnosti magnetnog polja).

Iz trougla AMM' vidi se da je:

$$\Delta\rho = 2\rho(1 - \cos\alpha) \simeq \alpha^2 \rho \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right). \quad \text{(ako je } \alpha \ll 1)$$

Dakle, moć razlaganja iznosi:

$$\eta = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right) = 0{,}12\%.$$

Ako radioaktivni izvor ima konačnu širinu x, moć razlaganja je jednaka:

$$\eta = \frac{\Delta\rho + x}{\rho} \simeq \alpha^2 + \frac{x}{\rho} = 0{,}45\%.$$

RC40 Amplituda naponskog impulsa na anodi fotomultiplikatora može da se izrazi preko kapaciteta anode i naelektrisanja koje se na njoj sakuplja, tj.:

$$V_{max} = \frac{Ne}{C}$$

Broj elektrona N proporcionalan je faktoru multiplikacije fotomultiplikatora F_m, faktoru kolekcije svetlosti na fotokatodi K_s kao i faktoru konverzije fotokatode K_k. Dakle:

$$N = aF_m K_s K_k.$$

Koeficijent proporcionalnosti (a) mora da zavisi od konverzione efikasnosti kristala antracena K_e, kao i od broja karakterističnih fotona antracena $n = (E_p/hc)\lambda$.
Prema tome:

$$N = \frac{E_p}{hc} \lambda F_m K_e K_s K_k;$$

odnosno:

$$V_{max} = \frac{e\lambda}{hc} \frac{E_p}{C} K_e K_s K_k F_m = 5{,}15\,\text{V}.$$

RC41 Braggov uslov za prvi interferencioni maksimum u rasejanom snopu gama zraka glasi:

$$\lambda = 2d \sin\vartheta$$

gde je λ talasna dužina gama-zraka.
Energija gama zraka jednaka je, dakle:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2d \sin\vartheta} \quad \text{i, ako je } \vartheta \ll 1:$$

$$E_\gamma \simeq \frac{hc}{2d\vartheta}$$

S druge strane, ugao ϑ i luk $\widehat{AB}$ su direktno proporcionalni ($\vartheta=\widehat{AB}/2R$), tako da energiju gama zraka možemo da koreliramo sa položajem prvog interferencionog maksimuma na sledeći način:

$$E_\gamma=\frac{hcR}{d}\frac{1}{\widehat{AB}}$$

Za slabo kolimisan snop gama zraka energije $E_\gamma=100$ keV luk $\widehat{AB}=16$ cm.

RC42 Poluprečnici putanja elektrona i pozitrona u magnetnom polju (kao što se vidi iz geometrijske konstrukcije) iznose:

$$r_{e-}=R\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{i} \quad r_{e+}=R\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Izjednačavanjem Lorencove sa centrifugalnom silom dobijamo, da su sa druge strane, poluprečnici čestica jednaki:

$$r_{e\pm}=p_{e\perp}/eB.$$

Kako su elektron i pozitron ultrarelativističke čestice:

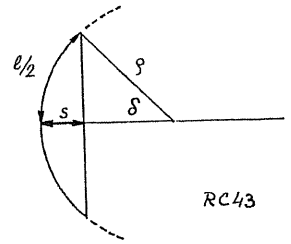
$$p_{e\pm}\,c=E_{e\pm}.$$

Iz zakona održanja energije dobijamo traženu energiju gama kvanta:

$$E_\gamma=\hbar\omega=E_{e+}+E_{e-}=(r_{e+}+r_{e-})\,ecB$$

$$=R\,(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)\,ecB\simeq 466\ \text{MeV}.$$

RC43 Sa slike je očigledno:



RC43

$$s=\rho\,(1-\cos\delta)$$

što za $\rho\gg l/2$ uz

$$\sin\delta\simeq\frac{l/2}{\rho}\simeq\delta$$

i

$$\cos\delta\simeq 1-\frac{\delta^2}{2}\simeq 1-\frac{l^2}{8\rho^2}$$

postaje

$$s=\frac{l^2}{8\rho}=\frac{l^2eB}{8pc}$$

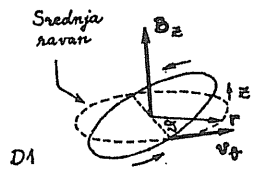
odakle je konačno:

$$p=\frac{eB}{8c}\frac{l^2}{s}.$$

Glava D

Akceleratori

D1 U većini tipova akceleratora koristi se magnetno polje da bi se dobilo kretanje čestica po kružnim orbitama. Ubrzavajuće električno polje se primenjuje tangencijalno na orbitu čestice, i deluje kao moment sile oko ose aksijalne simetrije (određene komponentom B_z magnetnog polja). Jednačine kretanja čestice koja se ubrzava u ovakvoj kombinaciji polja najlakše je dobiti u cilindričnom koordinatnom sistemu. Označiti stoga sa r radijus orbite čestice, sa z njeno pomeranje u odnosu na »srednju ravan«, sa ϑ njen uglovni položaj (videti sliku) a zatim naći diferencijalne jednačine kretanja čestice. Uzeti u obzir da magnetno polje ima i komponentu B_r, da na česticu deluje i deakceleratorski moment uslovljen gubitkom energije čestice na zakočno zračenje, kao i da postoji vremenska varijacija magnetskog fluksa kroz orbitu čestice.



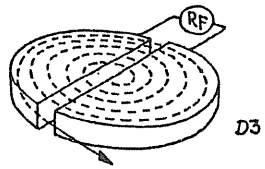
D1

D2 Pretpostaviti da se proton kinetičke energije 1 GeV kreće po idealnoj kružnoj orbiti u magnetnom polju jačine 1 T (tesla). Koliki je poluprečnik njegove orbite? Kolika je frekvencija orbitalnog kretanja protona?

D3 Ciklotron u Berkeleyu poluprečnika 184 inča radi sa stalnim magnetnim poljem od 2,3 T. Izračunati:

a) Nerelativističku orbitalnu učestanost protona u ovom polju.

b) Maksimalnu kinetičku energiju do koje mogu da se ubrzaju protoni.



D3

D4 Radiofrekventni napon između duanata ciklotrona je »četvrtast talas« amplitude $U=50$ kV, a frekvence $\omega_c=eB/m_D$ gde je m_D masa mirovanja deuterona. Koliku maksimalnu energiju može da dobije deuteron u ciklotronu pre nego što njegova faza bude pomerena za ugao veći od π-radijana u odnosu na radiofrekventni napon?

D5 Relativistička čestica ubrzava se u ciklotronu. Po kakvom vremenskom zakonu treba menjati ubrzavajuće električno polje pa da orbitalna učestanost čestice i učestanost električnog polja budu u svakom trenutku vremena u rezonanci.

D6 Efektivni ubrzavajući napon u ciklotronu iznosi $U=10$ kV, a menja se sa učestanošću $f_0=10$ MHz. Poluprečnik maksimalne orbite čestice iznosi $r_0=70$ cm. Proceniti ukupan put koji u ciklotronu prevali nerelativistička alfa čestica za vreme jednog ciklusa ubrzavanja.

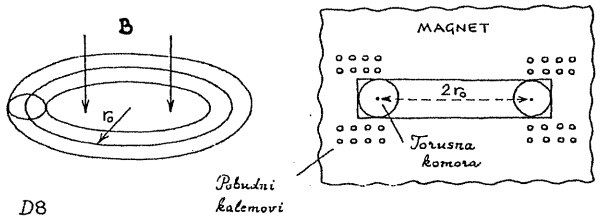
D7 Izračunati vreme potrebno da se deuteron u ciklotronu ubrza do energije 4 MeV. Homogeno magnetno polje je intenziteta 1 T, ubrzavajući napon 50 kV, a izvor deuterona nalazi se u procepu između duanata koji je širok 4 cm.

D8 Betatron ima sledeće konstrukcione parametre:

— poluprečnik stabilne orbite elektrona $r_0=96$ cm

— maksimalni magnetni fluks $\Phi_m=2$ Wb

— struja u pobudnim kalemima se menja po sinusnom zakonu sa učestanošću od 50 Hz.



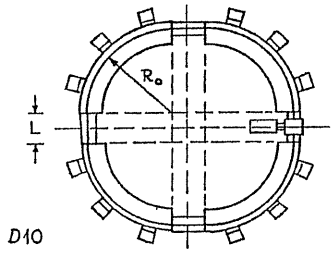
D8

Do koje maksimalne energije mogu da se ovim betatronom ubrzaju elektroni? Koliko je vreme preleta elektrona?

D9 U trenutku vremena $t=0$ fluks magnetnog polja u betatronu jednak je nuli. Za ubrzanje elektrona na konstantnom poluprečniku (r_0) totalni fluks magnetnog polja koji prođe kroz orbitu mora da bude dvaput veći od fluksa homogenog magnetnog polja.

Dokazati!

D10 Slika prikazuje sinhrotronski protonski akcelerator. Odrediti kako treba da se menja učestanost radiofrekventnog oscilatora u funkciji od energije protona.



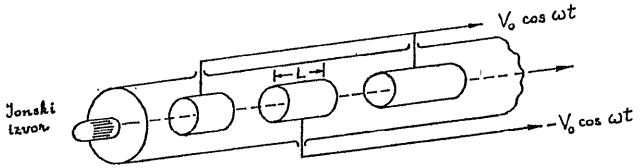
D10

D11 U svim akceleratorima zahteva se da magnetno polje obezbedi sile koje će vraćati na centralnu (stabilnu) orbitu čestice koje se iz bilo kog razloga od nje udalje. Takva restituciona sila ostvaruje se u magnetnom polju koje opada po intenzitetu sa porastom radijusa orbite čestice. Najčešće se izabira polje oblika:

$$B_z = B_{z0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$$

gde je B_{z0} intenzitet polja normalnog na srednju ravan, duž centralne orbite r_0. Indeks polja n se kreće u granicama $0<n<1$. Pretpostaviti da je magnetno polje stacionarno ($rot\, B=0$) pa odrediti oblik restitucionih sila koje deluju na česticu duž radijusa i duž z-ose.

D12 Na slici je prikazan linearni akcelerator koji se sastoji od niza cevi koje su naizmenično povezane na dva izvora prosto promenljivog napona ($V_0 \cos \omega t$, $-V_0 \cos \omega t$). Čestice se ubrzavaju samo između procepa koaksijalnih cilindara, a dužine cilindara se izabiraju tako da čestice u svakom provedu polovinu perioda

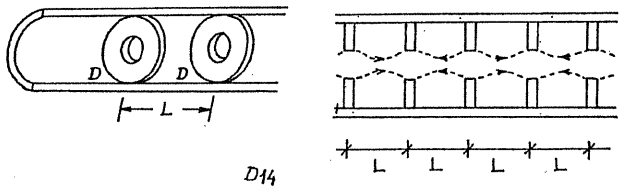


D12

(π/ω). Odrediti dužinu n-tog cilindra ako čestica upada u linearni akcelerator sa početnom energijom E_0. Pretpostaviti da je čestica relativistička. Čemu je jednaka dužina n-tog cilindra ako je čestica ultrarelativistička?

D13 Izračunati snagu potrebnu za pogon linearnog elektronskog akceleratora. Maksimalna energija elektrona iznosi 100 MeV. Učestanost naponskog izvora je $f=1000$ MHz a faktor dobrote oscilatornog kola $Q=10^5$. Akcelerator se sastoji od 100 koaksijalnih cilindara a kapacitet svakog procepa između cilindara je 2 pF.

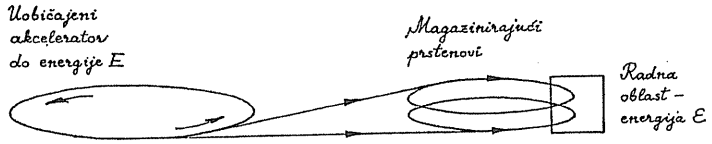
D14 Moderni linearni akceleratori za formiranje ubrzavajućeg električnog polja koriste stojeće elektromagnetne talase koji se formiraju u cevi od provodnog materijala. Presek kroz akceleratorsku cev i oblik električnog polja prikazani su na slici. Dijafragme (D) služe da ograniče faznu brzinu elektromagnetskih talasa na vrednost c. Ako je brzina čestice približno jednaka faznoj brzini talasa ona će se ubrzavati pri prolasku kroz akceleratorsku cev sve dok »ostane« na talasnom bregu



D14

električnog polja. Pretpostaviti da je u linearnom elektronskom akceleratoru rastojanje između dijafragmi $L=3$ cm. Odrediti učestanost radiofrekventnog generatora kojim treba napajati akcelerator. Ako je elektron ubačen u akcelerator početnom kinetičkom energijom 2 MeV i ako mu je energija na izlasku iz akceleratora 100 MeV izračunati koliko centimetara je elektron zaostao za vrhom talasnog brega.

D15 Dve čestice istih masa mirovanja $m_1=m_2=m$ kreću se jedna drugoj u susret relativističkim brzinama (u lab. sistemu) tako da su im i energije jednake: $E_1=E_2=E$. (Princip rada akceleratora sa sudarajućim snopovima, videti sliku). Naći koliko je



D15

puta energija ovakvog sudara efektivno veća od klasičnog slučaja kada se samo čestica mase m kreće (u laboratorijskom sistemu) istom energijom E prema nepokretnoj čestici-meti. Uporediti rezultat sa nerelativističkim slučajem.

D16 U uobičajenom eksperimentu nuklearne fizike ubrzana čestica-projektil bombarduje nepokretnu česticu-metu. Na prvi pogled izgleda da kinetička energija projektila, u skladu sa Einsteinovom relacijom, cela može da se iskoristi za povećanje mase produkata reakcije (recimo kreaciju novih čestica). Za, recimo, kreaciju para proton-antiproton dovoljno bi bilo da čestica ima energiju od $\sim$2 GeV koliko iznosi zbir masa ovih dveju čestica. Ovo, međutim, nije tačno. Osim zakona održanja energije simultano važi i zakon održanja impulsa pa i u najpogodnijem slučaju čeonog sudara, kada se ne troši energija na transverzalno kretanje produkata reakcije, interagujuće i novoorođene čestice moraju da odnesu početni impuls pa time i deo početne energije krećući se u pravcu upadne čestice. Shodno ovome, naći koliki se deo kinetičke energije projektila može pretvoriti u masu mirovanja novokreiranih čestica u jednom ovakvom eksperimentu (neka su masa projektila i masa mete iste, $m_1=m_2=m$). Kao specijalan slučaj naći koliki je prag kinetičke energije protona da bi se u sudaru sa drugim, mirujućim protonom, mogao kreirati par proton-antiproton. Prodiskutovati kakve su prednosti eksperimenata tipa sudarajućih snopova u ovom pogledu, kao i šta su im opšte, glavne, mane.

RD1 Vremenska promena z-komponente impulsa čestice određena je samo radijalnom komponentom magnetnog polja (B_r):

$$\frac{d}{dt}p_z = ev_\vartheta B_r.$$

Kako je $v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$ (gde ».« označuje diferenciranje po vremenu) »prva« jednačina kretanja glasi:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = er\dot{\vartheta}B_r. \tag{1}$$

Radijalno ubrzanje određuje devijaciju čestice od idealne kružne orbite. Jednačina kretanja je:

$$\frac{d}{dt}p_r = m\frac{v_\vartheta^2}{r} - ev_\vartheta B_z$$

odnosno, kako je $p_r=m\dot{r}$, jednačina kretanja postaje:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\dot{\vartheta}^2 - er\dot{\vartheta}B_r. \tag{2}$$

Uglovno kretanje čestice opisano je vremenskom promenom momenta impulsa čestice (L). Međutim, kako je:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k M_k$$

gde je ΣM_k zbir svih momenata sila koji deluju na česticu, moramo biti naročito obazrivi u nabrajanju ovih momenata. Moment sile električnog polja M_F možemo da izrazimo preko rada dW koji električno polje izvrši pri pomeranju čestice za ugaoni pomeraj $d\vartheta$, tj.:

$$M_F = \frac{dW}{d\vartheta}.$$

Na sličan način deakceleratorski moment sile, koji potiče od zakočnog zračenja čestice možemo da napišemo u obliku:

$$M_R = \frac{dR}{d\vartheta}$$

gde je dR energija koja se izrači na ugaonom pomeraju čestice $d\vartheta$. Vremenska promena magnetnog fluksa saopštava čestici količinu energije:

$$E=\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=e\frac{d\Phi}{dt}$$

odnosno

$$E=2\pi r\cdot F=e\frac{d\Phi}{dt}.$$

Dakle, moment sile uslovljen indukovanom elektromotornom silom iznosi:

$$M_{in}=rF=\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Konačno, možemo da napišemo:

$$\frac{dL}{dt}=M_F+M_{in}-M_R=\frac{dW}{d\vartheta}+\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}-\frac{dR}{d\vartheta}.$$

Imajući u vidu da je $L=mr^2\dot{\vartheta}$, »treća« jednačina kretanja čestice koja se ubrzava glasi:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta})=\frac{dW}{d\vartheta}+\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}-\frac{dR}{d\vartheta}. \tag{3}$$

U sve tri jednačine kretanja korišćen je racionalizovani *MKS* sistem. Algebarski znaci odgovaraju čestici sa negativnim naelektrisanjem. Jednačine su primenljive i na relativističke čestice (masa nigde nije izdvojena kao stalan parametar!).

RD2 Pošto se proton kreće po kružnoj orbiti njegovo radijalno ubrzanje jednako je nuli. Iz jednačine (RD1.2 prethodnog zadatka imaćemo:

$$m\dot{\vartheta}=eB_z \quad \text{odnosno} \quad p=mv=eB_z\cdot r$$

Za ovako visoku energiju protona moramo za impuls da koristimo relativistički izraz:

$$p=\frac{1}{c}(E^2-m_0^2c^4)^{1/2}=\frac{1}{c}[T(T+2m_0c^2)]^{1/2}$$

gde je T kinetička energija protona.
Poluprečnik orbite protona iznosi:

$$r=\frac{[T(T+2m_0c^2)]^{1/2}}{ceB_z}\simeq 5{,}6\ m.$$

Orbitalna frekvencija protona je:

$$f=\frac{eB_z}{2\pi m}=\frac{eB_z}{2\pi m_0}\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)^{-1}=f_0\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)^{-1}$$

gde smo sa f_0 označili nerelativističku frekvenciju protona koja iznosi: $f_0=15{,}2$ MHz. Proton kinetičke energije 1 GeV imaće frekvenciju $f=7{,}5$ MHz.

RD3 a) Nerelativistička orbitalna frekvencija ciklotrona iznosi:

$$f_0=\frac{eB_z}{2\pi m_0}=35\ \text{MHz}.$$

b) Za relativističke protone izraz za impuls glasi:

$$p=\frac{1}{c}[T(T+2m_0c^2)]^{1/2}$$

a kako je $p=eB_zr$:

$$T^2+2m_0c^2T-(ecB_zr)^2=0.$$

Rešavanjem jednačine dobijamo da je $T_{max}\simeq 2{,}5$ GeV.

RD4 Kritična razlika faza može da se izrazi preko broja obrta deuterona i srednje frekvencije deuterona $(\bar{\omega})$:

$$\varphi_{krit}=\pi=n(\omega_c-\bar{\omega})\tau_c=\frac{2\pi n}{\omega_c}(\omega_c-\bar{\omega})$$

gde je

$$\bar{\omega}=\frac{\omega_c}{T_{\max}}\int_0^{T_{\max}}\frac{dT}{1+\frac{T}{m_0c^2}}=\frac{\omega_c}{T_{\max}}m_0c^2\ln\left(1+\frac{T_{\max}}{m_0c^2}\right)$$

a

$$n=\frac{T_{\max}}{2eU}$$

odatle dobijamo jednačinu za maksimalnu energiju deuterona:

$$T_{\max}=\frac{eU}{1-\frac{\bar{\omega}}{\omega_c}}=\frac{eU}{1-\frac{1}{T_{\max}}m_0c^2\ln\left(1+\frac{T_{\max}}{m_0c^2}\right)}.$$

Ako pretpostavimo da je $T_{max}\ll m_0c^2$:

$$T_{\max}\simeq\frac{eU}{1-\frac{m_0c^2}{T_{\max}}\left[\frac{T_{\max}}{m_0c^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{T_{\max}}{m_0c^2}\right)^2\right]}$$

odnosno:

$$T_{\max}=\sqrt{2eUm_0c^2}\simeq 15\ \text{MeV}.$$

RD5 Orbitalna ciklotronska učestanost za relativističku česticu iznosi:

$$\omega=\frac{Be}{m}=\frac{\omega_0}{1+\dfrac{T}{m_0c^2}} \quad \text{sa} \quad \omega_0=\frac{Be}{m_0}. \tag{1}$$

Ako su električno polje i orbitalna učestanost čestice u rezonanci onda u svakom krugu čestica prima isti iznos energije W. Tada je promena kinetičke energije po jedinici vremena jednaka

$$\frac{dT}{dt}=\frac{W}{\tau}$$

gde je τ vreme potrebno za jedan obrt čestice $\tau=2\pi/\omega$, odnosno:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\omega W}{2\pi} \tag{2}$$

Diferenciranjem jednačine (RD5.1) po vremenu i korišćenjem jednačine (RD5.2) dobijamo:

$$\frac{d\omega}{\omega^3}=-\frac{W}{\omega_0}\,\frac{1}{2\pi m_0c^2}\,dt\equiv -a\,dt.$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine sa odgovarajućim početnim uslovima dobijamo traženu vremensku zavisnost učestanosti električnog polja:

$$\int_{\Omega_0}^{\omega(t)}\frac{d\omega}{\omega^3}=-\int_0^t a\,dt \quad \text{i} \quad \omega(t)=\frac{\Omega_0}{\sqrt{\dfrac{a\Omega_0^2}{2}t+1}}.$$

RD6 Ako se zanemari put alfa čestice između procepa ciklotronskih duanata, pređeni put iznosi:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}v_k\frac{1}{f_0}$$

gde je k — redni broj prolaska α-čestice kroz ubrzavajući potencijal između duanata.

U nerelativističkoj aproksimaciji brzina alfa-čestice je

$$v_k=\left(\frac{2\,ekU}{m}\right)^{1/2}.$$

Dakle:

$$L=\frac{1}{f_0}\left(\frac{eU}{2m}\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Maksimalni broj poluobrta n jednak je:

$$n=\frac{E_{\max}}{eU}=\frac{1}{eU}\,\frac{1}{2}m\left(\frac{eBr_0}{m}\right)^2=\frac{1}{eU}\,2\pi^2f_0^2mr_0^2.$$

Kako je $n\gg 1$ sumu po k možemo (približno) da zamenimo integralom

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\simeq\int_1^n\sqrt{k}\,dk=\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Dakle:

$$L=\frac{4\pi^3r_0^3}{3}f_0^2\frac{m}{eU}\simeq 5{,}9\times 10^3\,m.$$

RD7 Ukupno vreme boravka deuterona u ciklotronu treba rastaviti na vreme provedeno između duanata (t_1) i vreme provedeno u duantima (t_2). Ako sa $n=E/eU$ označimo broj prolaska deuterona kroz procep između duanata širok L, tada je:

$$t_1=\frac{L\cdot n}{\bar{v}} \quad \text{i} \quad t_2=\frac{1}{2}n\frac{1}{f_0}$$

gde je f_0 ciklotronska frekvencija za nerelativističku česticu

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m} \quad \text{a srednja brzina deuterona} \quad \bar{v}=\frac{1}{E}\int_0^E\sqrt{\frac{2T}{m}}\,dT=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Dakle, ukupno vreme boravka deuterona iznosi:

$$t=t_1+t_2=\frac{E}{eU}\left(\frac{L}{\bar{v}}+\pi\frac{m}{eB}\right)\simeq 5{,}7\ \mu\text{s}.$$

RD8 Srednja energija koja se saopšti elektronu po jednom obrtaju u betatronu iznosi:

$$\overline{\Delta E}=e\frac{\overline{d\Phi}}{dt}$$

Kako se struja u pobudnim kalemima (a to znači i magnetno polje) menja po sinusnom zakonu elektron može da se ubrzava samo jednu četvrtinu ukupnog perioda ($T=2\pi/\omega$).

Dakle, srednja promena magnetnog fluksa iznosi:

$$\frac{\overline{d\Phi}}{dt}=\frac{4}{T}\int_0^{T/4}\Phi_m\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\omega\Phi_m$$

a srednja energija elektrona

$$\Delta\bar{E}=\frac{2}{\pi}e\,\omega\Phi_m.$$

Za vreme $T/4$ elektron pređe put (pošto mu je brzina bliska c)

$$L = c\frac{T}{4}$$

odnosno napravi

$$n = \frac{L}{2\pi r_0} = \frac{cT}{8\pi r_0} \quad \textit{obrtaja.}$$

Ukupna (maksimalna) energija elektrona je:

$$E = n\overline{\Delta E} = \frac{ec\,\Phi_m}{2\pi r_0} \simeq 100\ \text{MeV}$$

a vreme preleta elektrona

$$t = T/4 = 5\ \text{ms}.$$

RD9 Ako zanemarimo gubitak energije elektrona na zakočno zračenje, jednačinu kretanja elektrona duž stabilne orbite r_0 možemo da napišemo u obliku (videti zadatak br. D1):

$$\frac{d}{dt}(mr_0^2\dot{\vartheta}) = \frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Kako je $\dot{\vartheta} = \omega = eB_z/m$ gde je B_z intenzitet magnetnog polja na orbiti r_0, sledi da je:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2(\pi r_0^2)\frac{dBz}{dt}.$$

Integracijom ove jednačine po vremenu dobijamo:

$$\Phi = 2(\pi r_0^2)B_z.$$

Ako bi magnetno polje bilo konstantno unutar orbite

$$\Phi_{hom} = B_z \pi r_0^2$$

tj.:

$$\Phi = 2\,\Phi_{\text{homogeno}}$$ što je i trebalo dokazati!

RD10 U odsustvu četiri ravna dela akceleratora, učestanost protonskih obilazaka iznosila bi:

$$f_1 = \frac{eB_z}{2\pi m}.$$

Međutim, ravni delovi akceleratora ukupne dužine $4L$ redukuju ovu frekvenciju na:

$$f_0 = f_1\frac{2\pi R_0}{2\pi R_0 + 4L}.$$

Ako sada f_1 izrazimo preko energije protona, dobićemo učestanost radiofrekventnog izvora:

$$f_{RF} = f_0 = \frac{c}{2}\frac{[T(T+2m_0c^2)]^{1/2}}{T+m_0c^2}\frac{1}{\pi R_0 + 2L}.$$

RD11 Iz uslova stacionarnosti magnetnog polja $rot\,\vec{B}=0$ dobijamo (ako rot izrazimo u cilindričnim koordinatama) uslov:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

Odavde nalazimo oblik radijalne komponente magnetnog polja:

$$B_r = \int_0^z \frac{dB_z}{dr}\,dz = -\frac{n}{r_0}B_{z0}z.$$

Radijalna komponenta magnetnog polja kreira Lorencovu silu duž z-ose:

$$F_z = evB_z = -en\frac{v}{r_0}B_z z \equiv -k_z z$$

koja, zaista, ima oblik restitucione sile ($F = -kz$). Koeficijent restitucije $k_z = en\omega_0 B_z$ je proporcionalan indeksu polja.
Jednačina kretanja čestice duž radijusa, ako se sa x označi razlika $r - r_0$ glasi:

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{r} - \frac{e}{m}B_z v$$

Pretpostavimo da je $x \ll r_0$ (uslov malih oscilacija), tada z-komponentu magnetnog polja i radijus čestice možemo da razvijemo u stepene redove:

$$B_z \simeq B_{0z}\left(1 - n\frac{x}{r}\right) \quad \text{i} \quad \frac{1}{r} \simeq \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Jednačina kretanja postaje:

$$\ddot{x} = -\frac{v^2}{r_0}(1-n)\,x \quad \left(\text{sa}\ \frac{eBz_0}{m} = \frac{v}{r_0} = \omega_0\right)$$

Vidimo da u radijalnom pravcu na česticu deluje restituciona sila $F_r = -k_r x$ sa:

$$k_r = \frac{mv^2}{r_0}(1-n) = r_0 m\omega_0^2(1-n).$$

RD12 Dužina n-tog cilindra je:

$$L_n = v_n\frac{\pi}{\omega}$$

gde je v_n brzina čestice na ulasku u n-ti cilindar.
Između svaka dva procepa čestici se saopšti energija eV_0. Kinetička energija koju ima čestica pre ulaska u n-ti cilindar iznosi:

$$T = E_0 + (n-1)\,eV_0 - m_0c^2$$

gde je E_0 početna energija čestice pre ulaska u akcelerator.

Prema tome, dužina n-tog cilindra je:

$$L_n=\frac{c}{2}\frac{\pi}{\omega}\left\{1-\left[\frac{m_0c^2}{E_0+(n-1)eV_0}\right]^2\right\}^{1/2}.$$

U slučaju ultrarelativističke čestice:

$$L_n=L_{n+k}=\frac{c}{2}\frac{\pi}{\omega}.$$

RD13 Snaga koju mora da ostvari oscilatorno kolo na svakom procepu iznosi:

$$P=\omega\frac{CV^2}{2Q}$$

gde je V napon između procepa.
Ukupna snaga potrebna za akcelerator je

$$P_0=nP$$

gde je n broj procepa.
Kako je $E_{max}=enV$ biće:

$$P_0=\frac{\omega CE_{\max}^2}{2ne^2Q}\simeq 6{,}3\ MW.$$

RD14 Rastojanje između dve dijafragme jednako je 1/2 talasne dužine električnog talasa. Kako je fazna brzina talasa ograničena na c, učestanost radiofrekventnog generatora jednaka je:

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{2L}=5\times 10^9\,s^{-1}.$$

Zbog toga što je brzina elektrona stalno manja od c, elektron će da zaostaje za vrhom talasnog brega za dužinu:

$$x=\frac{\lambda}{2}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)\qquad\left(\text{sa }\beta_k=\frac{v_k}{c}\right)$$

gde je n-broj procepa između dijafragmi koji prođe elektron tokom ubrzavanja. Brzinu elektrona β_k možemo da izrazimo preko njegove kinetičke T_k:

$$\beta_k=\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{T_k}{m_0c^2}+1\right)^2}}.$$

Međutim, kako je $\left(\frac{T_k}{m_0c^2}+1\right)^{-2}\ll 1$ možemo uzeti da je:

$$\beta_k\simeq 1-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{T_k}{m_0c^2}+1\right)^2}.$$

Prema tome, izraz za X postaje:

$$X=-\frac{\lambda}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T_k}{m_0c^2}+1\right)^{-2}.$$

Kako je u akceleratorima broj dijafragmi veliki, sa sume možemo da pređemo na integral, tj.:

$$X=-\frac{\lambda}{4}\int_{\frac{T_i}{m_0c^2}}^{\frac{T_f}{m_0c^2}}\frac{1}{\left(\frac{T_k}{m_0c^2}+1\right)^2}\,d\left(\frac{T_k}{m_0c^2}\right)$$

gde smo sa T_i i T_f označili početnu i krajnju brzinu elektrona. Dakle:

$$X=\frac{\lambda}{4}\left[\frac{1}{1+\frac{T_i}{m_0c^2}}-\frac{1}{1+\frac{T_f}{m_0c^2}}\right]\simeq -0{,}3\,\text{cm}.$$

RD15 Koristimo činjenicu da je masa mirovanja čestice invarijanta, tj. da je;

$$m^2c^4=E^2-p^2c^2=inv.$$

Posmatrajmo slučaj sudarajućih snopova u SCM (koji se ovde i podudara sa laboratorijskim sistemom). Ovde je:

$$\vec{p}_1=-\vec{p}_2\qquad\vec{P}_{tot}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=0$$

pa:

$$M^2c^4=E^2_{tot}\quad\text{tj.}\quad Mc^2=E_{tot}=E_1+E_2+m_1c^2+m_2c^2=2E+2mc^2$$

gde je M totalna masa mirovanja sistema pre sudara.
Normalan slučaj sudara projektil-meta posmatrajmo u lab. sistemu. Ako je ε energija projektila tada je totalna energija:

$$E_{tot}=\varepsilon+m_2c^2\quad\text{a totalni impuls:}\quad\vec{P}=\vec{p}_1.$$

Kako je:

$$\varepsilon^2=m_1^2c^4+P^2c^2$$

i

$$M^2c^4=E^2_{tot}-P^2c^2$$

uz

$$E^2_{tot}=\varepsilon^2+2\,\varepsilon\,m_2c^2+m_2^2c^4$$

to je:

$$M^2c^4=m_1^2c^4+P^2c^2+2\,\varepsilon\,m_2c^2+m_2^2c^4-P^2c^2$$
$$=2mc^2(\varepsilon+mc^2).\qquad(m_1=m_2=m)$$

Izjednačavajući kvadrate mase mirovanja iz oba slučaja, koji moraju biti jednaki, sledi:

$$[2\,(E+mc^2)]^2=2\,mc^2\,(\varepsilon+mc^2).$$

Uz $E\gg mc^2$ i $\varepsilon\gg mc^2$ (ultrarelativistički slučaj) sledi:

$$4\,E^2\simeq 2\,\varepsilon\,mc^2 \qquad \text{tj.} \qquad \varepsilon=2\frac{E}{mc^2}E$$

Ovo znači da energija čestice-projektila ε u normalnom eksperimentu mora biti $2\frac{E}{mc^2}$ puta veća od energije E koju obe čestice imaju u eksperimentu sudarajućih snopova da bi sudar bio isto tako efikasan. tj. da bi relativna energija bila ista. Za nukleone, sa $mc^2\simeq 1$ GeV, pri $E=30$ GeV biće ovaj sudar u sudarajućim snopovima isto tako efikasan kao sudar projektil-meta u kome projektil ima energiju $\varepsilon=1800$ GeV! Ogroman je, dakle, efektivan dobitak energije koji je u sudarajućim snopovima vezan sa činjenicom da se tu ne troši energija na ubrzanje *CM* koji je sve vreme nepokretan. U nerelativističkom slučaju energija relativnog kretanja bila bi samo $4\,E$(!), tj. u našem primeru 120 GeV. Što je masa sudarajućih čestica manja to je efektivan dobitak energije veći što se lepo vidi iz gornjeg izraza. Ako se radi sa elektronima i ako je E, recimo, samo 100 MeV za ε dobijamo 40 GeV!

RD16 Neka se čestica mase m_1 sa impulsom $\vec{p}_1$ sudara sa nepokretnom česticom mase m_2. U laboratorijskom sistemu je totalna energija pre sudara jednaka:

$$E_{tot}=E_1+E_2=(p_1^2c^2+m_1^2c^4)^{1/2}+m_2c^2.$$

Ako je M rezultujuća ukupna masa sistema posle sudara a energija i impuls E' i $\vec{p}'$ tada uz $\vec{p}=\vec{p}'=\vec{p}_1$ sledi ($\vec{p}_2=0$):

$$(p_1^2c^2+m_1^2c^4)^{1/2}+m_2c^2=p_1^2c^2+M^2c^4$$

a odavde

$$(Mc^2)^2=(m_1c^2)^2+(m_2c^2)^2+2\,m_2c^2\,E_1.$$

Sada možemo da nađemo M pa prema tome i moguću kreiranu masu. Uz $m_1=m_2=m$, biće:

$$Mc^2=\sqrt{2\,mc^2\,(mc^2+E_1)}$$

ili, ako je kinetička energija projektila jednaka T, ($E_1=mc^2+T$):

$$Mc^2=\sqrt{2\,mc^2\,(2\,mc^2+T)}.$$

Deo kinetičke energije ε koji se može transformisati u masu mirovanja jednak je, dakle:

$$\varepsilon=\frac{Mc^2-2\,mc^2}{T}=\frac{\sqrt{1+\frac{T}{2mc^2}}-1}{\frac{T}{2\,mc^2}}.$$

Vidimo, dakle, da za male vrednosti $T/2\,mc^2$ negde oko 50% kinetičke energije može da se transformiše u mase mirovanja novih čestica. Sa porastom T taj deo teži nuli (!) približno kao $T^{-1/2}$ (mada po apsolutnom iznosu veličina kreiranih masa raste). U slučaju kreacije protonskog para u sudaru proton-proton ($p+p\to p+p+p+\tilde{p}$) biće $Mc^2=4\,mc^2$ pa je $(4\,mc^2)^2=2\,mc^2\,(2\,mc^2+T)$ tj.:

$$T=6\,mc^2=5{,}63\ \text{GeV}.$$

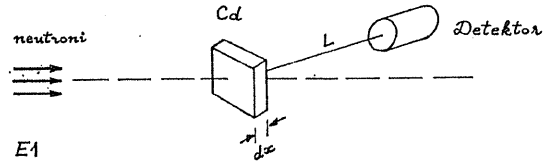
Dakle, samo jedna trećina kinetičke energije može da se transformiše u masu mirovanja novih čestica.

Kod sudarajućih snopova, naprotiv, zakon održanja impulsa ne nameće nikakva ograničenja na mogućnost transformisanja kinetičke u energiju mirovanja jer je početni impuls jednak nuli (i u *SCM* i u *LAB* sistemu koji se ovde poklapaju) i na kinetičkoj energiji praga, kojoj doprinose obe čestice, ova se sva može pretvoriti u energiju mirovanja. Na pragu produkti reakcije praktično su nepokretni; u opštem slučaju razleću se pod velikim uglovima ali opet sa totalnim impulsom jednakim nuli tako da *CM* ostaje nepokretan; na njegovo kretanje ne troši se energija. Mana je, jasno, mala gustina mete u poređenju sa normalnim gustinama meta (razlike do 15 redova veličine!) pa i shodno tome siromašni prinosi.

Glava E

Nuklearne reakcije i rasejanja

E1 Efikasni presek za reakciju $^{113}Cd(n,\gamma)^{114}Cd$ iznosi $\sigma=64000$ barna. Meta debljine $\Delta x=10^{-4}$ cm napravljena je od prirodnog kadmijuma koji sadrži $\eta=12\%$ izotopa ^{113}Cd. Upadni snop termalnih neutrona ima intenzitet $I=10^8$ neut/s.



E1

Pretpostavljajući da je raspodela emitovanih gama kvanata izotropna izračunati brzinu brojanja gama detektora efektivne površine $S=5$ cm^2 i efikasnosti $\varepsilon=25\%$, ako je detektor postavljen na rastojanju $L=1$ m od mete.

E2 U svim eksperimentalnim situacijama pri izučavanju nuklearnih reakcija meta se nalazi u atomskom ili molekularnom stanju. Zbog toga naelektrisani projektili radije gube energiju na ekscitaciju i jonizaciju materijala mete nego na, za nas ovde bitne, nuklearne interakcije. Ovo stvara veći broj problema. Prvo, gubitak energije projektila po dubini mete dovodi dotle da se na različitim dubinama nuklearna reakcija koja nas interesuje odvija na različitim energijama tako da i eventualna početna monohromatičnost snopa nije od pomoći jer se gubi direktna informacija o veličini preseka na datoj energiji. Drugo, zbog veće verovatnoće za jonizaciju, veliki broj upadnih čestica svu energiju izgubi u ovim procesima ni ne stupivši u nuklearnu interakciju te su tako prinosi (Y), definisani kao broj čestica koji stupi u nuklearnu reakciju prema ukupnom broju upadnih čestica, po pravilu mali (male statistike). Osim toga, samo tanak čeoni sloj mete približno jednak dometu čestica efektivno učestvuje u eksperimentu. Ako se na jedan akt jonizacije u srednjem potroši oko 30 eV i ako se za presek nuklearne reakcije uzme tipičnih 1 barn, naći koliki deo upadnog fluksa uopšte preživi nuklearnu interakciju do potpunog zaustavljanja projektila (na putu jednakom dometu). Pokazati kako se iz poznavanja ekscitacione funkcije, tj. prinosa reakcije u funkciji od energije ($Y(E)$), može naći presek reakcije za datu energiju, $\sigma(E)$.

E3 Za reakciju $^2H+^2H\rightarrow{}^3H+p$ izmerena je uglovna distribucija protona i dobijena funkcija oblika:

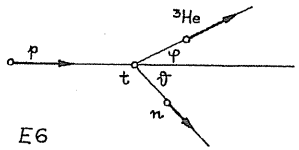
$$n(\vartheta)=n\left(\frac{\pi}{2}\right)[1+A\cos^2\vartheta]$$

gde je $n(\vartheta)$ broj protona po jediničnom prostornom uglu. Na kom uglu $\vartheta°$ treba postaviti protonski brojač tako da ukupan broj emitovanih protona možemo da izračunamo iz odbroja brojača na tog uglu bez poznavanja veličine A.

E4 Čestica mase m_a sudara se sa česticom mase m_b u miru pri čemu dolazi do reakcije posle koje oblast interakcije napuštaju čestice masa m_d i m_e. Pretpostavljajući da se radi o relativističkim česticama odrediti minimalnu energiju čestice a (energiju praga reakcije) da bi reakcija bila uopšte moguća.

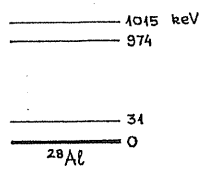
E5 Q — vrednost za endotermnu reakciju tipa: $a+b\rightarrow c+d$ jednaka je jednostavno promeni mase mirovanja čestica koje učestvuju u reakciji, tj $|Q|=m_c+m_d-m_a-m_b$.
Pokazati da je energija praga reakcije (kinetička energija čestice a) uvek veća od Q vrednosti reakcije. Čemu je jednaka energija praga reakcije ako je $|Q| \ll m_b$?

E6 Na slici je šematski prikazana reakcija do koje dolazi prilikom bombardovanja tricijumske mete snopom protona. Q vrednost za ovu reakciju iznosi — 0,764 MeV. Koliki je prag za ovu reakciju? Ako je energija protona u laboratorijskom sistemu 2 MeV, a neutron se razleće pod uglom od 60° u odnosu na upadni pravac protona, izračunati kinetičku energiju neutrona.



E6

E7 Tanka aluminijumska meta (^{27}Al) bombardovana je snopom monoenergetskih deuterona energije 2 MeV dobijenih iz Van de Grafovog akceleratora. Protoni rasejani pod uglom od 90° u odnosu na upadni pravac snopa analizirani su energetski pomoću magnetskog spektrometra. Na slici su prikazane energije tri ekscitirana nivoa ^{28}Al. Odrediti kinetičke energije koje treba da imaju četiri grupe protona.



E7

E8 Odrediti energetsku raspodelu (spektar) neutrona u reakciji tipa $A(n, 2n)B$, ako je E_0 maksimalna kinetička energija konačnih čestica u sistemu centra mase; uzeti u obzir da je masa jezgra znatno veća od mase neutrona.

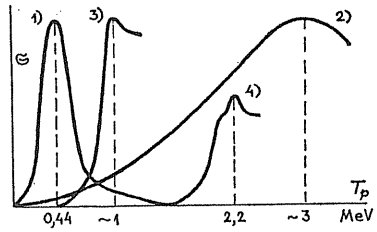
E9 Kvalitativno prodiskutovati opšte osobine rasejanja protona i neutrona na jezgrima (sličnosti i razlike, uloga Coulomb-ove i centrifugalne barijere, rasejanje sa različitim vrednostima relativnog momenta impulsa, opšta zavisnost preseka od energije, itd). Po čemu se rasejanje elektrona na jezgrima razlikuje od rasejanja nukleona i kakve se informacije odavde dobijaju?

E10 Opisati kvalitativno opšte osobine reakcija (p, α), (p, n), (p, p) i (p, γ) — (različitih izlaznih kanala reakcija u kojima je projektil proton) — u onoj meri u kojoj je to moguće bez poznavanja ikakvih specifičnih detalja.

E11 Na slici je prikazana zavisnost preseka od energije upadnih protona za razne izlazne kanale reakcije $p+^7Li$ koja prolazi kroz intermedijarno složeno (»compound«) jezgro ^8Be. Posmatrani kanali su:

1) $^7Li(p,\gamma)^8Be \equiv p+^7Li \rightarrow {}^8Be^* \rightarrow {}^8Be+\gamma$
2) $^7Li(p,\alpha)^4He \equiv p+^7Li \rightarrow {}^8Be^* \rightarrow {}^4He+{}^4He$
3) $^7Li(p,p)^7Li^* \equiv p+^7Li \rightarrow {}^8Be^* \rightarrow {}^7Li^*+p$
4) $^7Li(p,n)^7Be \equiv p+^7Li \rightarrow {}^8Be^* \rightarrow {}^7Be+n$

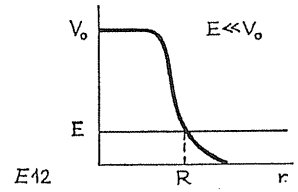
Gornje reakcije praćene su emisijom gama kvanata energije $E_1=14{,}7$ MeV, $E_2=17{,}6$ MeV, $E_3=15{,}2$ MeV, $E_4=18{,}1$ MeV i tipa su M_1. Jezgro ^8Be je i u osnovnom stanju (0^+) nestabilno (nema stabilnog jezgra sa $A=8$!) i sa Q vrednošću od ~100 keV raspada se na dve alfa-čestice sa relativno velikim poluživotom od $\sim 10^{-16}$ sekundi što rezultira u energetski dobro definisanom stanju. U α—α rasejanju rezonansa na 100 keV koja bi odgovarala osnovnom stanju ^8Be nije opažena zbog eksperimentalnih poteškoća. Prva rezonansa nađena je na $E \simeq 2{,}9$ MeV (pobuđeno stanje jezgra ^8Be (2^+)) i kako je kulonova barijera (barijerni faktor iz F.12) ovde uža stanje je kratkoživuće sa širinom od ~800 keV.



E11

Na osnovu gornjih podataka naći i objasniti položaj rezonantnih (pobuđenih) stanja jezgra ^8Be njihove spinove i parnosti kao i njegovu šemu raspada. Kvalitativno objasniti ponašanje preseka navedenih reakcija i širine rezonansi. Koristiti zakone održanja energije, momenta impulsa i parnosti.

E12



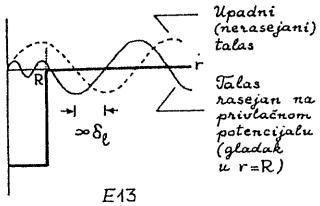
E12

Čestica se elastično rasejava na potencijalu koji ima »odbojno jezgro« (videti sliku). Visina barijere označena je sa V_0 a širina sa R. Neka je energija čestice (E) znatno manja od visine barijere. Ispitati sferno simetrično (S) rasejanje na ovom potencijalu. Pod kojim uslovima efikasni presek teži nuli, a pod kojim je maksimalan? Razmotriti i slučaj $kR \ll 1$. (Za $r>R$ čestica se kreće slobodno).

E13 Amplituda elastičnog rasejanja izražena preko faznih pomaka glasi:

$$f(\vartheta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,a_l(k)\,P_l(x) \quad \text{sa} \quad x=\cos\vartheta \quad \text{i} \quad a_l=\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2i}.$$

Fazni pomak δ_l predstavlja faznu razliku radijalnog dela talasne funkcije čestice relativnog momenta impulsa l (l-tog parcijalnog talasa odgovarajuće ugaone distribucije, tj. diferencijalnog preseka) za slobodnu (nerasejanu) i rasejanu česticu daleko van dometa rasejavajućeg potencijala ($r \to \infty$).



E13

Na visokim energijama doprinose sume po l daje veliki broj parcijalnih amplituda a_l. Koliki broj momenata impulsa (parcijalnih talasa) treba uzeti u obzir unapred ne možemo da znamo. Međutim, ako se radi o česticama koje interaguju silama kratkog dometa moguće je definisati određeni efektivni radijus interakcije R. Tada će za rasejanje biti važni samo parcijalni talasi sa $l \leqslant L \simeq kR$ gde je k talasni broj u sistemu centra masa.

Razmotrimo, sada, sledeći model: kada je energija čestice vrlo velika pretpostavimo da su sve parcijalne amplitude a_l do nekog L (koji zavisi od energije i vrste interakcije) podjednake, tj.:

$$a_l = a_0\,\theta\,(L-l) \quad \text{gde je} \quad \theta\,(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Čemu je jednaka amplituda rasejanja, diferencijalni efikasni presek, totalni efikasni presek i fazni pomak za rasejanje u ovom modelu?

Napomena: Ležandrovi polinomi zadovoljavaju sledeće rekurzivne relacije:

1) $(2l+1)\,P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)$

2) $(l+1)\,P_{l+1}(x)-(2l+1)\times P_l(x)+l\,P_{l-1}(x)=0$

3) $(x^2-1)\,P'_l(x)-l\times P_l(x)+lP_{l-1}(x)=0.$

E14 Doprinos l-tog parcijalnog talasa efikasnom preseku za elastično rasejanje čestice na datom potencijalu (koji ima i apsorbujući imaginarni deo) jednak je:

$$\sigma_e(l)=4\pi\lambda^{*2}(2l+1)\,|\,T_l\,|^2 \qquad \text{sa} \qquad T_l=\frac{\eta_l\,e^{2i\delta_l}-1}{2i}$$

gde je δ_l — fazni pomak, η_l — apsopcioni parametar ($0 \leqslant \eta_l \leqslant 1$; $\eta_l=0$ znači maksimalnu apsorpciju a $\eta_l=1$ odsustvo apsorpcije) i λ^* talasna dužina upadne čestice.

Doprinos l-tog parcijalnog talasa preseku za sva neelastična rasejanja — reakcije (ovi procesi su: a) stvarna apsorpcija čestica, b) apsorpcija praćena sukcesivnom emisijom drugih čestica i c) apsorpcija praćena sukcesivnom emisijom iste čestice ali promenjenih karakteristika (energije, spina, itd.)) jednak je:

$$\sigma_r(l)=\pi\lambda^{*2}(2l+1)\,(1-\eta_l^2).$$

a) Koristeći ove izraze napisati izraz za totalni efikasni presek.

b) Pokazati da je moguće postojanje samo elastičnog rasejanja bez neelastičnog (reakcija) ali da obrnuto nije slučaj; svaka reakcija uvek je praćena elastičnim rasejanjem! Prodiskutovati ovaj zaključak na primeru rasejanja na »crnoj« (apsolutno apsorbujućoj) sferi radijusa R.

E15 Fazni pomaci za elastično rasejanje čestice date energije iznose $\delta_0=30°$ i $\delta_1=3°$. Koliki je procentualni doprinos $l=1$ parcijalnog talasa vrednosti totalnog efikasnog preseka? Koliku asimetriju u rasejanje napred — nazad unosi ovaj fazni pomak?

E16 U Bornovoj aproksimaciji (drugog reda) fazni pomak za elastično rasejanje čestice talasnog broja k na potencijalu $V(r)$ jednak je:

$$\operatorname{tg}\delta_l=-\frac{2mk}{\hbar^2}\int_0^\infty j_l^2(kr)\,V(r)\,r^2\,dr$$

gde je $j_l(kr)$ sferna Beselova funkcija.

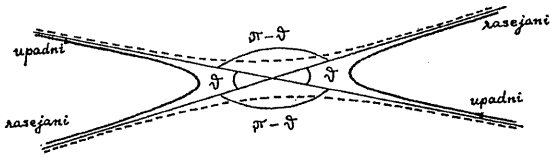
Koristeći formulu za fazni pomak izračunati totalni efikasni presek za neutron — neutron elastično rasejanje, u slučaju S-rasejanja, u nisko energetskoj granici ($k \to 0$). Potencijal interakcije opisan je pravouglom jamom:

$$V(r)=\begin{cases}-V_0, & r<a; \qquad V_0=25\ \text{MeV}\\ 0, & r>a; \qquad a=2{,}8\ \textit{fermi}.\end{cases}$$

Napomena:

$$j_0(kr)=\frac{\sin kr}{kr}.$$

E17 Na slici je prikazano rasejanje protona na protonu u sistemu centra masa.



E17

Pretpostaviti da je relativna energija protona dovoljno niska tako da u procesu rasejanja učestvuju samo Coulombove sile odbijanja, a da je doprinos nuklearnih zanemarljiv. U ovom slučaju amplitudu rasejanja možemo da izrazimo na sledeći način:

$$f(\vartheta)=\frac{e^2}{Mv^2}\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]^{-2}\exp\left\{-i\eta\log\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]^2\right\}$$

gde je $\eta=\dfrac{e}{\hbar v}$, M masa protona a v relativna brzina protona. Polazeći od ovog izraza izvesti formulu za Mott-ov diferencijalni efikasni presek.

E18 Eksperimentalni totalni presek za rasejanje nepolarisanih neutrona energije 1 eV na protonu jednak je ~20 barn. U rasejanju, gde čestice nisu u vezanom stanju, treba da se ispolji i uticaj singletne dvočestične interakcije. Da bi se našao njen

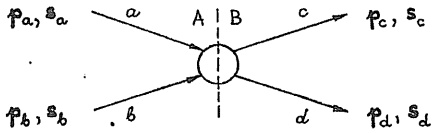
doprinos preseku naći prvo presek rasejanja usled tripletne interakcije aproksimirane pravouglom potencijalnom jamom dubine $V_{ot}=-20$ MeV i dometa $r_{ot}=2\times10^{-13}$ cm. Zatim pretpostaviti da su tripletno i singletno stanje nekoherentni i da doprinose totalnom preseku proporcionalno njihovim statističkim težinama. Odatle poređenjem sa eksperimentalnom vrednošću preseka naći presek singletnog rasejanja. Energiju upadne čestice zanemariti u odnosu na dubinu potencijala.

E19 Za rasejanje neutrona na neutronu na niskim energijama vrednosti totalnih efikasnih preseka za singletno i tripletno rasejanje iznose:

$$\sigma_{\uparrow\downarrow}=70\ barn \qquad \text{i} \qquad \sigma_{\uparrow\uparrow}=4\ barn.$$

Ako su upadni neutroni i neutroni mete polarizovani jedni u odnosu na druge sa prosečnim uglom polarizacije $\beta=60°$ izračunati totalni efikasni presek za ovakvo rasejanje.

E20 Razmotriti reakciju koja u početnom (A) i krajnjem (B) stanju ima po dve čestice ($a+b\to c+d$)



E20

Diferencijalni presek za ovu reakciju može se napisati u obliku (po tzv »zlatnom pravilu«):

$$\frac{d\sigma_{AB}}{d\Omega}=\frac{2\pi}{\hbar v_{ab}}|T_{A\to B}|^2\frac{dn_{AB}}{dE}$$

gde je v_{ab} relativna brzina čestica a i b, $T_{A\to B}$ matrica prelaza, a dn/dE broj konačnih stanja sistema po jedinici energije. Pošto u kvantnoj mehanici svi izrazi moraju da budu invarijantni u odnosu na inverziju vremena, to i matrica prelaza mora da zadovoljava uslov:

$$|T_{A\to B}|=|T_{B\to A}|.$$

Polazeći od ovog iskaza, koji predstavlja temelj principa »detaljne ravnotežе« uspostaviti vezu između nepolarisanih diferencijalnih preseka za dve inverzne reakcije

$$a+b\to c+d \qquad \text{i}$$

$$c+d\to a+b.$$

E21 Fotodezintegracija deuterona ($\gamma+D\to n+p$) i radijacioni zahvat neutrona ($n+p\to\gamma+D$) su dve inverzne reakcije. Koristeći princip detaljne ravnoteže naći odnos totalnih preseka za ove dve reakcije. Energija gama kvanta u sistemu centra mase iznosi 2,5 MeV a vezivna energija deuterona je 2,2 MeV.

E22 Složeno jezgro ^{64}Zn može da se kreira u dve reakcije: $p+{}^{63}Cu$ i $\alpha+{}^{60}Ni$, a da se raspadne na tri načina:

$$^{64}Zn\to\begin{cases}{}^{63}Zn+n\\ {}^{62}Zn+2n\\ {}^{62}Cu+n+p.\end{cases}$$

Ako su kinetičke energije upadnog protona i alfa čestice tako izabrane da složeno jezgro dobije istu energiju ekscitacije pokazati da između efikasnih preseka za šest mogućih reakcija postoji odnos:

$$\sigma(p,n):\sigma(p,2n):\sigma(p,pn)=\sigma(\alpha,n):\sigma(\alpha,2n):\sigma(\alpha,pn).$$

E23 Efikasni presek za reakciju koja se odvija mehanizmom složenog jezgra ($a+A\to(C)\to B+b$) u blizini rezonanse E_0 glasi:

$$\sigma_{ab}=\pi\lambda^{*}g\frac{\Gamma_{ac}\Gamma_b}{(E-E_0)^2+\Gamma/4}\qquad (Breit\text{-}Wigner\text{-}ova\ formula)$$

gde je λ^* redukovana talasna dužina upadne čestice, Γ_{ac} i Γ_b širine nivoa za formiranje složenog jezgra i njegov raspad kanalom b, a $\Gamma=\Gamma_{ac}+\Gamma_b+\sum_k\Gamma_k$ gde se sumiranje vrši po svim mogućim kanalima raspada složenog jezgra. g je spinski statistički faktor.

Odrediti vrednost faktora g ako je moment impulsa upadne čestice I_a, spin mete I, a spin složenog jezgra I_c. Koliki je spinski statistički faktor u slučaju reakcije sa nepolarisanim česticama?

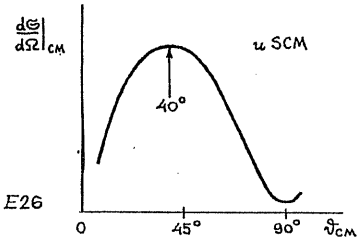
E24 Izračunati efikasni presek za (n,γ) reakciju na jezgru ^{109}Ag sa termalnim neutronima energije 2 eV. Prva rezonansa za neutrone nalazi se na energiji 5,1 eV. Širine nivoa za zahvat neutrona i emisiju gama kvanta su $\Gamma_\gamma=0{,}14$ eV i $\Gamma_n=1{,}3\times10^{-2}$ eV, a spinovi jezgara ^{109}Ag i ^{110}Ag iznose 1/2 i 1.

E25 Spin složenog (compound) jezgra iznosi $\vec{I}$, i normalan je na pravac upadnog snopa čestica. Složeno jezgro raspada se na rezidualno jezgro spina $\vec{j}$ i emituje česticu (a) momenta impulsa $\vec{l}$. Pravac kretanja ove čestice ($\vec{n}$) nalazi se u ravni normalnoj na njen moment impulsa $\vec{l}$. Pretpostavljajući da je $|\vec{I}|\gg|\vec{j}|$ naći uglovnu raspodelu čestica a.

Napomena:

Kada merimo uglovnu distribuciju čestica a, ne selektujemo nikakav specijalni pravac spina $\vec{I}$ složenog jezgra, tako da možemo da usrednjimo $\vec{I}$ oko pravca upadnog snopa, tj. po azimutalnom uglu φ (tzv. direkciona distribucija).

E26 Na slici je prikazana uglovna raspodela odlazećih protona za reakciju $^6Li(p,p')\,^6Li$, koja je tipičan primer direktne reakcije. Poznato je da transfer momenta impulsa u ovoj reakciji iznosi $\Delta l=2$. Ako je energija upadnih protona (u laboratorijskom sistemu $E_p=40$ MeV) oceniti na kolikom uglu treba očekivati maksimum raspodele. Pretpostaviti da se reakcija odvija na nuklearnoj površini i da je $E_p \simeq E'_p$. (Uzeti za poluprečnik jezgra Li vrednost 3 fm).



E26

E27 Odrediti ugaonu raspodelu protona u »striping« reakciji:

$$^2D+{}^A_Z X \rightarrow {}^{A+1}_Z X+p.$$

Proces posmatrati u Bornovoj aproksimaciji, zanemarujući spinske i kulonovske efekte. Zatim pretpostaviti da su jezgra sferno-simetrična i beskonačno teška. U tom slučaju amplituda verovatnoće prelaza, koja opisuje striping reakciju, zavisi samo od početnog i »krajnjeg stanja deuterona«. Početno stanje deuterona može se opisati talasnom funkcijom

$$\psi_D(\vec{r}_n,\vec{r}_p)=\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{R_D}}e^{i\vec{k}_D\frac{\vec{r}_n+\vec{r}_p}{2}}$$

gde je $\vec{k}_D=\vec{k}_n+\vec{k}_p$ talasni vektor (upadnog) deuterona, R_D njegov poluprečnik, $\vec{r}_n$ i $\vec{r}_p$ protonska i neutronska koordinata, a

$$\vec{r}=\vec{r}_n-\vec{r}_p.$$

»Krajnje stanje deuterona« može se prikazati talasnom funkcijom oblika:

$$\psi'_D(\vec{r}_n,\vec{r}_p)=\varphi_n(\vec{r}_n)\,\chi_p(\vec{r}_p)$$

gde je $\varphi_n(\vec{r}_n)=U_e(r_n)\,Y_{lm}(\vartheta_n,\varphi_n)$ talasna funkcija vezanog neutrona u jezgru $^{A+1}_Z X$, a $\chi_p(\vec{r}_p)=\exp(-i\vec{k}_p\cdot\vec{r}_p)$ talasna funkcija protona koji se slobodno kreće. Takođe pretpostaviti da proton ne učestvuje u mehanizmu striping reakcije, da se reakcija odigrava na samoj površini jezgra, da je potencijal interakcije sferno-simetričan i da se može predstaviti funkcijom oblika:

$$V(r_n)=V_0\,\delta(r_n-R).$$

E28 Godine 1939. S. Chandrasekhar piše: » . . . transmutacija elemenata je jedini uzrok prisustva svih elemenata u zvezdama; svi su oni kontinuirano sintetizovani u zvezdama za koje pretpostavljamo da su svoje postojanje počele kao mase čistog vodonika; osim toga, transmutacije su jedini izvor energije zvezda . . .« Termonuklearne reakcije, dakle, predstavljaju jednu od najvažnijih klasa pojava u prirodi; laboratorijsko proučavanje nuklearnih fenomena, makar samo u ovom kontekstu, čini se potpuno opravdanim.

Jednu od osnovnih sistematizacija astrofizike predstavlja Hertzsprung-Russelov (*HR*) dijagram. Na njemu je apsolutna zvezdana veličina (M) ili luminoznost (L) (totalna energija emitovana u jedinici vremena) predstavljena u funkciji efektivne (površinske) temperature zvezde (T_e) a radijus zvezde (R) pri tom se pojavljuje kao parametar. Ove su veličine međusobno povezane relacijama:

$$M=2{,}5\,\log L+\text{const}$$

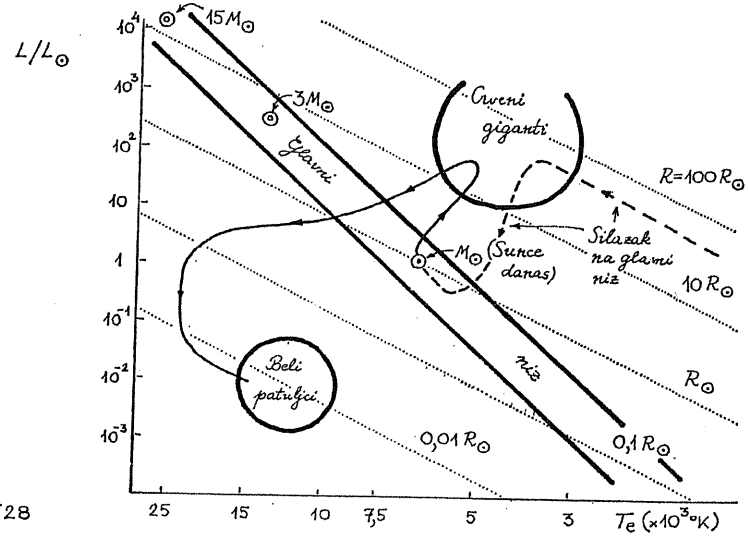
$$L=4\pi R^2\,\sigma\,T_e^4$$

gde je prva definiciona a druga posledica Štefan-Boltzmannovog zakona što ukazuje na primenjenu aproksimaciju apsolutno crnog emitera. Na *HR* dijagramu se ogromna većina zvezda opservabilnih karakteristika grupiše u tri jasno definisane oblasti:

1) zvezde glavnog niza (sekvence)
2) crveni džinovi (giganti)
3) beli patuljci.

Ovo se tumači pretpostavkom da zvezde vidimo u različitim fazama njihove evolucije pri čemu svakoj fazi odgovara određen položaj na *HR* dijagramu. U najgrubljim se crtama evolucija zvezde (tj. materije u Univerzumu) može predstaviti na sledeći način:

I faza: faza gravitacione kontrakcije: Rađanje zvezde gravitacionom kontrakcijom razređenog i hladnog međuzvezdanog gasa i prašine (u kome do 99% preovlađuje vodonik) pri čemu se temperatura diže do $\sim 10^7$ stepeni kada počinju termonuklearne reakcije sagorevanja vodonika; zvezda dolazi u stanje termodinamičke ravnoteže, tj. »silazi na glavni niz«.



E28

II faza: faza glavnog niza: Vremenski najduža faza u kojoj je zvezda u stabilnom režimu termodinamičke i hidrodinamičke ravnoteže. Ukupna energija koju zvezda emituje u jedinici vremena sa površine jednaka je energiji generisanoj u termonuklearnim reakcijama u dubini zvezde. Gravitacioni pritisak spoljnih slojeva uravnotežen je pritiskom idealnog gasa (plazme, bez unutrašnjih stepeni slobode) u unutrašnjosti. Kada se sav vodonik iz jezgra zvezde fuzioniše u helijum, za vreme reda $\sim 10^9$ godina (»potroši gorivo«) gravitaciona kontrakcija se nastavlja, temperatura u centru i dalje raste, vodonik počinje da »gori« u slojevima sve daljim i daljim od centra. Usled diskontinuiteta u srednjoj molekulskoj težini (u jezgru je helijum a okolo uglavnom vodonik) dolazi od nagle ekspanzije spoljašnjeg omotača zvezde; počinje

III faza: faza crvenog giganta: Temperatura i gustina u centru i dalje rastu ($\sim 10^8$ grad i $\sim 10^4$ cgs respektivno) i u gustom jezgru započinju reakcije helijuma sa elementima *CNO* grupe u teže elemente (reakcija $3\alpha \rightarrow {}^{12}C+\gamma$ je zbog $3\,\alpha$ sudara malo verovatna ali je ubrzana duplom rezonansom: $2\,\alpha$ u ${}^{8}Be$ i ${}^{8}Be+\alpha$ u ${}^{12}C$). Tako se utroši sav *He* iz centra i ljuska goruće *He* počinje da se širi od centra prateći *H* ljusku koja je na nižoj temperaturi.

Ove tri faze obavezne su u životu svake zvezde (što je veća masa to je i evolucija kroz sve faze brža. Jedino zvezde ekstremno malih masa ($M<0{,}1\ M_\odot$), koje zbog malih gravitacionih pritisaka ne mogu dovoljno da se zagreju da bi otpočele sagorevanje vodonika, ne silaze na glavni niz). Dalja evolucija, u zavisnosti od početne mase zvezde, može poći jednim od sledećih puteva; i tako započinje:

IV faza: a) Ako je masa zvezde nedovoljna (manja od $\sim 1{,}2\ M_\odot$ tj. tzv. »Chandrasekharove granice«) tako da gravitaciona kontrakcija ne može da obezbedi dovoljnu temperaturu, sinteza u teže izotope će se u izvesnoj fazi zaustaviti (»potrošeno nuklearno gorivo«). Postići će se ravnoteža između gravitacionog pritiska i pritiska ohlađenog i potpuno degenerisanog elektronskog fermi-gasa ogromne gustine. Zvezda završava svoju evoluciju kao »beli patuljak« (Sunce očekuje ova sudbina).

b) Ako je masa zvezde od 1,2 do 1,6 $M_\odot$ tada gustine postignute gravitacionom kontrakcijom postaju dovoljne za otpočinjanje neutronizacije materije, tj. dotle sintetizovanih elemenata grupe *Fe*, u procesima tipa $p+e^- \rightarrow n+\nu$. Pošto se pritisak degenerisanog neutronskog gasa uravnotežava sa znatno većim gravitacionim pritiskom no, recimo elektronski gas, to su i rezultujuće gustine ovakvih neutronskih zvezda ogromne, reda 10^{14} g/cm^3. Pošto je masa zvezde u ovakvom konačnom stanju veća od mase u početnom stanju ($m_n > m_p$) znači da je energiju potrebnu za njeno formiranje obezbedila gravitacija.

c) Ako je $M \geqslant 1{,}6\ M_\odot$ tada u konačnoj fazi gravitaciona kontrakcija nadvladava sve unutrašnje pritiske i zvezda kolabira (gravitacioni kolaps) a njen radijus asimptotski teži gravitacionom radijusu $r = 2\gamma M/c^2$ konačne Schwartzschildove sfere; zvezda prelazi u završnu fazu »crne jame«. Ako se ispostavi da ovakvi objekti zaista postoje onda je ukupnoj energiji Univerzuma gravitacija doprinela možda isto toliko koliko i nuklearni procesi!

d) U nekim slučajevima (nije tačno jasno kada) ako je masa zvezde dovoljno velika, posle sagorevanja *He* i dalje kontrakcije uz dizanje temperature, pa egzoenergetske sinteze sve do elemenata grupe *Fe* i dalje nastavljanje kontrakcije i izvanrednog zagrevanja (reda 10^{10} grad) postaju moguće i endoenergetske reakcije (savlađivanje praga). U njima se oslobađa veliki broj α, p i n koji daljim zahvatima mogu formirati sve teže elemente do kraja tablice. Kako ovi procesi sada troše energiju a ne oslobađaju je, to unutrašnji pritisak naglo pada (ovo su brzi procesi) i pod dejstvom gravitacionog pritiska dolazi do implozije, zatim brzog daljeg zagrevanja i potom eksplozije. Ogromna se energija pritom oslobodi a događaj se zove eksplozijom supernove. Izbačeni materijal, reda $M_\odot$, sadrži između ostalog i teške elemente koji tako dospevaju u međuzvezdani prostor. Zvezde koje su tek u stadijumu formiranja (zvezde druge i viših generacija, kao i naše Sunce) mogu prihvatiti ovaj materijal i tako doći do težih elemenata potrebnih za svoju evoluciju. Znači da teški izotopi nisu stvoreni u trenutku stvaranja sveta (po »big-bangu«) niti u kontinuiranoj produkciji materije (po »steady-state« teorijama) već u čisto nuklearnim procesima tokom evolucije zvezda. Time se u potpunosti može objasniti obilnost izotopa u opservabilnom Univerzumu (između ostalog i na Zemlji). Ostatak supernove može biti, recimo, neutronska zvezda (čuveni pulsar u maglini Raka kao ostatak supernove iz 1054 godine).

Na priloženom *HR* dijagramu šematski je prikazan evolucioni put zvezde tipa našeg Sunca. Iz obilnosti izotopa ${}^{238}U$ i njegovih produkata raspada kao i iz paleontoloških podataka starost Zemlje utvrđena je na ~ 5 eona (1 eon $= 10^9$ godina). Takođe je zaključeno da je Sunce bar toliki vremenski period svetlelo približno nepromenjenom luminoznošću. Ako su danas parametri Sunca:

$$L_\odot = 3{,}9 \times 10^{33}\ \text{erg/s}$$

$$R_\odot = 7 \times 10^{10}\ \text{cm}$$

$$M_\odot = 2 \times 10^{33}\ \text{g}$$

pokazati grubim procenama da nijedna vrsta energije osim termonuklearne ne može tokom boravka Sunca na glavnom nizu (~ 10 eona) da mu obezbedi konstantnu luminoznost jednaku današnjoj.

Pri razmatranju veze između gravitacione i toplotne energije koristiti teoremu viriala (kinetička energija = toplotna, potencijalna = gravitaciona) i pokazati da gravitaciona kontrakcija mase idealnog gasa obavezno dovodi od njegovog zagrevanja.

E29 Proceniti temperaturu i pritisak u centru Sunca ostvarene na kraju faze gravitacione kontrakcije do današnjih dimenzija. Pretpostaviti da je Sunce dostiglo stanje stacionarne nerotirajuće homogene zvezde sfernog oblika (model) u stanju hidro i termodinamičke ravnoteže i da je sastavljeno od idealnog gasa (plazme) sa 70% (mase) vodonika, 30% helijuma i 1% svih težih elemenata. Prodiskutovati rezultat sa gledišta pogodnosti za ostvarivanje termonuklearnih reakcija i zavisnost zagrejanosti od mase zvezde.

E30 U normalnim uslovima na Zemlji materija je nuklearno stabilna. Među protonima, recimo, postoji Kulonova barijera visine $e^2/R \simeq 0{,}7$ MeV i sve dok je

relativna energija protona manja od ove energije verovatnoća nuklearne interakcije (kontakta sa $r<R$) je penetracijom kroz barijeru izvanredno smanjena. Ako je temperatura normalnih uslova na Zemlji $T=300°K$ naći faktor usporenja fuzije deuterijuma u ^4He usled penetracije Kulonove barijere i tako proceniti verovatnoću ovakve fuzije. (Koristiti rezultat zadatka F.12).

E31 Osnovni način kojim vodonik »sagoreva« u helijum u ranijim fazama zvezdane evolucije je takozvani p—p ciklus koji preovlađuje do temperatura reda 10^7 stepeni (Bethe 1939). Reakcije koje ga čine su:

$$1)\ p+p \rightarrow d+e^+ +\nu$$

$$2)\ p+d \rightarrow {}^3He+\gamma$$

$$3)\ {}^3He+{}^3He \rightarrow {}^4He+p+p$$

Sve tri reakcije su egzotermne i oslobođena energija nadoknađuje energiju izračenu sa površine zvezde. Konačan efekt ciklusa jednak je fuziji 4 protona u α-česticu. Prva reakcija teče preko slabe interakcije i stoga je veoma spora. Srednja energija neutrina iz pozitronskog raspada jednaka je $\sim 0{,}26$ MeV. Ova je energija jedina koja je za zvezdu izgubljena i ne doprinosi održavanju termodinamičke ravnoteže (uloga neutrina u astrofizičkim procesima koji, između ostalog, i na ovaj način disipira energiju Univerzuma, još nije sasvim jasna). Da bi se treća reakcija razvila potrebno je da se prva i druga dese dva puta. Naći ukupnu energiju oslobođenu u ovom ciklusu koja efektivno doprinosi energiji zvezde.

Na ovako visokim temperaturama gas je potpuno jonizovan i nalazi se u stanju plazme. Diskutovati razlog zbog koga je plazma izrazito pogodna sredina za ostvarivanje ovih procesa kao i način na koji se plazmatičnost gasa posle završenog ciklusa održava.

E32 U kasnijim fazama evolucije zvezde (na temperaturama višim od $\sim 10^7$ stepeni) dominantan način fuzije vodonika u helijum je kroz takozvani C—N ciklus koji se sastoji od sledećih reakcija:

$$1)\quad {}^{12}C+p \rightarrow {}^{13}N+\gamma$$

$$2)\quad {}^{13}N \rightarrow {}^{13}C+e^+ +\nu$$

$$3)\quad {}^{13}C+p \rightarrow {}^{14}N+\gamma$$

$$4)\quad {}^{14}N+p \rightarrow {}^{15}O+\gamma$$

$$5)\quad {}^{15}O \rightarrow {}^{15}N+e^+ +\nu$$

$$6)\quad {}^{15}N+p \rightarrow {}^{12}C+{}^4He$$

$${}^{12}C+p \rightarrow \text{itd.}$$

Čist efekat je, kao i u p—p ciklusu, sinteza 4 protona u α česticu. Reakcije 2) i 5) su čisti radioaktivni pozitronski raspadi i neutrino u njima, u srednjem, odnosi energije 0,72 MeV i 0,98 MeV respektivno. Ugljenik 12 se kroz ciklus regeneriše i na izvestan način služi kao katalizator ove sinteze.

Naći efektivnu energiju oslobođenu u celom ciklusu.

E33 Tempo (brzinu) termonuklearne reakcije sinteze jezgara tipa (1) i (2), TNR_{12}, (tj. [broj reagovanih parova 1—2/cm³/s] koji je proporcionalan oslobođenoj energiji/cm³/s) koja se u određenoj zapremini nalaze u gasnom (plazmatičnom) stanju na temperaturi T možemo naći preko sledećeg modela koji daje vrlo dobre rezultate (ovo je od interesa ne samo pri proceni brzine procesa u zvezdama već i pri projektovanju pokušaja ostvarivanja kontrolisane fuzije). Neka se jezgra mete (2) nalaze u obliku gasa uniformne gustine n_2. TNR_{12} će biti jednak $n_2\,\sigma\Phi_1$ gde je $\sigma=\sigma(v)$ presek za reakciju pri relativnoj brzini čestica (1) i (2) jednakoj v a $\Phi_1=n_1 v$, fluks čestica vrste (1). U smeši gasova u stanju termodinamičke ravnoteže na temperaturi T, međutim, postoji definisan spektar brzina v, $\psi(v)$, pošto i v_1 i v_2 imaju definisane Maxwell-Boltzmannove (MB) spektre oblika:

$$N_i(\vec{v_i})\,dv_{ix}\,dv_{iy}\,dv_{iz}=\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_i v_i^2}{2kT}}\,dv_{ix}\,dv_{iy}\,dv_{iz}$$

koji su individualno normirani na jedinicu (a ne na broj čestica po jedinici zapremine n_i):

$$\int_0^\infty N(\vec{v})\,d^3v=1.$$

Kako je $\psi(v)\,dv$ jednako verovatnoći da relativna brzina čestica (1) i (2) bude u intervalu od v do $v+dv$ to će biti:

$$TNR_{12}=n_1 n_2 \int_0^\infty v\,\sigma(v)\,\Psi(v)\,dv=n_1 n_2 \langle\sigma v\rangle\equiv n_1 n_2 \lambda_{12}.$$

Polazeći od ovog modela naći aproksimativnu vrednost ovog izraza, tj. opšti oblik zavisnosti brzine termonuklearne reakcije od temperature. Takođe naći srednje vreme života nuklearne vrste pod gore navedenim uslovima. Uzeti u obzir i mogućnost da su čestice (1) i (2) identične. Presek reakcije $\sigma(v)$ faktorisati na nuklearni i Kulonov deo (prozračnost barijere) (koristiti rezultate zadataka E14 i E30). Objasniti koje je veličine potrebno poznavati da bi se u konkretnoj situaciji eksplicitno našli i tempo reakcije i energija oslobođena/cm³/s.

E34 Energija oslobođena po gramu materije zvezde u sekundi u jednom punom p—p ciklusu u funkciji temperature je:

$$E_{pp}=2{,}5\times 10^6\,\rho\,X^2\left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} e^{-33{,}8\left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}}\ \text{erg/g. s}$$

a u C—N ciklusu:

$$E_{CN}=8\times 10^{27}\,\rho\,X X_{CN}\left(\frac{10^6}{T}\right)^{2/3} e^{-152{,}3\left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/3}}\ \text{erg/g. s.}$$

(kao direktna primena izraza dobijenog u prethodnom zadatku). Koncentracija vodonika u našoj epohi iznosi $\sim 70\%$ po masi ($X=0{,}7$) u centralnoj aktivnoj oblasti koja se prostire grubo do $0{,}11\,R_\odot$. Gustina u ovoj oblasti iznosi ~ 100 g/cm³ a srednja temperatura oko $1{,}5\times 10^7$ °K. Procenjena vrednost za X_{CN} je 0,005. Nalaženjem vrednosti gornjih izraza pokazati da je p—p ciklus dominantan način

sagorevanja vodonika na Suncu. Zatim naći luminoznost Sunca, efektivnu površinsku temperaturu i vrednost solarne konstante (energiju/cm²s na površini Zemlje).

E35 Zvezda se nalazi u evolucionoj fazi crvenog džina u kojoj je sav vodonik iz jezgra potrošen a helijum još nije počeo da gori. Glavni izvor energije je sagorevanje vodonika u tankoj ljusci oko inertnog helijumovog jezgra. Radijusi ljuske su $R_< = 1{,}8 \times 10^9$ cm i $R_> = 2 \times 10^9$ cm. Srednja temperatura u ovom sloju je $\sim 5 \times 10^7$ °K a srednja gustina ~ 50 g/cm³. Naći luminoznost zvezde i njenu površinsku temperaturu. Za nalaženje energije oslobođene/cm³s u p—p i C—N ciklusu koristiti izraze date u tekstu prethodnog zadatka. Uzeti da je $X = 0{,}5$ a $X_{CN} = 10^{-3}$ i $R = 100\, R_\odot$.

RE1 Odnos intenziteta čestica (gama kvanata) koje stižu u prostorni ugao određen detektorom prema upadnom intenzitetu (neutrona) jednak je:

$$\frac{\Delta I}{I} = N\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\Delta\Omega_D$$

gde je N broj atoma ^{113}Cd po jedinici površine mete, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ diferencijalni presek za (n, γ) reakciju.
Kako je raspodela emitovanih gama kvanata izotropna sledi da je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma}{4\pi}.$$

Broj atoma ^{113}Cd po jedinici površine iznosi:

$$N = \eta n_0 \Delta X = \eta \frac{\sigma}{A} N_{AV} \Delta X$$

gde je N_{AV}-Avogadrov broj, ρ specifična gustina a A atomski broj kadmijuma. Prostorni ugao $\Delta\Omega_D$ iznosi:

$$\Delta\Omega_D = \frac{S}{L^2}.$$

Dakle, odgovor brojača (B) je:

$$B = \varepsilon \Delta I = \varepsilon\eta \frac{\rho}{A} N_{AV} \Delta X \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\sigma}{L^2} \simeq 35 \text{ imp/s}.$$

RE2 Presek jednostrukog procesa jonizacije najprostije možemo proceniti ceneći rastojanje na kome je energija elektrostatičke interakcije između projektila i elektrona atoma mete jednaka 30 eV, tj.:

$$\frac{e^2}{r} = 30 \text{ eV} \qquad \text{odakle je} \qquad r \simeq 0{,}5 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

pa je geometrijski presek ovog procesa jednak:

$$\sigma = \pi r^2 \simeq 0{,}8 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$$

Ako je početna energija projektila, recimo, 1 MeV broj jonizacionih sudara u kome će se ona potpuno potrošiti biće $p = 10^6/30$. Presek za ovaj proces biće, dakle:

$$\sigma_{\text{jon}} = \frac{\sigma}{p} \simeq 2500 \text{ barn}$$

što je za faktor $\sim 10^3$ veće od tipičnih nuklearnih preseka reda barna. Dakle, od svakih 1000 upadnih čestica samo će jedna stupiti u nuklearnu interakciju dok će ostale, krećući se sve vreme praktično pravolinijski, izgubiti svu energiju na jonizaciju sredine.

Ako sa x označimo put pređen u meti i ako poznajemo gubitke energije projektila po jedinici puta (dE/dx) tada projektil na toj dubini ima energiju $E(x)$. Na taj način je presek za nuklearnu reakciju kao funkcija energije pretvoren u funkciju dubine na kojoj se reakcija dešava, $\sigma(E) \to \sigma(x)$. Broj nuklearnih interakcija di u sloju debljine dx na dubini x je prema tome:

$$di = N(x)\, n\, \sigma(x)\, dx \simeq N_0\, n\, \sigma(x)\, dx$$

gde je $N(x) \simeq N_0$ fluks upadnih čestica koji se praktično ne menja po dubini mete (sve do dometa čestica gde pada na nulu) usled zanemarljivo malog broja nuklearnih interakcija koje jedino uklanjaju projektile iz snopa, a n broj jezgara po jedinici zapremine. Tako je totalan broj nuklearnih interakcija jednak:

$$i = N_0 n \int_0^R \sigma(x)\, dx = N_0 n \int_0^E \frac{\sigma(E)\, dE}{\left|\frac{dE}{dx}\right|}.$$

Odavde je prinos reakcije, po definiciji, jednak:

$$Y(E) = \frac{i}{N_0} = n \int_0^E \frac{\sigma(E)\, dE}{\left|\frac{dE}{dx}\right|}$$

a brzina promene prinosa (ekscitacione funkcije) u funkciji energije:

$$\frac{dY}{dE} = n \frac{\sigma(E)}{\left|\frac{dE}{dx}\right|}$$

pa je presek reakcije jednak:

$$\sigma(E) = \frac{1}{n} \frac{dY}{dE} \left|\frac{dE}{dx}\right|$$

Poznavanje gubitaka energije po jedinici puta i ovde je, dakle, od velikog značaja.

RE3 Ukupan broj emitovanih protona iznosi:

$$N = \int_{4\pi} n(\vartheta)\, d\Omega.$$

Ako je $n(\vartheta_0)$ broj protona koje registruje brojač po jediničnom prostornom uglu tada je:

$$N = 4\pi\, n(\vartheta_0).$$

Iz uslova:

$$\int_{4\pi} n(\vartheta)\, d\Omega = 4\pi\, n(\vartheta_0)$$

imajući u vidu da je $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$, dobijamo jednačinu:

$$n\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + \frac{A}{3}\right) = n(\vartheta_0)$$

iz koje zaključujemo da je:

$$\cos^2\vartheta_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{odnosno} \qquad \vartheta_0 = 35°.$$

RE4 Zakon održanja impulsa i energije za ovu reakciju, u sistemu jedinica u kome je $c=1$, glasi:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d$$

$$E_a + E_b = E_c + E_d.$$

Ako kvadriramo ove dve jednačine i oduzmemo jednu od druge dobićemo:

$$(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = (E_c + E_d)^2 - (\vec{p}_c + \vec{p}_d).$$

Leva i desna strana predstavljaju kvadrate četvoroimpulsa

$$(\mathfrak{p}_a + \mathfrak{p}_b) \text{ i } (\mathfrak{p}_c + \mathfrak{p}_d)$$

a kvadrat četvoroimpulsa je relativistička invarijanta; nezavisan od koordinatnog sistema. Dakle, i za levu i za desnu stranu jednačine možemo da izaberemo sisteme u kojima su izrazi najjednostavniji. Izabraćemo za levu stranu laboratorijski sistem a za desnu sistem centra masa. Tada je:

$$(E_a + m_b)^2 - \vec{p}_a^{\,2} = (E_c + E_d)^2 \qquad \begin{cases} LAB: & \vec{p}_b = 0 \\ SCM: & -\vec{p}_c = \vec{p}_d \end{cases}$$

Prag za reakciju odgovara uslovu da novostvorene čestice c i d u sistemu centra mase miruju, tj.:

$$E_c = m_c; \quad E_d = m_d.$$

Dakle, ako sa T označimo kinetičku energiju

$$(T_a^{\text{prag}} + m_a + m_b)^2 - p_a^2 = (m_c + m_d)^2.$$

Relacija između energije i impulsa čestice a je oblika:

$$p_a^2 = E_a^2 - m_a^2 = (T_a^{\text{prag}} + m_a)^2 - m_a^2$$

tako da kinetičku energiju, koja odgovara pragu za reakciju, možemo da izrazimo samo preko masa mirovanja svih čestica koje učestvuju u reakciji

$$T_a^{\text{prag}} = \frac{(m_a+m_b+m_c \llcorner m_d)\,(m_c+m_d-m_a-m_b)}{2\,m_b} = -\frac{M}{2\,m_b}\,Q$$

gde je $M=\sum_i m_i$ (zbir svih masa) a Q je Q-vrednost reakcije.

RE5 Ako iskoristimo rezultat prethodnog zadatka

$$T_a^{\text{prag}} = \frac{(m_a+m_b+m_c+m_d)\,(m_c+m_d-m_a-m_b)}{2\,m_b}$$

imaćemo:

$$T_a^{\text{prag}} = |Q|\left\{\frac{|Q|}{2\,m_b}+1+\frac{m_a}{m_b}\right\}.$$

Pošto je izraz u zagradi uvek veći od 1 zaključujemo:

$$T_a^{\text{prag}} > |Q|.$$

U slučaju da je $Q \ll m_b$:

$$T_a^{\text{prag}} \simeq |Q|\,\frac{m_b+m_a}{m_b} \quad \text{QEI.}$$

RE6 Prag za nuklearnu reakciju

$$p+t \to {}^3He+n$$

iznosi:

$$T^{\text{prag}} = |Q|\,\frac{m_p+m_t}{m_t} \simeq 1{,}02 \text{ MeV}.$$

Iz zakona održanja energije i impulsa dobijaju se jednačine:

a) $Q=T_T+T_n-T_p$

b) $\sqrt{2\,m_p\,T_p}=\sqrt{2\,m_n\,T_n}\cos\vartheta+\sqrt{2\,m_T\,T_T}\cos\varphi$

c) $0=\sqrt{2\,m_n\,T_n}\sin\vartheta-\sqrt{2\,m_T\,T_T}\sin\varphi$

gde smo indeksom T označili veličine koje se odnose na ${}^3He$. Iz jednačina a), b) i c) dobijamo kinetičku energiju neutrona:

$$T_n\left(1+\frac{m_n}{m_T}\right)-2\left(\frac{m_p m_n}{m_T^2}\,T_p\right)^{1/2}\sqrt{T_n}\cos\vartheta-T_p\left(1-\frac{m_p}{m_T}\right)-Q=0.$$

Ako se nuklearne mase aproksimiraju masenim brojevima, kinetička energija neutrona iznosi:

$$T_n = 0{,}79 \text{ MeV}.$$

RE7 Q-vrednost za reakciju ${}^{27}Al\,(d,p)\,{}^{28}Al$ zavisi od energije ekscitacije jezgra ${}^{28}Al$. Najveća Q-vrednost (Q_g) odgovara osnovnom stanju ${}^{28}Al$. $Q_g=6{,}179$ MeV. Ostale Q-vrednosti dobijamo ako od Q_g oduzmemo energiju ekscitacije odgovarajućeg nivoa. Na taj način se dobija:

$$Q_1=6{,}148 \text{ MeV},\ Q_2=5{,}205 \text{ MeV i } Q_3=5{,}164 \text{ MeV}$$

Ako se produkti reakcije razleću pod uglom od 90° tada je:

$$Q = T_p\left(1+\frac{m_p}{m_{Al(28)}}\right)-T_d\left(1-\frac{m_d}{m_{Al(28)}}\right) \quad \text{(iz prethodnog zadatka)}$$

Kinetičke energije protona (u laboratorijskom sistemu) iznose:

$$T_g=7{,}76 \text{ MeV},\ T_1=7{,}73 \text{ MeV},\ T_3=6{,}82 \text{ MeV},\ T_4=6{,}78 \text{ MeV}.$$

RE8 U sistemu centra masa impulsi čestica su povezani relacijom

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=0$$

(indeksi 1 i 2 se odnose na neutrone a indeks 3 na jezgro B), tako da su samo dva impulsa nezavisna (na primer, impulsi dva neutrona).

Broj konačnih stanja sistema od tri čestice u prostornim ćelijama jedinične zapremine iznosi:

$$d^{(2)}n=(2\,\pi\,\hbar)^{-6}\,d^3p_1\,d^3p_2.$$

Međutim, kako nas interesuje energetska raspodela samo jednog neutrona (na primer, neutrona (1)), po impulsu druge čestice možemo da izvršimo integraciju

$$d^{(1)}n = (2\,\pi\,\hbar)^{-6}\,d^3p_1\int_0^{4\pi}\int_0^{p_0} d^3p_2$$

gde je

$$p_0=[2\,M\,(E_0-E_1-E_3)]^{1/2}.$$

Kako je jezgro (3) »teško«, $E_3 \ll E_1, E_2$, tj.:

$$p_0 \simeq [2\,M\,(E_0-E_1)]^{1/2} \quad \text{a} \quad E_0 \simeq E_1+E_2,$$

sledi:

$$d^{(1)}n=\frac{4\,\pi}{3}(2\,\pi\,\hbar)^{-3}\,d^3p_1\,[2\,M\,(E_0-E_1)]^{3/2}.$$

Energetska raspodela neutrona (1) jednaka je:

$$N(E_1)\,dE_1=\frac{d^{(1)}n}{dE_0}=\text{const}\cdot p_1^2\,dp_1\sqrt{E_0-E_1}.$$

Imajući u vidu relacije

$$p_1\,dp_1=M\,dE_1 \quad \text{i} \quad p_1=\sqrt{2ME_1}$$

spektar emitovanih neutrona (1) možemo da prikažemo izrazom:

$$N(E)\,dE=\text{const}\cdot\sqrt{E\,(E_0-E)}\,dE.$$

RE9 Pri interakciji čestica silama dugog dometa (električne, gravitacione) parametar sudara ρ može biti vrlo veliki. Pri interakciji silama kratkog dometa (jake nuklearne interakcije; kvanti polja imaju masu mirovanja različitu od nule) parametar sudara može biti samo manji od dometa sila r_0; za veće parametre sudara interakcije (rasejanja) nema. Ako je ono što nas zanima upravo nuklearna interakcija, po kojoj su neutron i proton identične čestice, tada jedinu razliku unosi Kulonova interakcija protona sa jezgrom koja kod neutrona ne postoji.

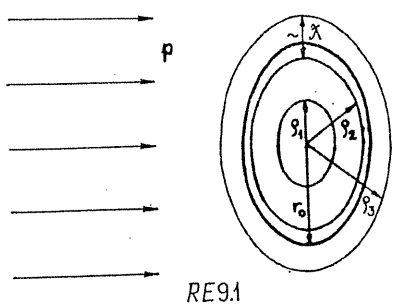
Ako je impuls upadne čestice p a relativni moment impulsa u odnosu na jezgro-metu l i ako parametar sudara označimo sa ρ_l tada je:

$$l = p\,\rho_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

pa je parametar sudara:

$$\rho_l = \frac{\hbar}{p}\sqrt{l(l+1)} = \lambda^*\sqrt{l(l+1)} \simeq \lambda^* l.$$

Za $l=0$ (parcijalni s-talas), dakle, parametar sudara je $\rho_0=0$ (analogan čeonom sudaru); za $l=1$ (parcijalni p-talas) biće $\rho_1 \sim \lambda^*$; za $l=2$ (d-talas) je $\rho_2 \sim 2\lambda^*$ itd. Upadni snop kao da se deli na cilindrične zone radijusa ρ_l unutar kojih čestice sa datim impulsima p (pa i datom energijom) imaju moment impulsa l. (Jasno je da je ovo poluklasično kvalitativno razmatranje. Gornja relacija, naime, implicira simultano poznavanje impulsa i položaja čestice što je relacijama neodređenosti zabranjeno. Postoji određena verovatnoća za nalaženje čestice $l+1$ u zoni čestice l, $l-1$, itd., što je ekvivalentno penetraciji centrifugalne barijere, o čemu se u egzaktnijem tretmanu vodi računa). Ako je domet interakcije r_0, tada iz uslova



RE9.1

$$\rho_{l\,\max} \sim \frac{\hbar}{p} l_{\max} \leqslant r_0$$

nalazimo da je talas sa najvećim l koji će još učestvovati u rasejanju onaj sa

$$l_{\max} \simeq \left\{\frac{r_0}{\lambda^*}\right\} = \left\{\frac{p r_0}{\hbar}\right\} = \{k r_0\}$$

gde vitičasta zagrada označava funkciju »ceo broj od«.

Presek za rasejanje datog parcijalnog talasa na ovakvom centru rasejanja u ovakvoj aproksimaciji možemo smatrati jednakim površini prstena (zone) srednjeg radijusa ρ_l (za homogeni upadni fluks), tj.:

$$\sigma_l \simeq \frac{1}{2}\,\pi\left(\rho_{l+1}^2 - \rho_{l-1}^2\right) = (2l+1)\,\pi\lambda^{*2}.$$

Uz $l_{max} = \{r_0/\lambda^*\}$ totalni presek jednak je:

$$\sigma = \Sigma\,\sigma_l = \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1)\,\pi\lambda^{*2} = 2\pi\lambda^{*2}\,\frac{1}{2}\,l_{\max}(l_{\max}+1) + \pi\lambda^{*2} \simeq \pi(r_0+\lambda^*)^2.$$

Za $\lambda^* \ll r_0$ ($kr_0 \gg 1$), što je slučaj »geometrijske optike« u kome je klasično razmatranje po trajektorijama dobra aproksimacija, biće:

$$\sigma^{k>} \simeq \pi r_0^2$$

tj. presek je proporcionalan geometrijskoj »senci« mete.

U slučaju niskoenergetskog rasejanja sa $\lambda^* \gg r_0$ ($kr_0 \ll 1$) biće $l_{max}=0$ (samo s-talas učestvuje u rasejanju) i:

$$\sigma^{k<} \simeq \pi\lambda^{*2} > \sigma^{k>}$$

što govori o opštoj tendenciji da verovatnoća interakcije (presek) raste sa opadanjem energije (ako u blizini nema rezonantnih stanja kada lokalno može da raste sa energijom). Tvrdnja da su preseci za nuklearne interakcije tipično reda barna može da se veže za ovu procenu. (Detaljnija diskusija u zadatku E14). Uslov za maksimalni moment impulsa ekvivalentan je uslovu koji mora da zadovoljava kinetička energija projektila da bi, ako ima relativan moment impulsa l, interagovala sa centrom rasejanja dimenzija r_0. Iz gornjih relacija uslov za impuls je:

$$p > \frac{\hbar}{r_0}\sqrt{l(l+1)}$$

a za energiju:

$$T = \frac{p^2}{2\mu} > \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}\,l(l+1)$$

u čemu prepoznajemo izraz za visinu centrifugalne barijere. Do efikasne interakcije čestice momenta impulsa l i jezgra, dakle, dolazi ako je energija veća od visine centrifugalne barijere. Alternativno, ako je energija fiksirana, sa jezgrom će interagovati samo one čestice sa $l < l_{max} = \{r_0/\lambda^*\}$. Po egzaktnom kvantnomehaničkom rezonu interagovaće, jasno, i čestice sa većim momentom impulsa ukoliko prethodno penetriraju kroz odgovarajuću barijeru koja je tim neprozirnija što je moment impulsa veći. Ovaj faktor očigledno drastično smanjuje preseke za rasejanje viših parcijalnih talasa.

Uz $r_0 \simeq 1{,}4\times 10^{-13}\,A^{1/3}$ cm visinu centrifugalne barijere cenimo na:

$$V_{\text{centr}} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}\,l(l+1) \simeq \frac{10}{A^{2/3}}\,l(l+1) \quad \text{MeV}.$$

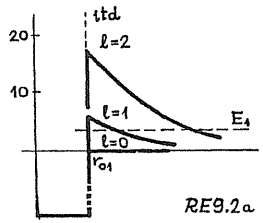
Osim centrifugalne protoni osećaju i kulonovu barijeru visine:

$$V_{\text{coul}} = \frac{z_1 z_2 e^2}{r_0} = \frac{\alpha \hbar c z_{\text{jezgra}}}{1{,}4 \times 10^{-13} A^{1/3}} \simeq \frac{z_{\text{jezgra}}}{A^{1/3}} \text{ MeV}.$$

Pogledajmo kako se visine barijera menjaju u funkciji masenog i rednog broja jezgra mete; za nekoliko izabranih jezgara biće:

	S — neutroni S — protoni	p — neutroni p — protoni	d — neutroni d — protoni	s, p, d, ... protoni
meta	$l=0$	$V_{\text{centr}}(l=1)$	$V_{\text{centr}}(l=2)$	V_{coul}
p	$V_{\text{centr}}(l=0)=0$	20	60	1
^{7}Li		5,5	17	1,6
^{16}O		3,2	10	3,5
^{55}Mn		1,4	4,2	6,6
^{120}Sn		0,8	2,5	10
^{238}U		0,4	1,2	15 MeV

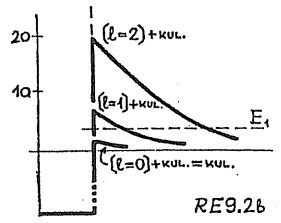
Uticaj centrifugalne barijere na preseke rasejanja neutrona i protona očigledno je, zbog prisustva kulonove barijere za protone, veoma različit u rasejanjima na lakim, odnosno teškim jezgrima. Razlikujemo, dakle, sledeće situacije:



RE9.2a

a) neutroni na lakim jezgrima

na energiji E_1 najverovatnije je s-rasejanje a p- i d- ... su sukcesivno manje verovatna (ugaona distribucija produkata rasejanja je sfernosimetrična)



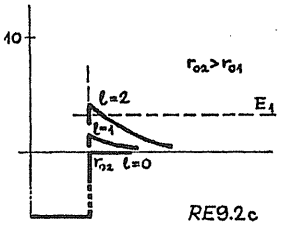
RE9.2b

b) protoni na lakim jezgrima

najverovatnije je opet s-rasejanje ali je i p- (i ostala viša) manje verovatno no za neutrone (šira barijera usled dodatka Kulonove)

c) neutroni na težim jezgrima

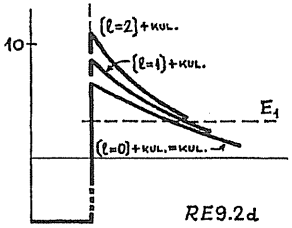
najzastupljenija su s- i p-rasejanja a d-rasejanje je uslovljeno penetracijom kroz barijeru pa je i presek mali. Ugaona distribucija više nije sferno simetrična.



RE9.2c

d) protoni na težim jezgrima

s-, p- i d-rasejanje je podjednako verovatno jer su relativne razlike u širinama barijera zanemarljive u odnosu na dominirajuću širinu kulonove. Zbog nje su preseci svih rasejanja drastično smanjeni u odnosu na neutronske.



RE9.2d

Interakcija elektrona sa jezgrom je, pak, za razliku od interakcije nukleona, čisto elektromagnetna (rasejanje na privlačnom kulonovom potencijalu jer elektron, budući leptonom, ne oseća jake interakcije). Pošto ovu interakciju najbolje od svih poznajemo to je moguće sve situacije izuzetno tačno izračunati. Interakcija naelektrisanja je osnovna ali laka jezgra sa nenultim magnetnim momentima mogu da primetno interaguju sa magnetnim momentom elektrona (potrebno je da jezgra budu laka, sa malim Z, da slaba magnetna interakcija ne bude maskirana jakom električnom). Sledi da je elektron idealna čestica za sondiranje elektromagnetnih osobina jezgara, pa i neutrona i protona posebno. Da bi se u rasejanju počeli da osećaju efekti konačnih dimenzija jezgra potrebno je da talasna dužina elektrona postane reda veličine dimenzija jezgra, tj.:

$$\lambda^* = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E} \cong \frac{200}{E\,(\text{MeV})} \text{ fermi} \simeq R_{\text{jezgra}}.$$

Znači da tek na ~20 do 50 MeV počinju da se dobijaju informacije o dimenzijama jezgra i detaljima distribucije naelektrisanja unutar jezgra a na ~100 MeV o dimenzijama i internoj elektromagnetnoj strukturi nukleona (elastično rasejanje). Visoko-energetski elektroni mogu da indukuju sve vrste reakcija: (e, γ), (e, p), (e, n), (e, d), (e, α) itd. pa čak i fisiju.

RE10 Reakcija (p, α): Pri pokušaju napuštanja jezgra α-čestica oseća Kulonovu barijeru visine

$$V_{\text{coul}} = \frac{z_1 z_2}{R_j} e^2 \simeq \frac{2 z_j}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

pa je za $Z_{jezgra} \simeq 10$, $V_{Coul} \simeq 5$ MeV a za $Z_{jezgra} \simeq 80$, $V_{Coul} \simeq 25$ MeV. Presek za reakciju, dakle, brzo opada sa porastom Z. U težim jezgrima prozračnost barijere je veoma mala i samo veoma energetske α-čestice mogu da napuste jezgro. Ovo, međutim, vodi na niska energetska stanja gde je gustina konačnih stanja mala (zadatak A33) pa je i verovatnoća (presek) za ovakav proces mala (»zlatno pravilo«, zadatak E20).

Reakcija (p, n): Ako reakciju pišemo u obliku

$$p + {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + n$$

uz:

$$m_n - m_p = 1{,}3 \text{ MeV}$$

i kako mora biti

$$M_Y - M_X > -0{,}5 \text{ MeV}$$

da bi jezgro X bilo beta stabilno, tj. da ne bi spontano β-raspadom prelazilo u jezgro Y, to je i:

$$(M_Y + m_n) - (M_X + m_p) = -Q > 1{,}3 - 0{,}5 = 0{,}8 \text{ MeV}.$$

Ovo su, dakle, uvek endotermne reakcije sa pragom većim od 0,8 MeV.

Reakcija (p, p): Ako energija protona prelazi visinu Kulonove barijere

$$V_{coul} \simeq \frac{z_j}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

presek za ovu reakciju poredljiv je sa (p, n) reakcijom. Ako je energija niža od barijere a veća od praga za (p, n) reakciju (0,8 MeV) tada (p, n) preovlađuje. Na još nižim energijama gde je (p, n) zabranjena pragom, ova reakcija dominira.

Reakcija (p, γ): Karakteristični poluživoti stanja koja se deekscitiraju emisijom fotona su $\sim 10^{-12}$ do 10^{-15} s. Pri deekscitaciji emisijom čestica (iz faze složenog jezgra) vreme u kome jezgro promeni svoju organizaciju u energetski pogodniju približno je jednako vremenu u kome nuklearna čestica na koju je koncentrisana energija ekscitacije pređe put približno jednak dimenzijama jezgra. Ako je brzina reda 10^9 cm/s ta vremena su, dakle, reda $\sim 10^{-22}$ s pa je, shodno tome, verovatnoća za čestičnu emisiju znatno veća od one za γ-emisiju (osim u recimo (n, γ) reakcijama). Samo ako je čestična emisija iz ma kojih razloga zabranjena (zakoni održanja ili nedovoljna energija ekscitacije) ili usporena (kulonova barijera) postaje kanal (p, γ) konkurentan čestičnim.

Verovatnoću odvijanja reakcije određenih izlaznim kanalom (presek za određenu reakciju) ne određuje, dakle, samo energetska pogodnost (recimo energetska razlika ili gustina konačnih stanja) već i način kojim se do krajnjeg stanja stiže (izborna pravila, tip (jačina) interakcije). Ovaj zaključak eksplicitno je izražen u »zlatnom pravilu«.

RE11 Nađimo prvo Q vrednosti reakcija:

$$Q_1 \simeq 17{,}25 \text{ MeV}$$

$$Q_2 \simeq 17{,}34 \text{ MeV}$$

$$Q_4 \simeq -1{,}64 \text{ MeV}$$

(p, n) reakcija je, dakle, endotermna (zadatak E10 i E5) sa pragom $T_{prag} = 1{,}88$ MeV.

Da bismo našli energije ekscitiranih stanja u ^8Be moramo proces formiranja složenog jezgra sa gledišta energetskog bilansa posmatrati detaljno. Reakciju označimo kao:

$$a + X \rightarrow C^* \rightarrow b + Y.$$

Održanje impulsa i energije u prvom koraku daje:

$$\vec{p}_a + \vec{p}_X = \vec{p}_c \qquad (p_X = 0)$$

$$(m_a + M_X)c^2 + T_a = M_c^* c^2 + T_c.$$

Kako je, u nerelativističkoj aproksimaciji:

$$T_c = \frac{p_c^2}{2M_c^*} = \frac{m_a}{M_c^*}\frac{p_a^2}{2m_a} = \frac{m_a}{M_c^*}T_a$$

to je:

$$M_c^* c^2 = (m_a + M_X)c^2 + T_a - T_c = (m_a + M_X)c^2 + T_a\left(1 - \frac{m_a}{M_c^*}\right).$$

Ako na desnoj strani stavimo u prvoj aproksimaciji:

$$M_c^* \simeq m_a + M_X$$

tada leva daje M_c^* u drugoj aproksimaciji:

$$M_c^* = (m_a + M_X)c^2 + \frac{M_X}{m_a + M_X}T_a$$

pa je energija pobuđenog stanja u složenom jezgru jednaka:

$$E = M_c^* c^2 - M_c c^2 = (m_a + M_X - M_c)c^2 + \frac{M_X}{m_a + M_X}T_a.$$

U reakciji (p, γ), dakle, jezgro ^8Be formira se u pobuđenom stanju energije:

$$E = 17{,}25 + \frac{M_{>Li}}{m_p + M_{>Li}} \times 0{,}44 \simeq 17{,}6 \text{ MeV}$$

Iz (p, α) $E \simeq 19{,}8$ MeV

Iz (p, p) $E \simeq 18{,}12$ MeV

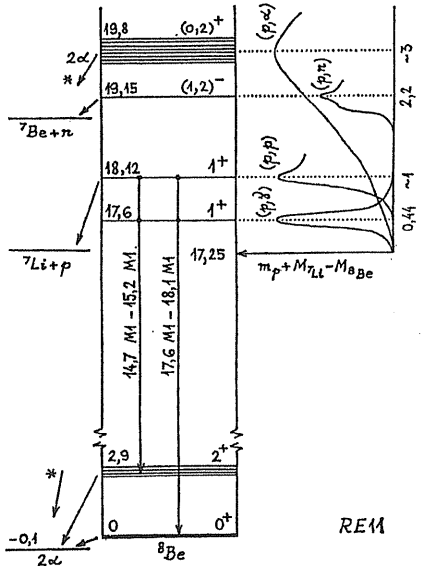
Iz (p, n) $E \simeq 19{,}15$ MeV.

Za $T_p \rightarrow 0$ energija ekscitacije

$$E \rightarrow (m_p + M_{>Li} - M_{^8Be})c^2 = 17{,}25 \text{ MeV}$$

i u reakcijama $p + {}^7Li$ jezgro ^8Be se ne može formirati u nižem stanju. Sada možemo nacrtati šemu pobuđenih stanja ^8Be koja se ekscitiraju u ovim reakcijama.

Pogledajmo sada šta možemo detaljnije da kažemo o ovim stanjima.



Spinove i parnosti ovih pobuđenih stanja (rezonansi) možemo odrediti korišćenjem zakona održanja momenta impulsa i parnosti. Parnost sistema $a+X$ jednaka je proizvodu inherentnih parnosti čestica a i X puta $(-1)^l$ gde je l relativni moment impulsa:

$$P_{a+X}=P_a P_X (-1)^l$$

i ona mora biti jednaka parnosti rezonanse C s jedne, i parnosti krajnjeg sistema $b+Y$ s druge strane.

Po modelu ljusaka u jezgru ^7Li u osnovnom stanju nukleoni se nalaze u stanjima:

$$\text{protoni:} \quad 1s^2,\ 1p^1$$

$$\text{neutroni:} \quad 1s^2,\ 1p^2$$

pa je $\Sigma |l|=3$ i parnost osnovnog stanja je $(-1)^3=-1$.

Inherentna parnost protona je $+1$ pa, ako jezgro ^7Li u reakciji interaguje sa s-protonom parnost sistema $p+^7Li$ biće negativna kao i parnost rezultujućeg stanja u ^8Be. Ako je ^7Li interagovao sa p-protonom tada će parnost stanja u ^8Be biti pozitivna. S druge strane, spin osnovnog stanja ^7Li jednak je 3/2 a protona 1/2. Relativni moment impulsa pri reakciji (na energijama do ~ 5 MeV dokle reakciju i posmatramo) praktično ne može biti veći od 1 (zadatak E9) te je $l=0$, 1. Na osnovu ovoga moguće su sledeće vrednosti spinova i parnosti pobuđenih stanja u ^8Be formiranih u ovim reakcijama:

l	Spin stanja u ^8Be	Parnost stanja u ^8Be
0 (s—proton)	$\frac{\vec{3}}{\vec{2}}+\frac{\vec{1}}{\vec{2}}+0=\begin{cases}2\\1\end{cases}$	$(-1)(+1)(-1)^0=-1$
1 (p—proton)	$\frac{\vec{3}}{\vec{2}}+\frac{\vec{1}}{\vec{2}}+\vec{1}=\begin{cases}3\\2\\1\\0\end{cases}$	$(-1)(+1)(-1)^1=+1$

Kako energije emitovanih γ-kvanata od 14,7 i 17,6 MeV odgovaraju prelazima sa stanja od 17,6 MeV (intermedijarno stanje (p,γ) reakcije) na prvo pobuđeno i osnovno stanje čije spinove i parnosti znamo, i kako znamo da su oni tipa $M1$ to zaključujemo da je spin i parnost stanja od 17,6 MeV 1^+. Iz tablice to znači da je u (p,γ) reakciji ^7Li interagovao sa p-protonom. γ-raspad je spor proces i otud je ova rezonansa znatno uža od ostalih koje se raspadaju emisijom čestica.

Parnost sistema 2α je pozitivna jer su α-čestice bozoni (inherentni spin je nula) i za njih je refleksija uvek ekvivalentna izmeni mesta koja, pak, zbog identičnosti čestica, ne menja znak talasne funkcije sistema (simetrična funkcija). Ova je parnost sa druge strane jednaka:

$$P_{2\alpha}=P_\alpha P_\alpha (-1)^l=(+1)(+1)(-1)^l=+1$$

gde je l relativni moment impulsa razlećućih α-čestica, pa vidimo da l može biti samo 0 i 2. To znači da i stanja koja se raspadaju u 2α moraju imati spin 0 ili 2 i pozitivnu parnost (to i jeste slučaj sa osnovnim i prvim pobuđenim stanjem koja i jesu upravo 0 i 2). Stanje od 19,8 MeV koje je intermedijarno u (p,α) reakciji je, prema tome, $(0 \text{ ili } 2)^+$. ^7Li je, dakle, interagovao sa p-protonom što znači da je trebalo savladati centrifugalnu barijeru visine $\sim$5,5 MeV plus kulonovu od $\sim$1,6 MeV pa relativno visoka energija protona na kojoj se rezonansa javlja ($\sim$3 MeV) omogućava da presek ne bude jako mali. Raspad na dve α-čestice je, zbog njihove velike relativne energije koja lako savlađuje kulonovu barijeru, veoma brz i stanje (rezonansa) je zbog toga veoma široko (šire od stanja od 2,9 MeV). Spin stanja od 17,6 MeV (1^+) ne dozvoljava, dakle, raspad ovog stanja inače verovatnijim (bržim) načinom na 2α već je prvo potrebno preći γ-raspadom u stanje spina 0 ili 2 (ovde je to osnovno ili prvo pobuđeno) koje će se zatim raspasti u energetski pogodnije 2α stanje. Slična je situacija sa stanjima negativne parnosti koja se zbog održanja parnosti ne mogu raspasti na 2α te je prvo potreban prelaz u stanje pozitivne parnosti koji se opet može ostvariti γ-emisijom (emisijom »neparnih« fotona: $E1$, $M2$, ...). Gama emisiji, međutim, uvek konkurišu ostali brži čestični raspadi koji ne moraju biti zabranjeni (ako su i energetski dozvoljeni, tj. egzotermni). Tako činjenicu da se stanje od 19,15 MeV ne raspada ni u 2α ni γ-raspadom, već baš emisijom neutrona (koja je brža —verovatnija — od γ) možemo pripisati upravo njegovoj negativnoj parnosti. Znači da je u ovoj reakciji ^7Li interagovao sa s-protonom (nema centrifugalne barijere) i da je presek zbog toga relativno veliki. Tablica nam dalje kaže da je spin ovog stanja 1 ili 2.

Spin i parnost stanja od 18,12 MeV, konstatovanjem da γ-zraci od 15,2 i 18,1 MeV potiču od γ-kanala njegovog raspada, direktno i jednoznačno utvrđujemo na 1^+. (γ-kanal je u odnosu na konkurentni p-kanal ovde slabiji no za niže stanje od 17,6 MeV kod koga je (p, p) kanal prigušen manjom energetskom razlikom između početnog i krajnjeg stanja pa i višom Kulonovom barijerom). Tako konačno dobijamo šemu prikazanu na slici.

RE12 U oblasti $r>R$ talasna funkcija ψ je suma ravnog talasa e^{ikz} i odlazećeg sfernog talasa $\frac{f}{r} e^{ikr}$, gde je f amplituda rasejanja. Sferno-simetrični deo talasne funkcije (odgovoran za s-rasejanje) možemo da nađemo usrednjujući talasnu funkciju po svim uglovima rasejanja

$$U(r)=\frac{1}{4\pi}\int \psi(\vec{r})\,d\Omega=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[e^{ikr\cos\vartheta}+\frac{f}{r}e^{ikr}\right]d\Omega$$

$$=\frac{f}{r}e^{ikr}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{ikr\sin\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{\sin kr}{kr}+\frac{f}{r}e^{ikr}.$$

Ako je $E\ll V_0$, na granici potencijalne barijere talasna funkcija $u(r)$ treba da teži nuli, tj.:

$$u(R)=0 \quad \text{ili} \quad \frac{\sin kR}{kR}+f\frac{e^{ikR}}{R}=0$$

odnosno:

$$f=-\frac{\sin kR}{k}e^{ikr}.$$

Totalni efikasni presek za elastično rasejanje je:

$$\sigma_t=\int |f|^2\,d\Omega=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2 kR.$$

Ako je $kr=n\pi$ $\sigma_t \to 0$ (nema s-rasejanja, ali to još ne znači da nema i p, d itd. rasejanja).

Ako je $kr=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ maksimalno s-rasejanje ima:

$$\sigma_t^{\max}=4\pi/k^2.$$

U slučaju malih brzina čestice $k \to 0$; $kR \to 0$; totalni presek za s-rasejanje je konstantan i iznosi:

$$\sigma_t=4\pi R^2.$$

(Vidimo da se dobija faktor 4 u odnosu na klasičan — geometrijski — efikasni presek za rasejanje male čestice na idealno tvrdoj kugli!).

RE13 Amplituda elastičnog rasejanja jednaka je

$$f(\vartheta)=\frac{a_0}{k}\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(x)$$

Sumiranje po l možemo da izvedemo koristeći prvu rekurentnu relaciju Ležandrovih polinoma citiranu u napomeni

$$P_l'(x)-P_{l-2}'(x)=(2l-1)P_{l-1}(x)$$

$$P_{l-2}'-P_{l-4}'=(2l-5)P_{l-3}$$

$$P_{l-4}'-P_{l-6}'=(2l-9)P_{l-5}$$

. . . . . .

$$P_{l+1}'-P_{l-1}'=(2l+1)P_l$$

$$P_{l-1}'-P_{l-3}'=(2l-3)P_{l-2}$$

. . . . . .

Sumiranjem ovih izraza dobićemo:

$$P_{L+1}'(x)+P_L'(x)=\sum_{l=0}^{L}(2l+1)P_l(x).$$

Da bismo se oslobodili izvoda Ležandrovih polinoma polazeći od relacije 3 (date u napomeni) dobijamo:

$$P_{L+1}'+P_L=\frac{1}{x^2-1}[(L+1)xP_{L+1}-(L+1)P_L+xLP_L-LP_{L-1}].$$

Koristeći rekurentnu relaciju 2 imaćemo:

$$P_{L+1}'+P_L=\frac{L+1}{x-1}(P_L-P_{L+1}).$$

Na taj način izraz za amplitudu elastičnog rasejanja postaje:

$$f(x)=\frac{a_0}{k}(L+1)\frac{P_L(x)-P_{L+1}(x)}{1-x}.$$

Diferencijalni efikasni presek jednak je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(x)|^2=\frac{|a_0|^2}{k^2}(L+1)^2\frac{[P_L(x)-P_{L+1}(x)]^2}{(1-x)^2}.$$

Totalni efikasni presek dobijamo posle integracije po celom prostornom uglu:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{|a_0|^2}{k^2} \int \left\{ \sum_{l=0}^{L} (2l+1) P_l(x) \right\}^2 d\Omega$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta = -2\pi \, dx.$$

Dakle:

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi |a_0|^2}{k^2} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{l=0}^{L} (2l+1) P_l(x) \right\}^2 dx.$$

Koristeći ortogonalnost sfernih harmonika

$$\int P_l(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ln}$$

lako je pokazati da je:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} |a_0|^2 (L+1)^2.$$

Fazni pomak (konstantan za sve l) nalazimo iz izraza:

$$|a_0|^2 = \left| \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i} \right| = \sin^2 \delta$$

tj.:

$$\sin^2 \delta = \frac{k^2}{4\pi} \sigma_{tot}$$

odnosno:

$$\delta = \arcsin \sqrt{\frac{\sigma_{tot}}{4\pi}} k.$$

RE14 a) Totalni efikasni presek dobićemo sumiranjem l-tih parcijalnih preseka za rasejanje i za reakcije; tj.:

$$\sigma_{tot} = \sum_{l=0}^{\infty} \{\sigma_e(l) + \sigma_r(l)\} = 2\pi\lambda^{*2} \sum_{l} (2l+1)(1 - \eta_l \cos 2\delta_l).$$

Kako je, međutim:

$$1 - \eta_l \cos 2\delta_l = 2 \, Im \, \{T_l\}$$

gornji izraz možemo napisati u kondenzovanom obliku:

$$\sigma_{tot} = 4\pi\lambda^{*2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \, Im \, \{T_l\}.$$

b) Ako apsorpcioni parametar η_l ima maksimalnu vrednost $\eta_l = 1$, l-ti parcijalni presek za reakcije je jednak nuli; parcijalni presek za elastično rasejanje je različit od nule, a za fazni pomak $\delta_l = \pi/2$ ima maksimalnu vrednost:

$$\sigma_e^{max}(l) = 4\pi(2l+1)\lambda^{*2}.$$

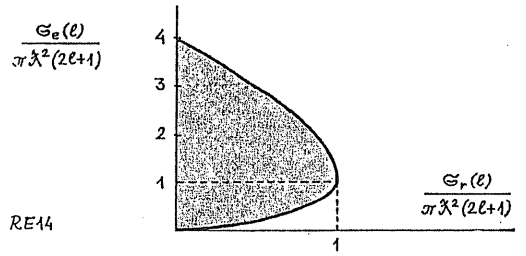
U slučaju maksimalne apsorpcije ($\eta_l = 0$) presek za reakcije ima najveću vrednost

$$\sigma_r^{max}(l) = \pi(2l+1)\lambda^{*2}$$

ali je l-ti parcijalni presek za elastično rasejanje različit od nule i iznosi:

$$\sigma_e(l) = \sigma_r^{max}(l) = \pi(2l+1)\lambda^{*2} \qquad (\eta_l = 0).$$

Moguće vrednosti parcijalnih preseka za različite situacije mogu se predstaviti šrafiranom površinom na slici:



Posmatramo li rasejanje na »crnom« potencijalu dometa R u slučaju malih talasnih dužina tada rasejanju doprinose samo parcijalni talasi sa $l \leqslant l_{max} \simeq kR$. Talasi sa l koji zadovoljavaju ovaj uslov biće potpuno apsorbovani sa presekom

$$\sigma_r = \sum_{l \leqslant l_{max}} \sigma_r^{max}(l) = \sum_{l \leqslant l_{max}} \pi\lambda^{*2}(2l+1) \simeq \pi R^2$$

što je, po gornjim izrazima jednako i preseku za elastično rasejanje $\sigma_e \simeq \pi R^2$, tj.: prostom geometrijskom preseku! Elastično rasejanje »crnim« telom je neočekivano ali se može shvatiti kao obična optička difrakcija (ovakvo se rasejanje često i naziva difrakcijom).

U graničnom, klasičnom tretmanu, ovakav apsorbujući centar rasejanja može se shvatiti kao »crna« (neprozirna) sfera radijusa R koja baca senku u pravcu upadnog snopa. U talasnoj optici, pak, to znači da se u pravcu »unapred« rasejava (difraktuje) toliki intenzitet koliki je potreban za gašenje upadnog snopa što odmah daje presek za ovakvo rasejanje jednak $\sim \pi R^2$. Osim toga, da bi se upadni snop ugasio potrebno je da ovo rasejano zračenje ima istu energiju, tj. da rasejanje bude elastično! Iz talasne optike je poznato (Rayleighev kriterijum za moć razlaganja optičkih sistema) da je difrakciono rasejano zračenje koncentrisano u uglu $\vartheta \simeq \lambda^*/R$ od pravca unapred. U slučaju nuklearnog rasejanja gde je $\lambda^*/R \ll 1$ oblast »senke« je kratka i difrakciono rasejanje je teško opaziti.

RE15 Polazeći od opšteg izraza za efikasni presek za elastično rasejanje u formalizmu parcijalnih talasa imaćemo:

$$\sigma_{tot} = 4\pi\lambda^{*2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

pa dobijamo:

$$\sigma_{tot} = 4\pi\lambda^{*2} (\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1).$$

Procentualni doprinos $l=1$ parcijalnog talasa totalnom efikasnom preseku je:

$$\frac{3 \sin^2 \delta_1}{\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1} = 3{,}3\,\%.$$

Asimetriju za rasejanje napred— nazad definisaćemo preko diferencijalnih efikasnih preseka:

$$\eta = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta - 0) - \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta = \pi)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta = 0) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta = \pi)}.$$

Polazeći od opšteg izraza

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \lambda^{*2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos\vartheta) \right|^2$$

u slučaju samo prva dva fazna pomaka dobićemo ($l_{max}=1$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \lambda^{*2} \left| e^{i\delta_0} \sin\delta_0 P_0(\cos\vartheta) + 3\, e^{i\delta_1} \sin\delta_1 P_1(\cos\vartheta) \right|^2$$

kako je

$$\left.\begin{aligned} P_0(\cos\vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \lambda^{*2} [\sin^2\delta_0 + 9 \sin^2\delta_1 \cos^2\vartheta + 6 \sin\delta_0 \sin\delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0) \cos\vartheta].$$

Asimetrija je, dakle, jednaka:

$$\eta = \frac{6 \sin\delta_0 \sin\delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0)}{\sin^2\delta_0 + 9 \sin^2\delta_1} = \frac{6 \sin 30^\circ \sin 3^\circ \cos(-27^\circ)}{\sin^2 30^\circ + 9 \sin^2 3^\circ} = 0{,}56.$$

RE16 Totalni efikasni presek za s-rasejanje ($\delta_0 \neq 0$; $\delta_l = 0$) glasi:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0,$$

$$\operatorname{tg}\delta_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} k \int_0^a j_0(kr)\, r^2\, dr = \frac{2mV_0}{\hbar^2} k \int_0^a \sin^2 kr\, dr = \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} \left\{ \frac{ka}{2} - \frac{\sin 2ka}{4} \right\}.$$

Dakle:

$$\frac{\sigma_{tot}}{4\pi} = \frac{\sin^2\delta_0}{k^2} = \frac{1}{k^2 + \frac{k^2}{\operatorname{tg}^2\delta_0}};$$

ako je veličina ka mala:

$$\operatorname{tg}\delta_0 \simeq \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} \left\{ \frac{ka}{2} - \frac{1}{4} \left[2ka - \frac{(2ka)^3}{6} \right] \right\}$$

$$= \frac{2mV_0}{\hbar^2} \frac{a^3}{3} k = \frac{1}{3} b^2 ak \quad \text{sa} \quad b = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\, a,$$

odnosno:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2 + \frac{9}{a^2 b^4}}.$$

U nisko energetskoj granici, $k \to 0$:

$$\sigma_{tot}\Big|_{k\to 0} = \frac{4\pi b^4 a^2}{9} = 2{,}6 \text{ barn}.$$

RE17 U kvantnoj mehanici nema smisla govoriti o trajektorijama protona. Zbog identičnosti čestica su obe trajektorije označene na slici punom i tačkastom linijom nerazličive. Stoga amplitude verovatnoća za rasejanje pod uglom ϑ i $\pi - \vartheta$ treba sumirati. Ako vodimo računa o spinu protoni mogu da budu u singletnom ($\downarrow\uparrow$) i tripletnom ($\uparrow\uparrow$) stanju. Kako je spinska funkcija u singletnom stanju antisimetrična, prostorna talasna funkcija mora da bude simetrična, tj.:

$$(\downarrow\uparrow) \qquad f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta).$$

U tripletnom stanju situacija je obrnuta, tj.:

$$(\uparrow\uparrow) \qquad f(\vartheta) - f(\pi - \vartheta).$$

Kako je statistička težina za singletno stanje 1/4, a za tripletno 3/4, ukupni diferencijalni efikasni presek za nepolarisan snop protona biće:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{Mott}} = \frac{1}{4} \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{singlet}} + \frac{3}{4} \frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{triplet}}$$

$$= \frac{1}{4} |f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta)|^2 + \frac{3}{4} |f(\vartheta) - f(\pi - \vartheta)|^2$$

$$= |f(\vartheta)|^2 + |f(\pi - \vartheta)|^2 + \frac{1}{2} Re\{f(\vartheta) f^*(\pi - \vartheta)\}$$

$$- \frac{3}{2} Re\{f(\vartheta) f^*(\pi - \vartheta)\}.$$

Kako je:

$$f(\vartheta)f^*(\pi-\vartheta)=\frac{e^4}{(Mv^2)^2}\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right]^{-2}\exp\left\{-i\eta\left[\log\sin^2\frac{\vartheta}{2}-\log\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right]\right\};$$

$$Re\{f(\vartheta)f^*(\pi-\vartheta)\}=\frac{e^4}{(Mv^2)^2}\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right]^{-2}\cos\left\{\eta\log\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right\}.$$

Konačan izraz za presek za Mottovo rasejanje, u sistemu centra mase, postaje:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Mott}}=\frac{e^4}{(mv^2)^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\left\{\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\vartheta}{2}}-\frac{\cos\left(\eta\log\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\right\}.$$

RE18 Na ovako niskoj energiji samo s-talas učestvuje u rasejanju (zad. E9) (distribucija produkata rasejanja je izotropna) pa je jedini fazni pomak rasejanog talasa δ_0. Totalni presek je tako jednak:

$$\sigma_{\text{tot}}=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0. \quad \text{(prema zad. E13)}$$

Jednačina radijalnog dela, inače sferno-simetričnog, s-talasa u oblasti potencijala ($r<r_0$) je:

$$\frac{d^2u_I}{dr^2}-\frac{mV_0}{\hbar^2}u_I=0 \quad (\text{uz } E\ll V_0)$$

sa rešenjem:

$$u_I=C_1\sin\alpha r$$

(zbog uslova konačnosti u nuli cos otpada) gde je $\alpha^2=mV_0/\hbar^2$. Van dometa interakcije ($r>r_0$) talasna dužina je mnogo veća ($\alpha\gg k$) i radijalna funkcija je spori sinusni talas:

$$u_{II}=C_2\sin(kr+\delta_0) \quad \text{sa} \quad k^2=mE/\hbar^2.$$

Promena faze, δ_0, ovde nije ništa drugo do fazni pomak rasejanog talasa koji je napustio oblast interakcije (δ_0 iz σ_{tot}). U tački $r=r_0$ se, dakle, rasejani spori sinusni talas u_{II} nastavlja na u_I približno kao prava linija:

$$u_{II}(r\geqslant r_0)\simeq C(r-a)=u'_{II}$$

gde je C nagib i a presek sa r osom. Tako je:

$$C_2\sin(kr+\delta_0)\simeq C_2(kr+\delta_0)=C(r-a)$$

odakle je:

$$C=C_2k \quad \text{i} \quad -aC=C_2\delta_0$$

pa je:

$$\delta_0=-ak=-\frac{a}{\lambda^*}.$$

Veličina a naziva se dužinom rasejanja (»scattering length«). U ovakvoj aproksimaciji, dakle, totalni presek postaje jednak:

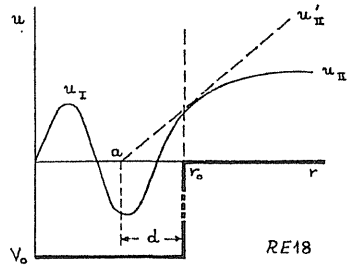
$$\sigma_{tot}\simeq 4\pi a^2.$$

Uz pretpostavku da je $n-p$ potencijal pravougaona jama sa parametrima (r_0, V_0) nađimo eksplicitno a (pa tako i presek) za ovaj slučaj. Sa slike vidimo da je rastojanje $r_0-a=d$ jednako:

$$d=\frac{u_I(r_0)}{nagib}=\frac{c_1\sin\alpha r_0}{c_1\alpha\cos\alpha r_0}=\frac{\operatorname{tg}\alpha r_0}{\alpha}$$

a samo a:

$$a=r_0-d=r_0\left(1-\frac{1}{\alpha r_0}\operatorname{tg}\alpha r_0\right).$$



RE18

Presek izražen preko dužine rasejanja, tj. parametra potencijala tako postaje:

$$\sigma_{tot}\simeq 4\pi a^2=4\pi r_0^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha r_0}{\alpha r_0}\right)^2$$

Nađimo vrednost preseka pod pretpostavkom da je interakcija čisto tripletna sa zadatim parametrima. Biće:

$$\sigma'_{tot}\simeq 4\pi a_t=4\pi r_{0t}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha_t r_{0t}}{\alpha_t r_{0t}}\right)^2.$$

Kako je

$$\alpha_t=\frac{\sqrt{mV_{0t}}}{\hbar}=6{,}94\times 10^{12}\,\text{cm}^{-1}$$

to je

$$\sigma'_{tot}=4{,}22\times 10^{-24}\,\text{cm}^2\simeq 4\,barn.$$

Sam presek za tripletno rasejanje je, dakle, znatno manji od eksperimentalnog što je i dokaz o postojanju i singletnog rasejanja. Pošto tripletna interakcija ima (za nepolarisan snop) $2I+1=3$ puta veći broj ekviverovatnih stanja od singletne sa $2I+1=1$ i kako su tripletno i singletno stanje nekoherentni, to je totalni presek jednak zbiru statistički otežanih pojedinačnih preseka, tj.:

$$\sigma_{tot}=\frac{3}{4}\sigma'_{tot}+\frac{1}{4}\sigma^s_{tot}\simeq 20\,barn.$$

Uz $\sigma'_{tot}\simeq 4_{\text{barn}}$ odavde nalazimo $\sigma'_{tot}\simeq 70_{\text{barn}}$!

(iz gornje relacije $\sigma_{tot}=f(r_0, V_0)$, i ove vrednosti, sada možemo naći vezu između r_{0S} i V_{0S}).

RE19 Zavisnost preseka od polarizacije čestica mora da se izražava članom koji sadrži skalarni proizvod srednjih vektora spina ove čestice ($\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$). Dakle:

$$\sigma = A + B\langle\vec{s}_1\rangle\langle\vec{s}_2\rangle \equiv A + \frac{B}{4}\cos\beta.$$

Konstante A i B odredićemo analizom čistog tripletnog rasejanja i rasejanja nepolarisanog snopa na nepolarisanoj meti.
U slučaju čistog tripletnog rasejanja imamo da je:

$$\langle\vec{s}_1\rangle\langle\vec{s}_2\rangle = \frac{1}{4}$$

tj.:

$$A + \frac{B}{4} = \sigma_{\uparrow\uparrow}. \qquad \text{(RE19.1)}$$

Za potpuno nepolarisano rasejanje:

$$\langle\vec{s}_1\rangle = \langle\vec{s}_2\rangle = 0$$

pa je

$$A = \frac{1}{4}(\sigma_{\uparrow\downarrow} + 3\sigma_{\uparrow\uparrow}). \qquad \text{(RE19.2)}$$

Rešavanjem jednačina (RE19.1) i (RE19.2) dobijamo:

$$\sigma = \frac{1}{4}[(\sigma_{\uparrow\downarrow} + 3\sigma_{\uparrow\uparrow}) + (\sigma_{\uparrow\uparrow} - \sigma_{\uparrow\downarrow})\cos\beta].$$

Pošto je u zadatku dat prosečan ugao polarizacije ($\beta = 60°$) sledi da je:

$$\sigma = \frac{1}{8}[\sigma_{\uparrow\downarrow} + 7\sigma_{\uparrow\uparrow}] = 12{,}25\ \textit{barn}.$$

RE20 T matrica zavisi od impulsa i spina sve četiri čestice. Inverzija vremena menja znake vektora impulsa i spina čestice. Invarijantnost T matrice u odnosu na inverziju vremena možemo, dakle, da predstavimo na sledeći način:

$$|T_{A\to B}| = |\langle\vec{p}_a, \vec{p}_b, \vec{s}_a, \vec{s}_b|\hat{T}|\vec{p}_c, \vec{p}_d, \vec{s}_c, \vec{s}_d\rangle|$$

$$= |\langle -\vec{p}_a, -\vec{p}_b, -\vec{s}_a, -\vec{s}_b|\hat{T}|-\vec{p}_c, -\vec{p}_d, -\vec{s}_c, -\vec{s}_d\rangle| = |T_{B\to A}|.$$

Nepolarisani diferencijalni presek dobija se sumiranjem po svim projekcijama spina i usrednjavanjem po početnim spinskim stanjima. Dakle, u slučaju reakcije $a+b \to c+d$:

$$\frac{d\bar{\sigma}_{AB}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{dn_{AB}}{dE}\frac{1}{v_{ab}}\frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{SPIN}|T_{A\to B}|^2.$$

Za inverznu reakciju $c+d \to a+b$ imaćemo:

$$\frac{d\bar{\sigma}_{BA}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{dn_{BA}}{dE}\frac{1}{v_{cd}}\frac{1}{(2s_c+1)(2s_d+1)}\sum_{SPIN}|T_{B\to A}|^2.$$

Korišćenjem osobina T matrice vidi se da su dve sume po spinskim promenljivima jednake, tj.:

$$\frac{\frac{d\bar{\sigma}_{AB}}{d\Omega}}{\frac{d\bar{\sigma}_{BA}}{d\Omega}} = \frac{(2s_d+1)(2s_c+1)}{(2s_b+1)(2s_a+1)}\frac{v_{cd}}{v_{ab}}\frac{\frac{dn_{AB}}{dE}}{\frac{dn_{BA}}{dE}}.$$

Iz statističke mehanike poznato je:

$$\frac{dn_{AB}}{dE} = \frac{dn_{AB}}{dp}\frac{dp}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}p_{cd}^2\frac{dp}{dE}$$

gde je p_{cd} relativni impuls čestica c i d. Međutim, kako je:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}(E_c + E_d) = v_c + v_d = v_{cd}$$

zaključujemo da je:

$$\frac{dn_{AB}}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p_{cd}^2}{v_{cd}}$$

a

$$\frac{dn_{BA}}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p_{ab}^2}{v_{ab}}.$$

Konačan izraz za odnos nepolarisanih diferencijalnih preseka za dve inverzne reakcije jednak je:

$$\frac{\frac{d\bar{\sigma}_{AB}}{d\Omega}}{\frac{d\bar{\sigma}_{BA}}{d\Omega}} = \frac{(2s_d+1)(2s_c+1)}{(2s_b+1)(2s_a+1)}\frac{p_{cd}^2}{p_{ab}^2}$$

RE21 Odnos totalnih efikasnih preseka za dve inverzne reakcije jednak je (videti prethodni zadatak):

$$\frac{\sigma(np)}{\sigma(\gamma D)} = \frac{(2s_\gamma+1)(2s_D+1)}{(2s_n+1)(2s_p+1)}\frac{p_{np}^{-2}}{p_{\gamma D}^{-2}}.$$

Spinovi neutrona i protona su $s_n = s_p = 1/2$, a spinovi dueterona i gama kvanta $s_D = s_\gamma = 1$.

Ako je impuls gama kvanta u sistemu centra masa $\frac{\hbar\omega}{c}$, relativni impuls deuteron-gama kvant u ovom sistemu iznosi $2\frac{\hbar\omega}{c}$, tj.

$$p_{\gamma D}=2\frac{\hbar\omega}{c}.$$

Relativni impuls neutron-proton u sistemu centra masa nalazimo iz zakona održanja energije: $\gamma+D\rightarrow n+p$:

$$\hbar\omega+M_D c^2=M_n c^2+M_p c^2+\frac{p^2}{2M_n}+\frac{p^2}{2M_p}.$$

Kako je $(M_n+M_p-M_D)c^2$ jednako vezivnoj energiji deuterona (B_D) imaćemo:

$$\frac{p^2}{2}\left(\frac{M_n+M_p}{M_nM_p}\right)=\hbar\omega-B_D.$$

Relativan impuls neutron-proton $p_{np}=2p$, a

$$\frac{2}{M}=\frac{M_n+M_p}{M_nM_p}$$

gde smo sa M označili masu nukleona.
Dakle:

$$p_{np}^2=4M(\hbar\omega-B_D)$$

odnosno:

$$\frac{\sigma(np)}{\sigma(\gamma D)}=\frac{9}{4}\frac{(\hbar\omega)^2}{Mc^2(\hbar\omega-B_D)}=5\times10^{-2}.$$

RE22 Presek za raspad složenog jezgra kanalom b može formalno da se izrazi kao:

$$\sigma_{ab}=\sigma_{ca}P_b$$

gde je σ_{ca} presek za formiranje složenog jezgra (sa ekscitacionom energijom E) apsorpcijom čestica a, a P_b verovatnoća za emisiju čestice b koja je takođe funkcija ekscitacione energije (normirana je na 1).
Ako za bilo koja dva kanala reakcije $p+{}^{63}Cu$ napišemo odnos efikasnih preseka imaćemo:

$$\frac{\sigma(p,n)}{\sigma(p,2n)}=\frac{\sigma_{cp}(E)P_n(E)}{\sigma_{cp}(E)P_{2n}(E)}=\frac{\sigma_{c\alpha}(E)P_n(E)}{\sigma_{c\alpha}(E)P_{2n}(E)}=\frac{\sigma(\alpha,n)}{\sigma(\alpha,2n)}$$

što je i trebalo dokazati!

RE23 Momenti impulsa čestica a, A i C povezani su zakonom održanja momenta impulsa, tj.:

$$\vec{I}_c=\vec{I}_a+\vec{I}.$$

Vrednosti spina složenog jezgra kreću se u intervalu

$$|I-I_a|\leqslant I_c\leqslant I+I_a$$

dok je broj degenerisanih stanja složenog jezgra, po projekciji njegovog spina M_c, jednak:

$$N=\sum_{I_c=|I-I_a|}^{I+I_a}2I_c+1.$$

Ako su vektori $\vec{I}$ i $\vec{I}_a$ antiparalelni, degeneracija stanja složenog jezgra je:

$$N_{\uparrow\downarrow}=2|I-I_a|+1$$

a verovatnoća da se sistem nađe u ovakvom stanju (jednaka spinskom statističkom faktoru $g_{\uparrow\downarrow}$) iznosi:

$$g_{\uparrow\downarrow}=\frac{N_{\uparrow\downarrow}}{N}=\frac{2|I-I_a|+1}{\sum_{Ic}2I_c+1}.$$

Na primer ako je spin upadne čestice $I_a=1/2$ ($I_c=I-1/2$):

$$g_{\uparrow\downarrow}=\frac{2I}{2(I-1/2)+1+2(I+1/2)+1}=\frac{I}{2I+1}.$$

Ako su vektori $\vec{I}$ i $\vec{I}_a$ paralelni:

$$g_{\uparrow\uparrow}=\frac{2(I+I_a)+1}{N};$$

u specijalnom slučaju $I_a=1/2$ ($I_c=I+1/2$):

$$g_{\uparrow\uparrow}=\frac{I+1}{2I+1}.$$

U slučaju reakcija sa nepolarisanim česticama a i A

$$g=\frac{2I_c+1}{(2I+1)(2I_a+1)}.$$

RE24 Presek za ovu reakciju iznosi (videti prethodni zadatak):

$$\sigma_{n\gamma}=\pi g\lambda^{*}{}_n\frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{(E-E_0)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}$$

gde je spinski statistički faktor

$$g=\frac{2I_c+1}{(2I_n+1)(2I+1)}=\frac{3}{4}.$$

(Pošto upadni neutron ima malu energiju pretpostavili smo da je njegov orbitalni moment impulsa nula, tj. $I_n=1/2$).

Kako je $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$ i $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma \simeq \Gamma_\gamma$:

$$\lambda^*_n = \frac{\hbar}{p_\gamma} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2\mu c^2 E}}.$$

(gde je μ redukovana masa neutrona, približno jednaka njegovoj stvarnoj masi pošto je jezgro ^{109}Ag »teško« u odnosu na njega). Dakle:

$$\sigma_{n\gamma} = \frac{3}{4}\pi \frac{(\hbar c)^2}{2\mu c^2 E} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\gamma^2} \simeq 51 \text{ barn}.$$

RE25 Kako je »trajektorija« čestice a u ravni normalnoj na njen moment impulsa $\vec{I}$, raspodelu čestica a u odnosu na pravac l možemo da prikažemo δ-funkcijom: $\delta(\vec{n}\cdot\vec{l})$.

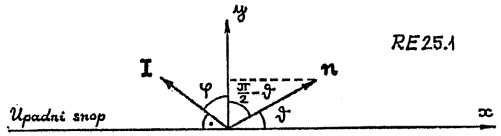
Međutim kako je $|\vec{l}| \gg |\vec{j}|$ i kako iz zakona održanja momenta impulsa imamo da je spin složenog jezgra $\vec{I} = \vec{l} + \vec{j}$, zaključujemo da je $\vec{l} \simeq \vec{I}$, odnosno:

$$\delta(\vec{n}\cdot\vec{l}) \simeq \delta(\vec{n}\cdot\vec{I}).$$

Uglovnu distribuciju čestica a ($W(\vec{n})$) nalazimo ako distribuciju $\delta(\vec{n}\cdot\vec{I})$ usrednjimo po azimutalnim uglovima, tj.:

$$W(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\vec{n}\cdot\vec{I})\, d\varphi.$$

Usrednjavanje je lako izvodljivo ako se koristi koordinatni sistem prikazan na slici.



RE25.1

Ugao ϑ je ugao između $\vec{n}$ i snopa upadnih čestica.

Dakle:

$$\vec{I}\cdot\vec{n} = I\cos\varphi\sin\vartheta$$

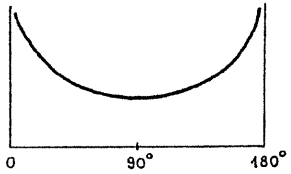
odnosno:

$$W(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(I\cos\varphi\sin\vartheta)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(I\cos\varphi\sin\vartheta)\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{+1}^{-1} \frac{\delta(Ix\sin\vartheta)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\pi I}\frac{1}{\sin\vartheta}.$$

Dobijena distribucija čestice a po uglovima ϑ je oblika:



RE25.2

RE26 Maksimalni intenzitet, u snopu odlazećih protona, pojavljuje se pod uslovom:

$$\Delta l = \frac{Q\cdot R}{\hbar}$$

gde je R radijus jezgra, a Q transfer impulsa u direktnoj reakciji.
Kako je:

$$\vec{Q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$Q = |\vec{Q}| = \sqrt{p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos\vartheta}$$

ako je $p_i \simeq p_f$ (što je zadovoljeno u slučju $E_i \simeq E_f$)

$$Q \simeq 2p_i \sin\frac{\vartheta}{2}$$

odnosno:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\hbar\Delta l}{2p_i R}.$$

Impuls protona u sistemu centra mase iznosi

$$p_i = \sqrt{ME_p}$$

gde j M masa protona a E_p energija upadnih protona.
Dakle:

$$\sin\frac{\vartheta}{2}=\frac{\hbar c\,\Delta l}{2R\sqrt{Mc^2E_p}}.$$

Prema tome, u rasejanom snopu protona maksimalni intenzitet pojavljuje se na uglu $\vartheta\simeq 40°$. Rezultat se dobro slaže sa eksperimentalnim rezultatom (vidi sliku datu u tekstu zadatka).

RE27 U Bornovoj aproksimaciji amplituda verovatnoće striping reakcije jednaka je:

$$f=\int\psi_D^{(-)*}(\vec{r}_n,\vec{r}_p)\,V(r_n)\,\psi_D(\vec{r}_n,\vec{r}_p)\,d^3r_n\,d^3r_p.$$

Izvršimo prvo integraciju po protonskoj koordinati. tj.:

$$f=\int d^3r_n\,\varphi_n^*(\vec{r}_n)\,V(r_n)\left[\int d^3r_p\,\chi_p^*(\vec{r}_p)\,\psi_D(\vec{r}_n,\vec{r}_p)\right]$$

Integral u srednjoj zagradi označimo slovom I i napišimo eksplicitno:

$$I=\int e^{-i\vec{k}_p\vec{r}_p}\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{R_D}}e^{i\vec{k}_D\frac{\vec{r}_n+\vec{r}_p}{2}}d^3r_p.$$

Da bismo rešili ovaj integral zgodno je uvesti smenu promenljivih

$$\vec{r}=\vec{r}_p-\vec{r}_n.$$

Kako je $\vec{r}_n$ konstantno

$$d^3r=d^3r_p.$$

Dakle:

$$I=e^{i\left(\frac{\vec{k}_D}{2}-\vec{k}_p\right)\vec{r}_n}\int\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{R_D}}e^{-i\left(\vec{k}_p-\frac{1}{2}\vec{k}_D\right)\vec{r}}d^3r.$$

Međutim, kako je $\vec{k}_D=\vec{k}_n+\vec{k}_p$:

$$I=2\pi e^{i\left(\frac{\vec{k}_D}{2}-\vec{k}_p\right)\vec{r}_n}\int re^{-\frac{r}{R_D}}\left[\int_0^{2\pi}e^{-ikr\cos\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta\right]dr.$$

$\left(\text{uveli smo oznaku } \vec{k}=\vec{k}_p-\frac{1}{2}\vec{k}_D\right)$.
Dalje:

$$I=\frac{2\pi e^{i\left(\frac{\vec{k}_D}{2}-\vec{k}_p\right)\vec{r}_n}}{iK}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{R_D}}\left[e^{ikr}-e^{-ikr}\right]dr$$

$$=\frac{4\pi e^{i\left(\frac{\vec{k}_D}{2}-\vec{k}_p\right)\vec{r}_n}}{\left|\vec{k}_p-\frac{1}{2}\vec{k}_D\right|^2+\frac{1}{R_D^2}}.$$

Amplituda verovatnoće, sada, izgleda:

$$f=\frac{4\pi V_0}{\left|\vec{k}_p-\frac{1}{2}\vec{k}_D\right|^2+\frac{1}{R_D^2}}\int u_l(r_n)\,Y_{lM}(\vartheta_n\varphi_n)\,\delta(r_n-R)\,e^{i\vec{k}_n\vec{r}_n}d^3r_n.$$

Ako razvijemo ravan talas po sfernim harmonicima imaćemo:

$$e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,j_l(kr)\,Y_{l0}(\vartheta)\quad\text{sa } z=r\cos\vartheta;$$

Dakle:

$$J_1=\int u_l\,Y_{lM}\delta(r_n-R)\sum_{l=0}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,j_l(k_nr_n)\,Y_{l0}(\vartheta_n)\,r_n^2\,dr_n\,d\Omega_n.$$

Koristeći ortogonalnost sfernih harmonika, lako je pokazati da je:

$$J_1=\text{const}\int_0^\infty u_l(r_n)\,r_n^2\,j_l(k_nr_n)\,\delta(r_n-R)\,dr_n=\text{const}\,u_l(R)\,R^2j_l(k_nR).$$

Sada, uglovnu raspodelu protona iz striping reakcije možemo da prikažemo izrazom

$$I(\vartheta)=|f|^2=\frac{|j_l(k_nR)|^2}{\left\{\frac{1}{R_D^2}+\left|\vec{k}_p-\frac{1}{2}\vec{k}_D\right|^2\right\}^2}.$$

Očigledno da je ova uglovna raspodela nenormirana.
U izrazu ne figuriše eksplicitno ugao ϑ pod kojim izleće proton u odnosu na upadni pravac.
Međutim, zakon održanja impulsa i energije daje:

$$k_n^2=k_p^2+k_D^2-2k_pk_D\cos\vartheta$$

i

$$\frac{k_D^2}{4M}=\frac{k_p^2}{2M}+\varepsilon$$

(gde je ε energija oslobođena u reakciji)

RE28 Sunce, dakle, u sekundi izrači 4×10^{33} erg tj. gubi 4×10^9 kg svoje mase a specifičan gubitak energije je $\sim$2 erg/g/s. Ovoliki specifični gubitak veoma je mali i svaki mehanizam mogao bi da obezbedi takav intenzitet zračenja (organizam živih bića oslobodi mnogo više energije u sekundi po gramu težine!). Proces koji ovo zračenje obezbeđuje spada, dakle, u najsporije procese tinjanja a nikako u burne procese sagorevanja! Ako je, međutim, luminoznost Sunca bila stalna tokom zadnjih $\tau\simeq5\times10^9$ godina tada je za to vreme izračeno ukupno:

$$\varepsilon=L_\odot\,\tau\simeq6\times10^{50}\text{ erg}$$

ili, po masi

$$m=\varepsilon/c^2\simeq7\times10^{26}\text{ kg}\simeq3{,}5\times10^{-4}M_\odot.$$

Ovo je ogroman iznos pa se problem javlja kod pokušaja objašnjavanja porekla ove integralno izračene energije; većina energetskih izvora potrošila bi se za daleko kraće vreme.

Pogledajmo prvo hemijsku energiju. S obzirom na to da je hemijski sastav Sunca ~70% *H*, ~30% *He* i 1% svih težih elemenata to bi energija oslobođena u hemijskim reakcijama mogla da bude maksimum reda elektronvolta po atomu (protonu) što pak čini samo 1eV/1GeV$=10^{-9}$ deo mase mirovanja. Ovo je za pet redova veličine manje no što je potrebno i vek Sunca bio bi samo ~10^5 godina što je zanemarljivo malo u odnosu na potrebnu vrednost.

Prirodna radioaktivnost teških elemenata, urana i torijuma, takođe liči na potencijalni izvor energije. Naročito su privlačni dugi poluživoti, reda 10^9 godina, koji su u skladu sa procenjenim životom zvezda. Protiv ovoga, međutim, govori njihova neznatna obilnost u zvezdama. Osim toga, procesi radioaktivnog raspada neosetljivi su na promene temperature i pritiska pa tako ne predstavljaju autoregulativni proces koji može da održava zvezdu u ravnotežnom stanju.

Zbog izotopskog sastava (tj. jako malog sadržaja težih elemenata i gotovo potpunog odsustva fisionih elemenata) i fisiju odmah možemo odbaciti kao mogući izvor energije (mada ~1 MeV po nukleonu, tj. 10^{-3} deo mase mirovanja, oslobođen u jednom aktu fisije može da bude dobar izvor energije).

Sledeći mogući izvor energije je gravitaciona kontrakcija. Pri kontrakciji oblaka gasa do današnjih dimenzija Sunca gravitaciona potencijalna energija menja se od nule (neinteragujuće čestice) do vrednosti potencijalne energije sfere radijusa Sunca koja je reda:

$$U \simeq \gamma \frac{M_\odot^2}{R_\odot} \simeq 4 \times 10^{48}\ \text{erg}.$$

Ovo je, opet, za faktor reda 100 manje od potrebne vrednosti i obezbedilo bi život Sunca stalne luminoznosti $L_\odot$ od svega

$$\tau \simeq \frac{U}{L_\odot} \simeq 3 \times 10^7\ \text{god}.$$

(no, ova vrednost može da posluži kao prva procena vremena trajanja prve faze evolucije, faze gravitacione kontrakcije).

Sledeća mogućnost je toplotna energija. Razumno je, naime, pretpostaviti da je Sunce nekad bilo toplije no što je danas i da je energiju zračilo (i još uvek zrači) na račun hlađenja svoje mase. Kako ovu energiju nije moguće direktno izraziti preko parametara Sunca poslužimo se teoremom viriala. Podsetimo se da ona glasi:

$$T_\tau = -\frac{1}{2}(\Sigma \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i)_\tau .$$

tj. da je srednja vrednost kinetičke energije sistema u vremenu τ jednaka virialu sistema gde je τ ili period sistema ili beskonačno vreme. Dalje, ako je sistem konzervativan, tj. kretanje vrši u potencijalnom polju energije U tako da je $\vec{F} = -grad\, U$ biće:

$$T_\tau = \frac{1}{2}\{\Sigma (\text{grad}\, U)_i \cdot \vec{r}_i\}_\tau$$

Ako je U homogena funkcija s-tog stepena, tj. ako je:

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s U(x, y, z)$$

tada je po Eulerovoj teoremi o homogenim funkcijama:

$$\Sigma (\text{grad}\, U)_i \cdot \vec{r}_i = sU$$

pa se teorema viriala svodi na:

$$2\, T_\tau - sU_\tau = 0.$$

Kako je sa druge strane, zbog zakona održanja energije:

$$T + U = E = const$$

to je konačno:

$$U_\tau = \frac{2}{s+2} \quad \text{i} \quad T_\tau = \frac{s}{s+2} E$$

što utvrđuje u kakvom se odnosu početna energija E »u srednjem deli« na kinetičku i potencijalnu energiju za vreme kretanja konzervativnih sistema. U slučaju idealnog gasa u gravitacionom polju potencijalne energije $U = -\gamma M/r$ gde je, očigledno, $s = -1$ a kinetička energija je energija toplotnog kretanja, između ove dve prosredstvom gornje teoreme postoji veza:

$$U = 2E \quad \text{i} \quad T = -E$$

tj.:

$$2\, T + U = 0.$$

Odavde se vidi da se toplotna energija ovako zagrejanog oblika gasa samo za faktor 2 razlikuje od gravitacione energije te da ni ona ne može da bude traženi izvor energije. Iz gornjih relacija vidimo da je $E = -T = u/2$ tj. da je totalna energija jednaka negativnoj toplotnoj ili polovini gravitacione. Smanjenje totalne energije izazvano zračenjem (ako nema drugih izvora), dakle, dovodi do smanjenja gravitacione energije ali i do porasta toplotne! U procesu izračivanja energije zvezda se sažima i zagreva! Gravitaciona kontrakcija na taj način dovodi, pored izračivanja energije, i do zagrevanja mase gasa te tako obezbeđuje temperature potrebne za početak termonuklearnih reakcija fuzije. Vidi se i da je zvezdu kojoj je gravitaciona kontrakcija dozvoljena nemoguće ohladiti! Svaki pokušaj da se zvezdi oduzme energija dovodi do njenog sažimanja i oslobađanja gravitacione energije takvom brzinom koja ne samo da nadoknađuje gubitak energije sa površine već i dalje zagreva materiju zvezde!

Kao jedini mogući izvor energije ostaje nam, dakle, fuzija lakih nuklida u teže. Oslobađanje energije prestaje kada se sav vodonik fuzioniše u izotope grupe gvožđa (videti grafik energije veze po nukleonu). Kako je energija veze po nukleonu u *Fe* ~8 MeV a masa nukleona ~1000 MeV to se u ovakvim procesima fuzije oslobodi oko 1% mase mirovanja nukleona, pa i cele zvezde (fuzijom do helijuma oslobodi se oko 7 MeV po nukleonu što je skoro isto). Ovaj 1% mase Sunca iznosi ~10^{52} erg što je i više no što je potrebno za našu procenu. Očito nije ni potrebno da se sav vodonik fuzioniše u helijum što stvarni izotopski sastav našeg Sunca i potvrđuje.

RE29 Pritisak u centru zvezde koja se nalazi u hidrodinamičkoj ravnoteži a koji potiče od gravitacionog privlačenja, po redu veličine jednak je:

$$p_0 \simeq \rho\, g\, R_\odot$$

Uz

$$\langle\rho\rangle=\frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^2}=1{,}4\ \mathrm{g/cm^3}\quad\text{i}\quad g_{\max}=\gamma\frac{M_\odot}{R_\odot^2}$$

ovo postaje:

$$p_0\simeq\frac{3}{4\pi}\gamma\frac{M_\odot}{R_\odot}\simeq 5\times10^{14}\ \mathrm{din\ cm^{-2}}.$$

Ovaj je pritisak izjednačen sa pritiskom gasa u centru koji je jednak:

$$p_0=NkT_0=\frac{\langle\rho\rangle}{\langle\mu\rangle m_H'}kT_0=\gamma\langle\rho\rangle\frac{M_\odot}{R_\odot}$$

jer je gas zvezde, upravo zbog visoke temperature, skoro potpuno jonizovan pa samim tim i blizak idealnom. Srednju molekulsku težinu $\langle\mu\rangle$ ovakvog gasa koji je smeša X grama vodonika po gramu gasa, Y grama helijuma i $Z=(1-X-Y)$ grama težih elemenata, lako nalazimo. Pri totalnoj jonizaciji jedan atom H daje 2 čestice i $\langle\mu_H\rangle\simeq 1/2$; atom He daje 3 čestice i $\langle\mu_{He}\rangle\simeq 4/3$; teži atom rednog broja Z i težine $A\simeq 2Z$ daje $Z+1$ česticu i za sve je $\langle\mu_z\rangle=A/(z+1)\simeq 2$ i kako je njihov procenat mali to je ovo dobra aproksimacija. Za datu smešu X, Y, Z biće, dakle:

$$\langle\mu\rangle\simeq\frac{1}{2X+\frac{3}{4}Y+\frac{1}{2}(1-X-Y)}=\frac{2}{1+3X+0{,}5Y}$$

i za $X=0{,}7$ i $Y=0{,}3$:

$$\langle\mu\rangle=0{,}62.$$

U ovakvom jednostavnom modelu temperatura u centru zvezde je, dakle:

$$T_0\simeq\frac{\langle\mu\rangle m_H\gamma}{kR_\odot}M_\odot\simeq 1{,}5\times10^7\ \mathrm{grad}.$$

(Slično se može dobiti korišćenjem teoreme viriala). Vidimo da je pri zadanim dimenzijama (R) temperatura do koje se zvezda zagrejala direktno proporcionalna masi zvezde. To je razlog zbog koga masivnije zvezde brže evoluiraju jer im sve termonuklearne reakcije i pre počinju i brže teku. Srednja energija koju ogoljena jezgra (recimo protoni) u ovakvom gasu imaju direktno je proporcionalna temperaturi

$$\langle E\rangle\sim kT=8{,}62\times10^{-8}\ \mathrm{T\ KeV}$$

pa time i masi zvezde. Gore nađenoj temperaturi u centralnoj zoni Sunca odgovaraju energije reda stotinu elektronvolti što je malo u poređenju sa kulonovim barijerama među protonima koji treba da prežive fuziju a koja je reda MeV. Barijere su, dakle, jako široke i verovatnoća za nuklearnu interakciju veoma mala. U masivnijim, pa otud i toplijim zvezdama, i energije su više, tj. barijere uže a verovatnoća za fuziju i tempo reakcija veći. (Otud na Suncu i tako spor tempo sagorevanja vodonika i mali specifični gubitak energije od svega ~ 2 egr/g/s). Zbog toga i zvezde malih masa ($M\leqslant 0{,}1\ M_\odot$) ni ne mogu da se dovoljno zagreju pa se sinteza elemenata ni ne vrši (ne prolaze fazu glavnog niza već direktno prelaze u bele odnosno crne patuljke) (Jupiter se, recimo, približava ovoj granici!).

Iz činjenice da je gravitaciona kontrakcija Sunca zaustavljena baš na ovoj postignutoj temperaturi zaključujemo da ona mora biti dovoljna za iniciranje i održavanje potrebne brzine termonuklearnih reakcija sinteze vodonika u helijum koje i kompenzuju gubitke na zračenje sa površine pa tako i održavaju ovakvo stacionarno stanje, tj. sprečavaju dalji gravitacioni kolaps i obezbeđuju dug život na glavnom nizu.

RE30 Iz zadatka F.12 prozračnost barijere jednaka je:

$$P=e^{-\gamma}$$

sa barijernim faktorom:

$$\gamma\simeq\sqrt{\frac{8\,mbz}{\hbar^2}}\left\{\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{R}{b}}\right\}.$$

Kako je na datoj temperaturi srednja energija reda:

$$E\simeq kT=8{,}62\times10^{-8}\,T\ \mathrm{KeV}\simeq 0{,}03\ \mathrm{eV}$$

to je:

$$b=\frac{z}{E}=\frac{z_1z_2e^2}{E}=\frac{\alpha\hbar c}{E}\simeq 5\times10^7\ \mathrm{fermi}.$$

Debljina barijere je, dakle, na ovoj temperaturi ogromna; kulonovo odbijanje drži (klasično) protone daleko van dometa nuklearnih sila. Tako je:

$$\frac{R}{b}\simeq10^{-7}$$

pa se faktor $\sqrt{R/b}$ slobodno može zanemariti. Konačno je:

$$\gamma\simeq\frac{\pi z_1z_2e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}=\frac{2\pi z_1z_2e^2}{\hbar v}$$

što u ovom slučaju iznosi $\sim 4{,}5\times10^3$ te je prozračnost barijere jednaka:

$$P=e^{-\gamma}=e^{-4{,}5\times10^3}\simeq10^{-2000}!$$

Uprkos toga što je nuklearni presek (zbog zakona $\sigma\infty 1/v$) ovde relativno veliki njegov je porast prema ovako ogromnoj Kulonovoj zabranjenosti sigurno zanemarljiv (praktično ni nema prilike da dođe do izražaja) i ukupni presek ostaje ovog reda veličine. Setimo se da je presek za interakciju neutrina od 1 MeV, što je pojam za minimalnu verovatnoću interakcije, reda 10^{-20} barna! Dva deuterona, dakle, na ovoj temperaturi penetriraju kroz barijeru, tj. uopšte dobijaju šansu da se fuzionišu, u srednjem, za vreme od $\sim10^{2000}$ sekundi! Veličinu ovog broja možemo oceniti poredeći ga sa procenjenim životom Univerzuma od 10^{18} sekundi. Ovo je, dakle, uzrok visoke stabilnosti materije na relativno niskim temperaturama. Da bi do fuzije došlo u razumnim intervalima vremena potrebne su ekstremno visoke temperature koje i postoje na zvezdama. Tempo fuzije je, znači, veoma brza funkcija temperature jer je vezan sa eksponencijalnom prozračnošću barijere. »Bure baruta« na kome sedimo se, na našu sreću, teško pali! Istovremeno, to je i jedan od glavnih razloga što je teško ostvariti kontrolisanu fuziju.

RE31 Oslobođenu energiju možemo naći na više načina:
1) Pošto je konačni efekt jednak sintezi 4 protona u α česticu to će Q vrednost ovakve reakcije biti jednaka energiji oslobođenoj u celom ciklusu:

$$Q=(4\,m_p-m_\alpha)\,c^2=26{,}73\ \text{MeV}$$

Od ovoga moramo oduzeti izgubljenih $2\langle E_\nu\rangle=0{,}52$ MeV pa je efektivni dobitak energije jednak

$$E_{pp}=26{,}2\ \text{MeV}$$

po svakom formiranom ^4He atomu.
2) Činjenica da se u p—p ciklusu formira ne α čestica već ceo atom ^4He (istina u jonizovanom stanju) bolje se vidi ako posmatramo energetske bilanse u svakoj od reakcija posebno. U prvoj reakciji formiranje deuterijuma praćeno je oslobađanjem energije veze jednake 2,225 MeV i pozitronskim raspadom jednog od protona $p\rightarrow n+e^+ +\nu$ tako da je ukupna oslobođena energija jednaka $Q=2{,}225-(m_n+m_e-m_p)\,c^2=0{,}42$ MeV. Neutrino od ovoga odnese 0,26 MeV tako da je ostatak čistih 0,16 MeV. Međutim, pozitron iz raspada protona anihilira se sa elektronom plazme i daje dodatnih 1,02 MeV. Ukupna oslobođena energija iz ove reakcije je, dakle: $E^{1)}=1{,}18$ MeV. Znači da se, u srednjem, električna neutralnost plazme, kao i cele zvezde, u ovim procesima održava mada naelektrisanje zvezde opada (vrši se delimična neutronizacija). Ovo je obezbeđeno zakonom održanja naelektrisanja i potpuno eliminiše uticaj električnih sila u makroskopskim oblastima prostora, omogućujući 40 redova slabijoj gravitacionoj interakciji da vlada univerzumom. Druga i treća reakcija oslobađaju svoje čiste Q-vrednosti:

$$E^{2)}=Q_2=5{,}49\ \text{MeV}\quad\text{i}\quad E^{3)}=Q_3=12{,}85\ \text{MeV}$$

pa je ukupna oslobođena energija opet jednaka:

$$E_{pp}=2\,E^{1)}+2\,E^{2)}+E^{3)}=26{,}2\ \text{MeV}.$$

Činjenica da je vodonično-helijumski gas u stanju plazme, tj. potpuno jonizovanog gasa, obezbeđuje da prinos ovih reakcija ne bude drastično smanjen ogromnim presecima za jonizaciju i ekscitaciju (zad. E2) pa je stoga plazma izrazito pogodna sredina za efikasno izvođenje ovih reakcija. Zato se i kontrolisane reakcije sinteze na Zemlji upravo i pokušavaju da izvedu u plazmatičnoj sredini, tj. na »termonuklearnoj« bazi. U plazmi, međutim, postoje gubici na zakočno zračenje (naročito elektrona).

RE32 Kao i u slučaju p—p ciklusa (videti prethodni zadatak) efektivna oslobođena energija biće jednaka:

$$E_{CN}=(4\,m_p-m_\alpha)\,c^2-\langle E_\nu\rangle^{2)}-\langle E_\nu\rangle^{5)}$$

$$=26{,}73-0{,}72-0{,}98=25{,}03\ \text{MeV}$$

ili:

$$E_{CN}=\sum_{i=1}^{6}Q_i=1{,}95+1{,}50+7{,}54+7{,}35+1{,}73+4{,}96=25{,}03\ \text{MeV}.$$

RE33 Ako su (1) i (2) identične čestice tada broj parova po jedinici zapremine neće biti n_1^2 već $\frac{1}{2}n_1^2$ pa je:

$$TNR_{12}=\frac{n_1\,n_2}{1+\delta_{12}}\,\lambda_{12}.$$

Prvo treba, dakle, eksplicitno naći distribuciju relativnih brzina $\psi(v)$. Proizvod distribucija brzina v_1 i v_2:

$$N_1(\vec{v_1})\,N_2(\vec{v_2})\,d^3v_1\,d^3v_2=\frac{(m_1\,m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3}\,e^{-\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2kT}}\,d^3v_1\,d^3v_2$$

predstavlja proizvod verovatnoća da čestica (1) ima brzinu u intervalu od $\vec{v_1}$ do $\vec{v_1}+d^3v_1$ a (2) od $\vec{v_2}$ do $\vec{v_2}+d^3v_2$ pri čemu im je relativna brzina $\vec{v}=\vec{v_1}-\vec{v_2}$ pa je ovo ekvivalentno traženoj distribuciji $\psi(v)$. Kako je totalna kinetička energija u eksponentu produktne distribucije jednaka zbiru kinetičke energije centra mase i energije relativnog kretanja čije su brzine $\vec{V}$ i $\vec{v}$ povezane sa brzinama $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ poznatim relacijama:

$$\vec{v_1}=\vec{V}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\quad\text{i}\quad\vec{v_2}=\vec{V}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$$

to je ovaj proizvod distribucija jednak

$$N_1(\vec{v_1})\,N_2(\vec{v_2})\,d^3v_1\,d^3v_2=\frac{(m_1\,m_2)^{3/2}}{(2\pi kT)^3}\,e^{-\frac{m_1+m_2}{2kT}V^2-\frac{\mu}{2kT}v^2}\,d^3v_1\,d^3v_2$$

gde je μ redukovana masa $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$. Ako imamo dve funkcije, $f(x,y)$ i $g(x,y)$, tada se integral po $dxdy$ može zameniti integralom po $dfdg$ sa tim što je odnos ovih dveju diferencijalnih površina jednak apsolutnoj vrednosti jakobijana

$$\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{array}\right|.$$

Odnos površina $dv_{1x}\,dv_{2x}$ prema $dV_x\,dv_x$ je, dakle, jednak apsolutnoj vrednosti determinante

$$\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial v_{1x}}{\partial V_x} & \frac{\partial v_{1x}}{\partial v_x}\\ \frac{\partial v_{2x}}{\partial V_x} & \frac{\partial v_{2x}}{\partial v_x}\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc}1 & \frac{m_2}{m_1+m_2}\\ 1 & -\frac{m_1}{m_1+m_2}\end{array}\right|=-1.$$

Tako se proizvod distribucije brzina v i V svodi na proizvod dvaju faktora:

$$\left\{\left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_1+m_2}{2kT}v^2} d^3V\right\}\left\{\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} d^3v\right\}.$$

U integraciji po celom intervalu brzina integracija prvog člana (distribucije brzina centra masa) zbog normiranosti daje jedinicu pa je:

$$TNR_{12} = \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \int N_1(\vec{v}_1)\, N_2(\vec{v}_2)\, v\,\sigma(v)\, d^3v_1\, d^3v_2$$

$$= \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v\,\sigma(v)\, e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} d^3v$$

$$= \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v\,\sigma(v)\, e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} 4\pi v^2\, dv.$$

Kako su srednje energije jezgara reda

$$\langle E\rangle \sim kT = 8{,}6\times 10^{-8}\,\mathrm{T\,keV}$$

tj. maksimalno reda keV, očito je da su preseci, prvenstveno zbog prisustva širokih kulonovih barijera (a ponegde zbog toka reakcije preko slabih interakcija) veoma mali i zato praktično nemerljivi u laboratorijskim uslovima (statistike su, bukvalno, nikakve!). Stoga se vrednosti preseka moraju ili ocenjivati ili ekstrapolisati sa viših energija. Iz zadatka E30 prozračnost kulonove barijere je

$$P \simeq e^{-\frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}}$$

pa je

$$\sigma(v) \simeq \sigma'(v)\, e^{-\frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}}.$$

Maksimalni presek reakcije σ' je proporcionalan De Brogliejevom geometrijskom preseku $\pi\lambda^{*2} \propto 1/v^2$ (zadatak E14) pa je opšti oblik zavisnosti preseka od brzine jednak:

$$\sigma(v) = \frac{S(v)}{v^2} e^{-\frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}}$$

gde je sada $S(v)$ čisti nuklearni presek koji zavisi od detalja nuklearne strukture (blizina rezonansi, itd) i koji se mora procenjivati svaki put a ostala su dva faktora sasvim opšte prirode. Tako je:

$$TNR_{12} = \frac{n_1 n_2}{1+\delta_{12}} 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty vS(v) e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2} e^{-\frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}} dv.$$

Ako je $S(v)$ relativno spora funkcija brzine (ili je interval brzina u kome je integral različit od nule mali, što već možemo videti po obliku podintegralne funkcije) tada je $S(v) \simeq S = const$ i konačno:

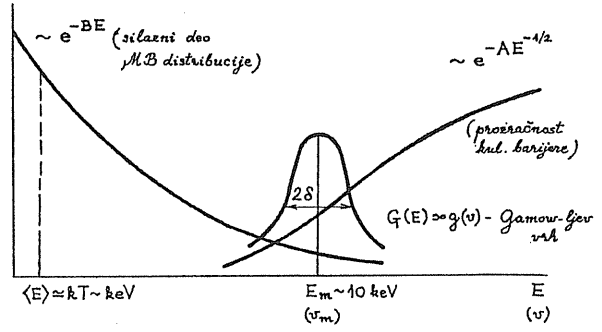
$$TNR_{12} \simeq \frac{4\pi S n_1 n_2}{1+\delta_{12}} \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2 - \frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}} dv$$

$$\equiv CT^{-3/2} \int_0^\infty v\, e^{-\frac{a}{v} - bv^2}\, dv \equiv CT^{-3/2}\, J(T)$$

gde smo uveli nove konstante a, $b = b(T)$ i C. Ostaje još, dakle, da se nađe vrednost integrala $J(T)$. Ona se lako nalazi jer je podintegralna funkcija bitno različita od nule samo u malom intervalu brzina. Podintegralnu funkciju $f(v) = vg(v)$ je u ovu svrhu zgodnije posmatrati kao funkciju energije

$$F(E) \propto \sqrt{E}\, e^{-AE^{-1/2} - BE} \equiv \sqrt{E}\, G(E).$$

Kako je srednja energija *MB* distribucije $\langle E\rangle \simeq kT$ reda keV to počev od tih vrednosti počinje eksponencijalni (brzi) pad distribucije: e^{-BE}. Prozračnost barijere, $e^{-AE^{-1/2}}$, je, pak, što se lako vidi, na tim energijama zanemarljiva i počinje primetno da raste na energijama reda desetina keV. Na slici se vidi da je njihov proizvod $G(E)$ bitno različit od nule u veoma uzanoj oblasti energija oko neke energije E_m na kojoj produktna funkcija $G(E)$ ima maksimum. Shodno tome i funkcija $g(v)$ biće primetno različita od nule samo u uzanom intervalu brzina oko brzine $v_m = \sqrt{2\mu E_m}$. Prirodno je, dakle, da produktnu funkciju $g(v)$ (koja se zove Gamow-ljevim vrhom) aproksimiramo gausijanom



RE33

standardnog oblika, širine $2\,\delta$, oko vrednosti v_m; tj.:

$$g(v) \simeq K e^{-\left(\frac{v-v_m}{\delta/2}\right)^2}$$

gde je K visina gausijana, tj. maksimalna vrednost produktne funkcije $g(v)$ jednaka:

$$K = g(v_m) = e^{-\frac{a}{v_m} - bv_m^2}$$

Uz pretpostavku da u ovako uzanom intervalu brzina važi $v \simeq v_m$, traženi integral biće približno jednak:

$$J(T) \simeq v_m \left(e^{-\frac{a}{v_m} - bv_m^2}\right) \int_0^\infty e^{-\left(\frac{v - v_m}{\delta/2}\right)^2} dv = v_m \left(e^{-\frac{a}{v_m} - bv_m^2}\right) \frac{\delta}{2} \sqrt{\pi}\,.$$

(Alternativno, mogli smo produktnu funkciju aproksimirati pravougaonikom širine $2\,\delta$ i visine jednake maksimalnoj vrednosti podintegralne funkcije. Tako bi bilo:

$$J(T) \simeq 2\,\delta\, v_m \left(e^{-\frac{a}{v_m} - bv_m^2}\right)$$

što se nebitno razlikuje od gornje vrednosti).

Širinu gausijana δ nalazimo po definiciji iz vrednosti brzine $v = v_m + \delta$ na kojoj produktna funkcija opadne od maksimalne vrednosti za v_m na vrednost e puta manju, tj. iz uslova:

$$\frac{g(v)}{g(v_m)} = \frac{e^{-\left(\frac{a}{v} + bv^2\right)}}{e^{-\left(\frac{a}{v_m} + bv_m^2\right)}} = \frac{1}{e}\,.$$

Logaritmovanjem dobijamo:

$$\frac{a}{v_m + \delta} + b\,(v_m + \delta)^2 - \frac{a}{v_m} - bv_m^2 = 1\,.$$

Množenje sa $v_m\,(v_m + \delta) \simeq v_m^2$ i zanemarivanje članova uz δ^3 daje:

$$\delta \simeq \pm \sqrt{\frac{1}{3\,b}}\,.$$

Brzinu v_m na kojoj podintegralna funkcija ima maksimum lako nalazimo izjednačavajući prvi izvod eksponenta produktne funkcije sa nulom:

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{a}{v} - bv^2\right) = 0$$

odakle je:

$$v_m = \sqrt[3]{\frac{a}{2\,b}}\,.$$

Sada je interesantno pogledati kolika je odgovarajuća energija E_m (koja se naziva najefikasnijom energijom termonuklearne reakcije na datoj temperaturi) u odnosu na srednju energiju kT. Uz vrednosti za a i b biće:

$$E_m = \frac{\mu}{2}\, v_m^2 = 1{,}245\,(z_1^2 z_2^2 A'\, T_6^2)^{1/3}\ \text{keV}$$

gde smo sa $A' = A_1 A_2/(A_1 + A_2)$ označili redukovanu atomsku masu učestvujućih jezgara (u ajm) kao posledicu veze $\mu = m_H A'$ a sa T_6 temperaturu izraženu u milionima stepeni. Lako se vidi da je ova energija uvek veća od srednje energije kT što je i bilo razumno očekivati jer je prisustvom kulonove barijere optimalna vrednost energije za reakciju »povučena« ka višim vrednostima (ka »repu« MB spektra). Zamenjujući nađene vrednosti za δ i v_m u rezultat za $J(T)$, dobijamo:

$$J(T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\delta\, v_m\, e^{-\frac{a + bv_m^3}{v_m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{a}\,b^{-5/6}\,e^{-3\left(\frac{a^2 b}{4}\right)^{1/3}}$$

pa je:

$$TNR_{12} = \frac{4\,\pi S n_1 n_2}{1 + \delta_{12}} \left(\frac{\mu}{2\,\pi k}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{\frac{2\,\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar}} \left(\frac{\mu}{2k}\right)^{-5/6}$$
$$\times\, T^{-3/2}\, T^{5/6}\, e^{-3\left(\frac{\pi^2 z_1^2 z_2^2 e^4 m_H A'}{2\hbar^2 kT}\right)^{1/3}}.$$

Kako je $n_1 = \rho\, X_1/m_1$ i $n_2 = \rho\, X_2/m_2$ gde su X_1 i X_2 procentni sadržaji jedne odnosno druge vrste, ovo konačno postaje:

$$TNR_{12} = \frac{S}{m_1 m_2\,(1 + \delta_{12}} \left(\frac{\mu}{2k}\right)^{7/3} \left(\frac{4\,\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar}\right)^{1/3}$$
$$\times\, \rho^2 X_1 X_2\, T^{-2/3}\, e^{-3\left(\frac{\pi^2 z_1^2 z_2^2 e^4 m_H A'}{2\hbar^2 kT}\right)^{1/3}}$$
$$\equiv C_{12}\,\rho^2 X_1 X_2\, T^{-2/3}\, e^{-3\left(\frac{\pi^2 z_1^2 z_2^2 e^4 m_H A'}{2\hbar^2 kT}\right)^{1/3}},$$

što je i traženi opšti izraz. Da bismo za konkretan slučaj ovaj izraz mogli da nađemo moramo, dakle, znati:

1) od astrofizičkih veličina:
   a) gustinu ρ i temperaturu T u oblasti zvezde gde se reakcija odvija;
   b) hemijsku obilnost X_1 i X_2 reagujućih jezgara u ovoj oblasti;
2) od nuklearnih podataka:
   a) presek za reakciju S u oblasti energije E_m koji se obično procenjuje ili ekstrapolira sa viših energija;
   b) ako želimo da nađemo energiju oslobođenu u ovakvoj reakciji/cm³/s treba nam još i Q-vrednost reakcije kojom se TNR_{12} množi.

Ako je srednje vreme života nuklearne vrste (1) u datoj sredini τ_1, očigledno je da je:

$$-(TNR_{12}) = \frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{n_1}{\tau}$$

odakle je:

$$\tau_1 = \frac{n_1}{TNR_{12}} = \frac{\rho\, X_1}{m_1 TNR_{12}} = \frac{T^{2/3}\, e^3 \left(\frac{\pi^2 z_1^2 z_2^2 e^4 m_H A'}{2\hbar^2 kT}\right)^{1/3}}{C_{12}\,\rho\, X_2}\ \text{s}.$$

što, znajući TNR_{12}, lako nalazimo.

RE34 Zamenom datih vrednosti u gornje izraze nalazimo:

$$E_{pp}=22{,}5\ \text{erg/g}\cdot\text{s} \quad \text{i} \quad E_{CN}=0{,}5\ \text{erg/g}\cdot\text{s}$$

Na ovoj temperaturi je, znači, p—p ciklus dominantan. Totalna energija oslobođena u celoj centralnoj zoni datog radijusa biće, dakle:

$$L_\odot = \rho V E_{pp} = \frac{4}{3}\pi (0{,}11\, R_\odot)^3 \rho\, E_{pp} \simeq 4\times 10^{33}\ \text{erg s}^{-1}$$

što se izvanredno dobro slaže sa stvarnom vrednošću. Fluks energije na površini Sunca biće:

$$\Phi = \frac{L_\odot}{4R_\odot^2\pi} \simeq 6{,}5\times 10^{10}\ \text{erg cm}^{-2}\,\text{s}^{-1}.$$

S druge strane, po Štefan-Boltzmannovom zakonu, ovo je jednako:

$$\Phi = \sigma T_e^4$$

pa je:

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{4\sigma R_\odot^2\pi}} \simeq 5\,800\ \text{K}.$$

Solarna konstanta ε biće:

$$\varepsilon = \frac{L_\odot}{4\pi\langle r\rangle^2}$$

gde je $\langle r\rangle$ srednje rastojanje Sunce-Zemlja jednako jednoj astronomskoj jedinici

$$1\ \text{AJ}=1{,}5\times 10^{13}\ \text{cm}$$

Tako je:

$$\varepsilon = 1{,}4\times 10^6\ \text{erg/cm}^2\text{s} = 2\ \text{cal/cm}^2\cdot\text{min}$$

Vidimo, dakle, da ceo model mehanizma oslobađanja energije u zvezdama radi veoma dobro.

RE35 Iz datih podataka direktno nalazimo da je u ovom slučaju:

$$E_{pp}\simeq 240\ \text{erg/g}\cdot\text{s} \quad \text{a} \quad E_{CN}=8{,}25\times 10^6\ \text{erg/g}\cdot\text{s}$$

Poredeći ove dve vrednosti sa rezultatima za Sunce (prethodni zadatak) opažamo veoma brzu zavisnost tempa reakcija od temperature. Takođe vidimo da je na ovoj temperaturi C—N proces daleko intenzivniji od p—p, što je za očekivanje zbog znatno brže zavisnosti E_{CN} od temperature.

Luminoznost zvezde biće jednaka:

$$L = E_{CN}\rho V = \frac{4}{3}\pi(R_>^3 - R_<^3)\rho\, E_{CN} = 4\times 10^{36}\ \text{erg}\cdot\text{s}^{-1} \simeq 1000\, L_\odot\,!$$

Efektivna površinska temperatura zvezde biće, po Štefan-Boltzmannovom zakonu:

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{L}{4\sigma R^2\pi}} \simeq 3300\ \text{K}$$

što opravdava atribut »crveni« za zvezde koje vidimo u ovoj fazi evolucije. Na ovaj se način, dakle, svi astrofizički podaci i za zvezde u ovoj fazi evolucije mogu razumno interpretirati (veoma je dobro pogođena tačka na HR dijagramu iz zadatka E28).

Glava F

Alfa raspad

F1 Jezgro ^{232}U transformiše se alfa raspadom u jezgro ^{228}Th, emitujući četiri grupe alfa čestica sa energijama: 5318 keV, 5260 keV, 5130 keV i 4997 keV. Svi raspadi polaze iz osnovnog stanja početnog jezgra. Nacrtajte šemu raspada ^{232}U i naznačite energetske nivoe jezgra ^{228}Th. (Prelaz od 133 keV je zabranjen).

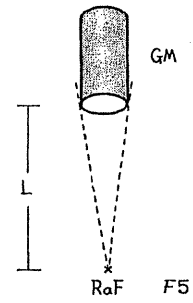
F2 Odrediti masu atoma čije se jezgro raspada iz mira emisijom alfa čestice kinetičke energije 8,336 MeV i prelazi u jezgro ^{209}Pb. Mase konačnog atoma i alfa-čestice su: 209,046471 i 4,003837 ajm.

F3 Totalna energija oslobođena u alfa raspadu jezgra ^{232}Pa iz osnovnog stanja iznosi Q=4,47 MeV. Izračunajte koliku će kinetičku energiju imati alfa čestica koja se emituje iz pobuđenog stanja jezgra ^{232}Pa, koje je nastalo reakcijom jezgra ^{231}Pa sa termalnim neutronom. Mase relevantnih jezgra i neutrona iznose: 231,035936; 232,038509 i 1,008982 ajm.

F4 Eksperimentalno određena vezivna energija za alfa česticu iznosi 28,3 MeV, a vezivna energija jezgra atomskog broja A i rednog broja Z može da se izrazi, poluempirijskom, Weizsackerovom formulom:

$$B(Z,\ A) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a^3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_5$$

Kombinujući ova dva podatka odredite Q-vrednost za alfa-raspad jezgra (Z, A).



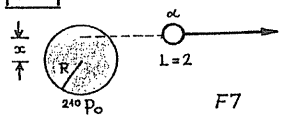
F5

F5 Poznato je da je radijum F (^{210}Po) čisti alfa-emiter. Pokušajte da odredite energiju alfa čestica koje emituje radijum F. Na raspolaganju vam stoji GM-brojač (efikasnosti za alfa čestice ε=0,16) sa policom u koju možete da stavite tačkasti preparat radijuma F (vidi sliku), i osetljivi kalorimetar toplotnog kapaciteta 0,49 cal°K^{-1}, u koji možete da unesete preparat posle merenja GM-brojačem. Pretpostavite da ste u eksperimentu dobili sledeće podatke: odbroj GM-brojača u sekundi R=2960, temperatura u kalorimetru se jedan čas po unošenju preparata popela za 1,1°K, udaljenje preparata od brojača L=1 m i prečnik brojača D=0,02 m.

F6 Još na samim počecima nuklearne fizike otkrivena je eksperimentalno tesna veza između konstante raspada i energije emitovane alfa čestice. Ova zavisnost je tipa $\log \lambda = a + \frac{b}{\sqrt{E}}$ i poznata je kao Geiger-Nuttallov zakon. Za parno parna

jezgra $a=55$, a $b=1{,}704\ Z$, ako je energija data u MeV. Koristeći Geiger-Nuttallov zakon odredite redni broj *ThC''* koji emituje alfa čestice energije 7, 7 MeV i ima period poluraspada $1{,}6\ 10^{-4}$s.

F7



F7

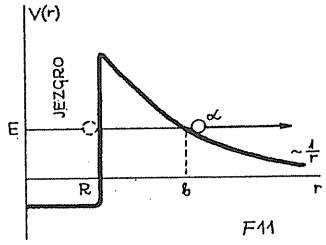
Polazeći od poluklasične slike proceniti na kolikom rastojanju od centra jezgra izleće alfa čestica energije 4,5 MeV iz ^{210}Po. Alfa čestica »nosi« moment impulsa $L=2$.

F8 Alfa čestica je pozitivno naelektrisana tako da pri izlasku iz jezgra mora da savlada Kulonovu barijeru pozitivnog naelektrisanja jezgra. Izračunati visinu Kulonove barijere koju »vidi« alfa čestica u jezgru ^{238}U. Izračunati i širinu Kulonove barijere koju tunel efektom mora da savlada alfa čestica energije 4,2 MeV.

F9 Emisiji alfa čestice iz jezgra protivi se Kulonova ali i centrifugalna barijera. Za jezgro sa $Z=90$ i $A=230$, koje emituje alfa česticu momenta impulsa $L=4$ odrediti odnos Kulonove prema centrifugalnoj barijeri, na radijusu jezgra.

F10 Polazeći od relacija neodređenosti proceniti učestanost kojom alfa čestica »udara« o zidove Kulonove potencijalne barijere na radijusu jezgra, ako se nalazi već formirana u jezgru.

F11 Alfa raspad je klasičan primer za kvantno mehanički tunel efekat. Interakcija između, u jezgru formirane, alfa čestice i ostatka jezgra prikazana je potencijalom na slici, koji se sastoji od čistog Kulonovog potencijala izvan jezgra i nuklearnog potencijala (potencijala jake interakcije) unutar jezgra, aproksimiranog pravouglom potencijalnom jamom. Pretpostavite da alfa čestica ima moment impulsa nula (S — talas) pa izračunajte prozračnost (P) potencijalne barijere (koju klasično gledano alfa čestica, čija je energija prikazana na slici horizontalnom linijom, nikad ne može da savlada).



F11

Napomene: a) Prozračnost barijere može da se dobije jedino rešavanjem Schrödingerove jednačine, tj. nalaženjem eksplicitnog oblika radijalne talasne funkcije alfa čestice $\psi(r)$ u oblasti $R<r<b$, gde je R radijus jezgra a b rastojanje na kome je kinetička energija alfa čestice jednaka nuli. Prozračnost je tada, sledeći probabilističku interpretaciju talasne funkcije:

$$P=|\psi(b)|^2/|\psi(R)|^2$$

b) Da bismo olakšali rešavanje Schrödingerove jednačine napišite radijalnu talasnu funkciju u obliku: $\psi(r)=exp(-U(r)/\hbar)$

c) Procenite veličinu članova uz izvode u Schrödingerovoj jednačini, odbacite najmanji i tek onda rešite jednačinu po $U(r)$.

F12 Prozračnost Kulonove barijere za alfa česticu data je aproksimativnim izrazom (pogledajte prethodni zadatak)

$$P=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_R^b\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}}{r}-E}\,dr}.$$

gde je $\mathfrak{Z}=2e^2(Z-2)$, a b rastojanje na kome čestica napušta barijeru ($b=\mathfrak{Z}/E$). Naći eksplicitan izraz za prozračnost barijere, pretpostavljajući da je kinetička energija alfa čestice (E) znatno manja od visine Kulonove barijere ($E_b=\mathfrak{Z}/R$).
Napomena: Integral koji figuriše u izrazu za prozračnost najlakše je rešiti uvođenjem smene promenljivih:

$$r=\frac{\mathfrak{Z}}{E}\cos^2\vartheta.$$

F13 Jednostavan model prolaska alfa čestice kroz barijeru daje nam sledeći izraz za konstantu raspada

$$\lambda=10^{21}e^{-4\sqrt{\frac{\alpha(Z-2)mc^2b}{\hbar c}}\left\{\arccos\sqrt{\frac{R}{b}}-\sqrt{\frac{R}{b}-\left(\frac{R}{b}\right)^2}\right\}}$$

gde je λ izraženo u s. α je konstanta hiperfine strukture a b rastojanje na kome je energija alfa-čestice jednaka nuli. Ispitati valjanost ove formule na slučaju alfa raspada ^{230}Th. ^{230}Th emituje alfa čestice energije 4,7 MeV sa periodom poluraspada 8×10^4 godina.

F14 Pokušajte da dobijete eksplicitni izraz i numeričke koeficijente u Geiger-Nuttallovoj formuli (videti zadatak F6) koristeći teoriju prolaska alfa čestice kroz Kulonovu barijeru. (Korisne informacije možete pronaći u zadacima: F11, F12 i F13).

F15 Iz uobičajene diferencijalne jednačine koja opisuje promenu broja neraspadnutih jezgara sa vremenom $dN/dt=-(\Gamma/\hbar)N$ integracijom se dobija zakon opadanja alfa aktivnosti:

$$N_t=\exp\{-(\Gamma/\hbar)t\}$$

(Ovde je uzeto da je $N(0)=1$, a konstanta proporcionalnosti je zbog pogodnosti izabrana u obliku $\Gamma/\hbar$). Jasno je da veličina Γ ima dimenzije energije. Dakle, svako jezgro dok se ne raspadne ima istu verovatnoću za raspad u jedinici vremena bez obzira koliko je dugo pre toga postojalo. Ta je verovatnoća jednaka baš $\Gamma/\hbar$ i ne zavisi od vremena. Na osnovu ovog zakona možemo napisati eksplicitno vremensku zavisnost talasne funkcije jezgra koje nije emitovalo alfa česticu:

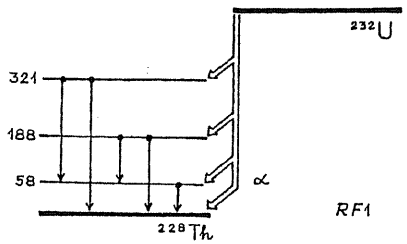
$$\psi_t\infty e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \qquad \text{(F15.1)}$$

Drugi član je ovde uobičajeni evolucioni faktor talasne funkcije a prvi govori o eksponencijalnom amortizovanju talasne funkcije koji izgleda ovako da bi kvadrat talasne funkcije $\psi\psi^*$ dao baš gornji zakon raspada. Sva neraspadnuta jezgra opisuju se potpuno istom talasnom funkcijom (F15.1), tj. sva jezgra imaju potpuno jednaku

verovatnoću raspada u jedinici vremena i nemoguće je reći koje će se od njih raspasti pre a koje kasnije. Zakon raspada čisto je statistički ! Alfa raspad se ne može shvatiti kao završetak nekog procesa koji sa vremenom protiče u jezgru; jezgro je uvek na isti način spremno za raspad. Ako funkciju (F15.1) napišemo u obliku $\psi_t \infty e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E - i\frac{\Gamma}{2}\right)} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_c t}$ tada je možemo shvatiti kao vremenski zavisni deo funkcije koja opisuje stanje sa kompleksnom vrednošću energije $E_c = E - i\Gamma/2$. (Ovo se ne protivi hermitivnosti hamiltinijana). Razvijanjem funkcije (F15.1) u Fourierov integral po funkcijama sa realnim vrednostima energije E čija je vremenska zavisnost uobičajena i jednaka $\psi_t' \infty \exp(-iE't/\hbar)$ naći koliki je po redu veličine interval energije $\Delta E'$ u kome je amplituda ove funkcije sa realnom energijom različita od nule, tj. kolika je energetska širina stanja podložnog alfa raspadu sa konstantom raspada $\lambda = \Gamma/\hbar$.

F16 Iz prethodnog zadatka se vidi da amplituda $a(E')$ ima dimenzije (energija)$^{-1}$ pa će i kvadrat amplitude integraljen po energiji imati iste dimenzije. Naći vrednost navedenog integrala (od $-\infty$ do $+\infty$) dobijenu vrednost označivši sa $1/\Delta E$. Zatim integraljenjem zakona raspada (od 0 do ∞) naći srednje vreme u kome se dešava raspad i označiti ga sa Δt. Naći zatim proizvod $\Delta E \Delta t$ i interpretirati dobijeni rezultat.

RF1 Šema raspada ^{232}U data je na slici



Energije gama kvanata su: 58, 130, 188, 236 i 312 keV.

RF2 Početni atom mase m_a raspada se na alfa česticu i atom mase m_b. Koristeći relativistički zakon održanja impulsa i energije dobićemo ($c=1$):

$$m_a = \sqrt{m_b^2 + p_b^2} + \sqrt{m_\alpha^2 + p_\alpha^2}$$
$$\vec{O} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_b$$

Kinetička energija alfa čestice iznosi: $T_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 + m_\alpha^2} - m_\alpha^2$. Kombinujući gornje izraze i imajući u vidu da je $T_\alpha \ll m_\alpha$ dobijamo sledeći izraz za masu polaznog atoma:

$$m_u = m_b + m_\alpha + T_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_b}\right) = 213{,}05932 \text{ ajm}$$

RF3 Zahvatom termalnog neutrona jezgro ^{232}Pa prelazi u ekscitirano stanje energije:

$$W = M_{231} + m_n - M_{232}$$

Alfa raspadu koji polazi iz ovog energetskog stanja stoji na raspolaganju energija $q = Q + W$. Prema tome kinetička energija alfa čestice koja se emituje iz pobuđenog stanja ^{232}Pa biće jednaka:

$$T_\alpha = \frac{q}{1 + \frac{m_\alpha}{M_{232}}} = \frac{Q + M_{231} + m_n - M_{232}}{1 + \frac{m_\alpha}{M_{232}}} = 10{,}3 \text{ MeV}.$$

RF4 Q — vrednost za alfa raspad izražena preko vezivnih energija početnog i konačnog jezgra glasi:

$$Q=B(^4He)+B(Z-2, A-4)-B(Z, A)$$

Ako jezgro ima veliki broj nukleona, što je jedan od nužnih uslova za spontan alfa raspad, u dobroj aproksimaciji možemo da pišemo:

$$B(Z-2,\ A-4)-B(Z-A)\simeq -4\frac{\partial B(Z,A)}{\partial A}-2\frac{\partial B(Z,A)}{\partial Z}$$

Koristeći vezivnu energiju alfa čestice, za traženu Q — vrednost dobijamo:

$$Q=28{,}3-4a_1+\frac{8}{3}a_2A^{-1/3}+3a_3ZA^{-1/3}\left(1-\frac{Z}{3A}\right)-4a_4\left(1-\frac{2Z}{A}\right)^2.$$

RF5 GM — brojačem odredićemo najpre totalnu aktivnost preparata radijuma F

$$A=\frac{R}{\varepsilon\times\frac{1}{16}\times\frac{D^2}{L^2}}=7{,}4\times10^8\ \textit{raspada/s}.$$

Ukupna količina toplote koja će da se oslobodi u kalorimetru za 1 čas sa izvorom ovakve aktivnosti iznosi:

$$Q=A\,t\,E_\alpha$$

gde je E_α kinetička energija alfa čestice.
Dakle:

$$E_\alpha=\frac{C\cdot\Delta I}{At}\simeq 5{,}28\ \text{MeV}$$

RF6 Brižljivim računom po Geiger-Nuttallovoj formuli za redni broj ThC'' dobija se $Z=88$. Stvarni redni broj ThC'' je 84. Računski gledano greška formule za naš slučaj je manja od 5%.

RF7 Impuls alfa-čestice, koja ima kinetičku energiju $E=4{,}5$ MeV, iznosi:

$$p=\sqrt{2mE}$$

Klasičan moment impulsa u odnosu na centar jezgra dat je izrazom:

$$M=p\,x=\hbar\sqrt{L(L+1)}$$

Iz ovog izraza možemo da odredimo rastojanje x od centra jezgra na kome alfa čestica napušta jezgro

$$x=\frac{\hbar c\sqrt{L(L+1)}}{\sqrt{2mc^2E}}\simeq 2{,}7\ \textit{fermi}.$$

Dobijeno rastojanje je približno dva puta manje od poluprečnika jezgra ^{210}Po.

RF8 Visina Kulonove barijere jezgra za česticu naelektrisanja $+2e$ iznosi:

$$E_C=\frac{2(Z-2)e^2}{r_0(A-4)^{1/3}}=\frac{2\alpha(Z-2)\hbar c}{r_0(A-4)^{1/3}}=30{,}5\ \text{MeV}$$

Širina barijere (D) jednaka je rastojanju na kome je kinetička energija alfa čestice jednaka nuli minus radijus jezgra, tj.

$$D=\frac{2(Z-2)e^2}{E_\alpha}-r_0A^{1/3}=78\ \textit{fermi}.$$

RF9 Vrednost centrifugalne potencijalne energije (centrifugalne barijere) na poluprečniku jezgra iznosi:

$$V_l=\frac{\hbar^2l(l+1)}{2mR^2}$$

Odnos Kulonove prema centrifugalnoj barijeri jednak je, dakle:

$$\frac{V_c}{V_l}=\frac{4\alpha(Z-2)mc^2R}{\hbar cl(l+1)}\simeq 20.$$

RF10 Učestanost kojom alfa-čestica udara o zidove jezgra jednaka je recipročnoj vrednosti vremena preleta jezgra. Kada bi se alfa-čestica kretala samo duž jednog radijusa jezgra vreme preleta bi bilo $2R/v$, gde je v brzina alfa-čestice unutar jezgra. Brzinu alfa-čestice možemo, grubo, da ocenimo iz relacije neodređenosti:

$$v\simeq\hbar/mR$$

Tako je učestanost pokušaja alfa-čestice da napusti jezgro jednaka:

$$f=\frac{v}{2R}=\frac{\hbar}{2mR^2}=\frac{6}{A^{2/3}}\,10^{21}\ \text{Hz}.$$

RF11 Vremenski nezavisna Schrödingerova jednačina u našem slučaju glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dr^2}+\left(\frac{\beta}{r}-E\right)\psi=0$$

gde je m redukovana masa alfa-čestice, koja se za masivno jezgro tek malo razlikuje od stvarne mase mirovanja alfa-čestice, a β označava $2e^2(Z-2)$. Koristeći se napomenom (b) ($\psi=e^{-\frac{1}{\hbar}U(r)}$) dobićemo:

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{1}{2m}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2+\left(\frac{\beta}{r}-E\right)=0$$

Ispitivanjem koeficijenata uz izvode po radijusu vidimo da je koeficijenat uz drugi izvod znatno manji od koeficijenta uz prvi, dakle aproksimativna jednačina postaje:

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{dU}{dr}\right)^2+\left(\frac{\beta}{r}-E\right)=0$$

Rešenje ove jednačine je lako naći:

$$U(r)=\sqrt{2m}\int\sqrt{\frac{\beta}{r}-E}\,dr$$

tako da apsolutna vrednost kvadrata radijalne funkcije alfa čestice iznosi:

$$|\psi(r)|^2=e^{-\frac{2}{\hbar}U(r)}$$

Prozračnost barijere za alfa česticu data je izrazom:

$$P=\frac{|\psi(b)|^2}{|\psi(R)|^2}=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_R^b\sqrt{\frac{\beta}{r}-E}\,dr}.$$

RF12 Korišćenjem predložene smene promenljivih integral u izrazu za prozračnost transformisaćemo na sledeći način:

$$\int_R^b\sqrt{\frac{\beta}{r}-E}\,dr=\frac{2\beta}{\sqrt{E}}\int_{\vartheta_D}^{\vartheta_G}\sin^2\vartheta\,d\vartheta=\left[\frac{\vartheta}{2}-\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_{\vartheta_G}^{\vartheta_D}$$

gde su nove granice integracije:

$$\vartheta_D=\arccos\sqrt{\frac{RE}{\beta}}=\arccos\sqrt{\frac{R}{b}};\quad \vartheta_G=\arccos\sqrt{\frac{bE}{\beta}}=0$$

Imajući u vidu sledeći identitet za inverzne trigonometrijske funkcije

$$(\sin\arccos x)(\cos\arccos x)=x\sin\arccos x\equiv x\sqrt{1-x^2}$$

konačna vrednost integrala je:

$$\frac{\beta}{\sqrt{E}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{b}}-\sqrt{\frac{R}{b}-\left(\frac{R}{b}\right)^2}\right]$$

Uslov da je energija alfa čestice znatno manja od Kulonove barijere, ekvivalentan je uslovu: $R/b\ll 1$. Pod ovim uslovom vrednost integrala približno je jednaka:

$$\frac{\beta}{\sqrt{E}}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{R}{b}}\right)$$

a prozračnost barijere tada iznosi:

$$P=e^{-\sqrt{\frac{8mb\beta}{\hbar^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{R}{b}}\right)}$$

RF13 Veličina b definisana je izrazom

$$b=\frac{2(Z-2)e^2}{E}=2(Z-2)\alpha\left(\frac{\hbar c}{E}\right)$$

U našem slučaju $b=54{,}5$ fm, a odnos $R/b\simeq 0{,}16$ tako da je

$$\arccos\sqrt{\frac{R}{b}}-\sqrt{\frac{R}{b}-\left(\frac{R}{b}\right)^2}\simeq 0{,}8$$

Posle brižljivog računa dobijamo

$$4\sqrt{\frac{\alpha(Z-2)mc^2b}{\hbar c}}=4{,}67\times10^6\sqrt{(Z-2)b}$$

Prema tome, izraz za konstantu raspada postaje

$$\lambda=10^{21-0{,}434\,G}$$

gde je $G=0{,}8\times4{,}47\times10^6\sqrt{b(Z-2)}\simeq 80$.

Period poluraspada ^{230}Th iznosi: $T_{1/2}\simeq 2\times10^6$ godina. Ako ovu vrednost za period poluraspada uporedimo sa eksperimentalno određenom vrednošću videćemo da je vrednost koja se dobija na osnovu modela prolaska alfa-čestice kroz barijeru veća oko 30 puta od eksperimentalno izmerene vrednosti.

RF14 Konstanta raspada (u najnižoj aproksimaciji) može da se napiše u obliku:

$$\lambda=10^{21}e^{-4\sqrt{\frac{\alpha Zmc^2b}{\hbar c}}}=10^{21}e^{-4{,}7\times10^6\sqrt{Zb}}$$

gde je b obrnuto proporcionalno energiji, tj. $b=2Z\alpha\left(\frac{\hbar c}{E}\right)$

Dakle:

$$\lambda=10^{21}e^{-4{,}7\times10^6\sqrt{2\alpha\hbar c}\left(\frac{Z}{\sqrt{E}}\right)}$$

Ako potražimo dekadni logaritam ovog izraza imaćemo:

$$\log\lambda=21-1{,}1\frac{Z}{\sqrt{E}}$$

gde je λ u sekundama ako je energija (E) izražena u MeV.

RF15 Napišimo Fourierov transform:

$$F(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}=e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E-i\frac{\Gamma}{2}\right)t}=\int_{-\infty}^{\infty}a(E')e^{-\frac{i}{\hbar}E't}\,dE'$$

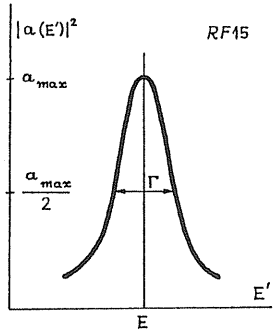
Amplituda $a(E')$ (naziva se Breit-Wignerova amplituda) pri tom je jednaka:

$$a(E')=\frac{1}{2\pi h}\int_0^\infty F(t)e^{\frac{i}{\hbar}E't}\,dt=\frac{1}{2\pi h}\int_0^\infty e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E-i\frac{\Gamma}{2}\right)t}e^{\frac{i}{\hbar}E't}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{\Gamma}{2}+i(E-E')\right]t}\,dt=\frac{1}{2\pi\left[\frac{\Gamma}{2}+i(E-E')\right]}.$$

a njen kvadrat:

$$a(E')\,a^*(E') = |a(E')|^2 = 1/4\,\pi^2\left[(E-E')^2+\frac{\Gamma^2}{4}\right]$$



Ispitivanjem ove funkcije lako utvrđujemo da ima opšti oblik kao na slici; da joj je maksimum na vrednosti $E'=E$ (na realnom delu kompleksne energije E_c), tj da su u spektru funkcija ψ_t' one sa ovom vrednošću energije najzastupljenije, kao i da vrednost $|a(E')|^2$ pada na polovinu svoje maksimalne vrednosti $(\pi\Gamma)^{-2}$ za energije $E'=E\pm$ $\pm\Gamma/2$. Traženi interval energija E' ($\Delta E'$) u kome je amplituda funkcije ψ'_t primetno različita od nule jednak je, dakle, baš Γ. Ova se veličina naziva prirodnom širinom (poluširinom) stanja energije E ili širinom spektralne linije zračenja koje se emituje iz ovog stanja.

RF16 Pomoću smene $E-E'=z$ nađimo vrednost integrala:

$$\frac{1}{\Delta E} = \int_{-\infty}^{\infty} |a(E')|^2\,dE' = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE'}{(E-E')+\frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{2}{\Gamma}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{\frac{\Gamma}{2}}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi\Gamma}$$

tj. $\Delta E=2\pi\Gamma$

Zatim nađimo srednje vreme Δt:

$$\Delta t = \int_0^{\infty}\psi_t\,\psi_t^*\,dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Gamma}{h}t}\,dt = \frac{h}{\Gamma}$$

i konačno proizvod ove dve veličine:

$$\Delta E\,\Delta t = 2\pi h$$

Dobili smo, dakle, rezultat analogan relacijama neodređenosti za energiju i vreme! (koeficijent 2π nije bitan). Znači da je energija stanja koje postoji tokom ograničenog vremenskog intervala Δt određena sa tačnošću reda $2\pi h/\Delta t$. Tačno je zadana samo energija stanja koje postoji neograničeno dugo, tj. koje se ne raspada. Veličina $\Gamma\infty\Delta E$ naziva se energetskom širinom stanja (nivoa) sistema (podjednako se definiše za sva stanja koja traju određeno vreme Δt a ne samo na ona koja su podložna alfa raspadu). Ako je, dakle, energija jezgra u intervalu ΔE tada je alfa čestica u izvesnom smislu vezana u jezgru u toku intervala vremena Δt. Što je potencijalna barijera viša (ili šira) to je i njena prozračnost manja pa je samim tim manja

i njoj proporcionalna verovatnoća raspada Γ/h. No, tada je manje ΔE pa je time i dato stanje (koje u stvari pripada kontinuiranom spektru oblika $|a(E')|^2$) bliže zaista vezanom stanju diskretnog spektra sa tačnom energijom E koje živi beskonačno dugo ($\Delta t\to\infty$). Veličina Γ upravo to i pokazuje: koliko je dato stanje, sposobno za raspad, blisko čvrsto vezanom stanju definisane energije E koje živi beskonačno dugo. Alternativno, iz oblika $|a(E')|^2$ vidi se da u slučaju $\Gamma\to 0$, tj. smanjenjem prozračnosti, imaginarni deo energije E_c koji je jednak $\Gamma/2$ teži nuli a samo E_c teži energiji vezanog stanja E. Amplituda $a(E')$ tada je prosto jednaka delta funkciji $\delta(E-E')$, tj. sistem ima tačno definisanu energiju i živi beskonačno dugo.

Glava G

Beta raspad

G1 Izvestan broj jezgara može istovremeno da se raspadne beta minus, beta plus raspadom i K zahvatom. Pokažite da je ovakav, trostruki raspad energetski moguć za jezgro $^{64}_{29}Cu$ (63,9298 ajm). Atomske mase za obližnja $Z\pm1$ jezgra su: $^{64}_{28}Ni$ — 63,9280 ajm, $^{64}_{30}Zn$ — 63,9291 ajm.

G2 Izotop argona ^{37}Ar elektronskim zahvatom prelazi u stabilan ^{37}Cl. Odredite energiju uzmaka atoma hlora i energiju neutrina koji prati elektronski zahvat. Pretpostavite da jezgro atoma argona miruje. (Mase atoma argona i hlora su: 36,978416 ajm i 36,977540 ajm).

G3 Naći energiju neutrina iz K-zahvata u atomu ^{137}Cs ako ukupna energija koja se oslobodi ovim procesom iznosi 355 keV, a energija veze K-elektrona u rezidualnom jezgru 35 keV. Pretpostavite da se pri ovom procesu rezidualno jezgro javlja u osnovnom stanju.

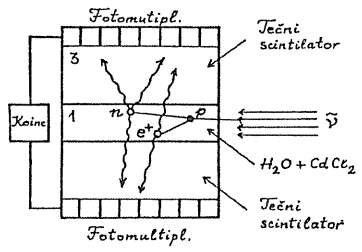
G4 Jezgro ^{7}Be se K-zahvatom raspada u ^{7}Li u osnovnom stanju. Eksperimentalno je utvrđeno da je srednja energija uzmaka jezgra ^{7}Li 57,3 eV. Odredite masu mirovanja neutrina. Q-vrednost za ovu reakciju iznosi 0,866 MeV. (Pre raspada jezgro ^{7}Be se nalazilo u miru. Masa atoma ^{7}Li je 7,016 ajm u skali ^{12}C).

G5 Da li je iz beta minus raspada ugljenika

$$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^- + \tilde{\nu}$$

moguće jednoznačno odrediti spin antineutrina. Spinovi jezgara ^{14}C i ^{14}N su 0 i 1.

G6 Presek za interakciju neutrina sa protonima izmeren je proučavanjem inverznog beta raspada: $\tilde{\nu}+p^+ \longrightarrow n+e^+$ pomoću aparature prikazane na slici. Fluks antineutrina (dobijen iz reaktora), $\Phi = 1{,}2\ 10^{13}$ antin. cm^{-2} s^{-1}, usmeren je na komoru 1 ispunjenu vodenim rastvorom $CdCl_2$ koji služi istovremeno kao protonska meta i kao materijal za apsorpciju neutrona (Cd). Komore 2 i 3 ispunjene svaka sa oko 5000 litara tečnog scintilatora, služe (zajedno sa baterijom fotomultiplikatora) za detekciju gama kvanata koji se emituju posle neutronskog zahvata kadmijumom, prosečne energije 9 MeV. Koristeći se podacima dobijenim u eksperimentu: srednji odbroj



G6

koincidentnih gama kvanata (anihilacioni+zahvatni) R=0,15 imp/h; efikasnost za detekciju neutrona ε_n=0,17; efikasnost za detekciju pozitrona ε_β=0,15; broj protona (izračunat) u komori [1] 10^{28}, izračunati presek za interakciju antineutrina sa protonima.

G7 Proceniti koliki moment impulsa l odnosi elektron ili neutrino u beta raspadu (posmatrati proizvod impuls × radijus). Prodiskutovati rezultat. Na osnovu ovoga proceniti koje u ovom kontekstu zovemo dozvoljenim a koje zabranjenim prelazima.

G8 Ako sa $\mathcal{H}_{int}$ označimo hamiltonijan interakcije odgovorne za beta minus raspad, verovatnoća $P(E)\,dE$ emisije beta minus čestice energije između E i $E+dE$ u jedinici vremena data je kao:

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\int_V \psi_f^*\mathcal{H}_{\text{int}}\psi_i\,dV\right|^2\rho(E)\,dE$$

a) Naći izraz za statistički faktor $\rho(E)$ (koji daje gustinu konačnih stanja po jedinici ukupne energije i po jedinici energije elektrona) pod pretpostavkom da je masa mirovanja neutrina μ_0 mala ali konačna.
b) Ispitati uticaj vrednosti μ_0 na teorijski oblik spektra u blizini maksimalne energije (da li je μ_0 jednako nuli ili ne).

G9 Ako se eksplicitno napišu funkcije stanja za sve četiri čestice koje učestvuju u beta-raspadu $n\rightarrow p+e^-+\tilde{\nu}$ kao i hamiltonijan $\mathcal{H}_{int}=g$ (konstanta slabe interakcije), tada se matrični element prelaza može napisati kao:

$$\mathfrak{M}_{if}=\int_V \psi_f^*\mathcal{H}_{\text{int}}\psi_i\,dV=g\int_V V_p^*\psi_\beta^*\Phi_{\tilde{\nu}}^*U_n\,dV$$

i uz oznaku $M=\int_V V_p^*U_n\,dV$ verovatnoća raspada postaje:

$$P(E)dE=\frac{2\pi}{\hbar}g^2M^2\left|\int_V \psi_\beta^*\Phi_\nu\,dV\right|^2\rho(E)\,dE$$

Pod kojim se uslovima verovatnoća može napisati u prostom obliku:

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}g^2|M|^2\frac{1}{V^2}\frac{dN}{dE_0}$$

ako se za elektronsku i neutrinsku talasnu funkciju uzmu ravni talasi:

$$\psi_\beta=Ae^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}\qquad\text{(emisija elektrona)}$$

$$\Phi_\nu=Be^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}}\qquad\text{(apsorpcija neutrina)}$$

Uz pretpostavku da je masa neutrina jednaka nuli naći izraz za radioaktivnu konstantu beta minus raspada. Naći odavde izraz za takozvanu ft vrednost i prodiskutovati rezultat. Prodiskutovati i dejstvo (ovde) zanemarene Coulombove interakcije na oblik beta spektra.

G10 Elektrostatičko polje jezgra naelektrisanja $+Ze$ dovodi do »distorzije« elektronskih (pozitronskih) talasnih funkcija u beta raspadu (koje se u jednostavnoj teoriji beta raspada predstavljaju ravnim talasima). Efekt se opisuje tzv. Coulombovim faktorom kojim se množi energetska (impulsna) raspodela beta čestica. Coulombov faktor je (u nerelativističkoj aproksimaciji) funkcija oblika:

$$F(Z,E_e)=\frac{2\pi\eta}{1-e^{-2\pi\eta}}$$

gde je $\eta=\pm Ze^2/\hbar v$; v je brzina elektrona.
Pozitivni znak se koristi za elektrone, negativni za pozitrone. Procenite vrednost Coulombovog faktora za beta minus raspad jezgra $^{187}_{75}Re$, koje emituje elektrone maksimalne energije 2 keV.

G11 Za neko jezgro poznata je ft vrednost ($\log ft=3$). Konačno stanje raspada je 2^+. Odredite spin i parnost početnog (beta nestabilnog) stanja u polaznom jezgru.

G12 Tačan izraz za ft-vrednost kod beta raspada glasi:

$$f(Z,E_0)\,t_{1/2}=\frac{2\pi^3\ln 2\,\hbar^7}{m_0^5c^4g^2|M_{if}|^2}$$

Znajući da je za superdozvoljene prelaze $3<\log ft<4$ procenite (grubo) red veličine konstante slabe interakcije.

G13 Pokažite da je srednja kinetička energija beta čestica približno jednaka jednoj trećini maksimalne kinetičke energije ako je $T_{\max}\ll m_0c^2$.

G14 U tabeli je prikazano šest dozvoljenih elektronskih i pozitronskih raspada. Koristeći podatke iz tabele odredite koji prelazi su Fermijevog tipa, a koji Gamov Telerovog tipa.

PRELAZ	POČETNO STANJE	KRAJNJE STANJE
$^1n_0\rightarrow{}^1H_1$	1/2 +	1/2 +
$^3H\rightarrow{}^3He$	1/2 +	1/2 +
$^6He\rightarrow{}^6Li$	0 +	1 +
$^{14}O\rightarrow{}^{14}N$	0 +	0 +
$^{15}O\rightarrow{}^{15}N$	1/2 —	1/2 —
$^{17}F\rightarrow{}^{17}O$	5/2 +	5/2 +

G15 Magnetskim beta spektrometrom dobijene su »dve tačke« elektronskog spektra nepoznatog beta minus emitera:

$p_1=2\sqrt{2}\,m_0c$	$p_2=2\sqrt{12}\,m_0c$	(impulsi)
$N(p_1)=1152$	$N(p_2)=192$	(odbroji)

Koristeći dobijene vrednosti impulsa i odbroja elektrona ocenite pomoću Kurijevog dijagrama maksimalnu energiju beta spektra. (Pretpostavite da je Coulombov faktor jednak jedinici).

G16 U procesu elektronskog zahvata atomski elektron prodire u zapreminu jezgra i slabom interakcijom sa protonom formira neutron i neutrino. Elektronski zahvat je sličan (običnom) beta raspadu. Razlike su sledeće: emitovani neutrino ima strogo definisanu energiju (ako se zanemari mali uzmak jezgra); elektron je u vezanom stanju (atomski K, L itd elektron). Koristeći elementarnu (Fermijevu) teoriju beta raspada izračunati konstantu K zahvata (λ_k).

Napomena: Talasnu funkciju K-elektrona aproksimirati njenom amplitudom u centru jezgra

$$\psi_k(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{z^3}{a^3}}$$

gde je a Bohrov radijus. (Treba imati u vidu da postoje dva K elektrona).

G17 Eksperimentalno je određen relativni odnos verovatnoća za zahvat L i K elektrona u jezgru $^{36}_{17}Cl$

$$W(L)/W(K)=0{,}112\pm 0{,}008$$

Proceniti teorijski odnos verovatnoća za K i L zahvat pretpostavljajući da su elektronske talasne funkcije atoma hlora slične vodonikovim. (Zanemariti skrining efekt).

G18 U procesu beta raspada naelektrisanje jezgra se menja za $\pm e$. Ova promena naelektrisanja, praćena (vremenskom) promenom elektrostatičke interakcije može da dovede do ekscitacije ili jonizacije atoma konačnog jezgra. Naravno, pošto je brzina beta elektrona znatno veća od brzine atomskih elektrona možemo da smatramo da je hamiltonijan orbitalnih elektrona promenjen trenutno. Izračunati verovatnoću za ekscitaciju K elektrona u L ljusku uslovljenu beta raspadom (u najnižoj aproksimaciji). Radijalne talasne funkcije $1s$ i $2s$ elektrona u atomskom sistemu jedinica ($\hbar=m=e=1$) glase:

$$u_{1s}(r)=2Z^{3/2}e^{-Zr}$$

$$u_{2s}(r)=\left(\frac{Z}{2}\right)^{3/2}(2-Zr)\,e^{-\frac{Zr}{2}}$$

Pretpostavite da je redni broj jezgra $Z\gg 1$.

Napomena:

Zadatak treba rešiti metodom trenutne perturbacije. Neka je hamiltonijan sistema oblika:

$$\mathcal{H}=\begin{cases} H_<, & t<0 \quad \text{(atom } Z \text{ pre } \beta^- \text{ raspada)} \\ H_>, & t>\tau \quad \text{(atom } Z+1 \text{ posle } \beta^- \text{ raspada)} \end{cases}$$

τ vreme trajanja perturbacije (V)

$$V=\mathcal{H}-H_>$$

Pretpostavimo da je početno stanje $\psi(0)$ jedno od svojstvenih stanja $H_<$. Ako je $V\tau\ll 1$, talasna funkcija sistema nije se izmenila u prvoj aproksimaciji, tj. $\psi(t)\simeq\psi(0)$. Međutim $\psi(t)$ nije svojstvena funkcija hamiltonijana $H_>$. Ako $\psi(t)$ razvijemo po svojstvenim funkcijama ovog hamiltonijana ($\psi_{>k}$) imaćemo:

$$\psi(t)\simeq\psi(0)=\sum_k C_k\,\psi_{>k}$$

Svaki koeficijent C_k daje amplitudu verovatnoće da sistem posle perturbacije bude u nekom svojstvenom stanju hamiltonijana. $H_>$.

RG1 Energetski uslov za beta minus raspad izražen preko ajm glasi:

$$Q_{\beta-} = M_z - M_{z+1} - (B_{z+1} - B_z)$$

gde je B_z totalna vezivna energija atomskih elektrona. Ako pretpostavimo da je $B_{z+1} \simeq B_z$ tada je:

$$Q_{\beta-} \simeq M_z - M_{z+1} = 650 \text{ keV}$$

Za beta plus raspad imaćemo:

$$Q_{\beta+} = M_z - M_{z-1} + (B_{z-1} - B_z) - 2m \simeq M_z - M_{z-1} - 2m \simeq 750 \text{ keV}$$

Za K — zahvat imaćemo:

$$Q_k = M_z - M_{z-1} - B_z^k$$

Kako je $B_z^k < 2m$, Q_k je sigurno pozitivno ako je $Q_{\beta+}$ pozitivno. Dakle, sva tri raspada su energetski moguća.

RG2 Pretpostavićemo da je brzina uzmačnog jezgra mala, a energija mirovanja neutrina jednaka nuli. Tada zakon održanja impulsa i energije daju

$$0 = \vec{P}_b + \vec{P}_\nu$$

$$m_a c^2 = m_b c^2 + T_b + E_\nu$$

gde je T_b energija uzmaka jezgra hlora. Iz gornjih jednačina sledi

$$T_b = \frac{p_b^2}{2m_b} = \frac{p_\nu^2}{2m_b} = \frac{E_\nu^2}{2m_b c^2}$$

Rešavanjem drugog po redu izraza po E_ν dobićemo

$$E_\nu = m_b c^2 \left\{ \left[1 + 2\frac{m_a - m_b}{m_b} \right]^{1/2} - 1 \right\} \simeq 816 \text{ keV}$$

Energija uzmaka jezgra hlora jednaka je

$$T_b = \frac{E_\nu^2}{2m_b c^2} = 10 \text{ eV}$$

(U rešavanju ovog zadatka zanemarili smo energiju veze elektrona koji učestvuju u zahvatu)

RG3 Bilans energije za K-zahvat glasi (pogledati prethodni zadatak):

$$m_a c^2 = m_b c^2 + \frac{E_\nu^2}{2m_b c^2} + E_\nu + B_k$$

gde je indeksom a označeno početno, a indeksom b krajnje stanje jezgra. Ukupna energija oslobođena u K-zahvatu iznosi:

$$W = (m_a - m_b) c^2$$

Dakle:

$$(W - B_k) = \frac{E_\nu^2}{2m_b c^2} + E_\nu$$

tj.

$$E_\nu = m_b c^2 \left[\sqrt{1 + 2\frac{W - B_k}{m_b}} - 1 \right] \simeq W - B_k = 320 \text{ keV}$$

RG4 U K-zahvatu impuls jezgra ^7Li jednak je impulsu neutrina, a uzmak jezgra ^7Li iznosi $E_u = p_\nu^2 / 2m_b$.

Zakon održanja energije tvrdi:

$$m_a c^2 = m_b c^2 + E_u = c^2 \sqrt{m_\nu^2 + \frac{p_\nu^2}{c^2}} + B_k$$

pošto je u zadatku data Q-vrednost

$$Q = m_a c^2 - m_b c^2 - B_k$$

masa mirovanja neutrina iznosi:

$$m_\nu c^2 = \sqrt{Q^2 - 2m_b c^2 E_u - 2QE_u + E_\nu^2} = 3 \times 10^{-2} \text{ MeV}$$

Naravno, dobijeni rezultat je sumnjiv jer za precizno izračunavanje m_ν potrebno je poznavanje Q vrednosti i mase mirovanja ^7Li sa daleko većom tačnošću nego što su one date u zadatku.

RG5 Održanje momenta impulsa (spina) u ovom beta raspadu nudi dve vrednosti spina antineutrina 1/2 i 3/2

$$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^- + \tilde{\nu}$$

$$(0) = \underbrace{(1) + (1/2)}_{(1/2) + (1/2)} \qquad \underbrace{\qquad}_{(0)}$$

ili

$$(0) = \underbrace{(1) + (1/2)}_{(3/2) + (3/2)} \qquad \underbrace{\qquad}_{(0)}$$

Iz ovoga sledi da se spin antineutrina odavde ne može jednoznačno odrediti.

RG6 Presek za interakciju neutrina sa protonima jednak je

$$\sigma_\nu = \frac{R}{3600\, N_p \Phi \varepsilon_n \varepsilon_\beta} \simeq 10^{-43}\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-19}\ \mathrm{barn}$$

RG7 Ako je Q oslobođena energija u beta raspadu a R radijus jezgra, onda je

$$l = p\,R \simeq \frac{Q}{c} \times 1{,}2 \times A^{1/3} \times 10^{-13} \simeq 2 \times 10^{-29}\ \mathrm{erg \cdot s} \ll \hbar$$

(Q je tipično 1 MeV, $p = Q/c$ je gornja granica impulsa).
Najverovatnija je, dakle, vrednost $l=0$ i to su dozvoljeni prelazi. Vrednosti $l = 1, 2, \ldots$ su progresivno manje verovatne i to su jedanput, dvaput, itd. zabranjeni prelazi. Pošto svi leptoni imaju $s = 1/2$ znači da za dozvoljene prelaze totalni moment impulsa koji leptoni odnose, J, može biti: 0 ili 1. Prelazi sa $J=0$ su Fermijevi prelazi a sa $J=1$ Gamow-Telerovi. Shodno tome, moguća razlika spinova početnog i krajnjeg stanja u dozvoljenim prelazima može biti $\Delta I = 0, \pm 1$.

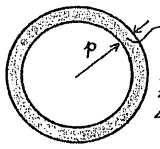
RG8 Neka se elektron nalazi u tački x, y, z i po impulsu u tački p_x, p_y, p_z impulsnog prostora. Iz relacije neodređenosti

$$\Delta x\, \Delta p_x \sim h, \quad \Delta y\, \Delta p_y \sim h, \quad \Delta_z\, \Delta p_z \sim h$$

tj.

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta p_x\, \Delta p_y\, \Delta p_z \sim h^3$$

sledi da je nemoguće tačno locirati česticu u jednoj tački faznog prostora, već, u najboljem slučaju, samo unutar »elementarne ćelije« faznog prostora dimenzija (zapremine) h^3. Neka je zapremina »običnog prostora« u kome se nalazi čestica jednaka V a zapremina impulsnog prostora $\Delta p_x\, \Delta p_y\, \Delta p_z$, tj. neka ima impuls p i neodređenost Δp koja je povezana sa prostornom neodređenošću V preko navedenih relacija neodređenosti. Tada je totalna zapremina fazne ćelije jednaka $4\pi p^2\, \Delta p V$ (za impulsni prostor videti sliku RG8.1) pa je broj mogućih »elementarnih stanja« u ovoj zapremini jednak:



RG8.1

$$dN = 4\pi p^2 V \frac{dp}{h^3}$$

i, shodno tome, broj stanja u zapremini V sa impulsom elektrona između p i $p+dp$ i impulsom neutrina između q i $q+dq$ postaje:

$$dN = \frac{4\pi V p^2\, dp}{h^3}\,\frac{4\pi V q^2\, dq}{h^3} = \frac{16\,\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6}\, p^2 q^2\, dp\, dq$$

q i dq iz ovog izraza eliminisaćemo polazeći od izraza:

$$E_0 - E_e = E_\nu = \sqrt{q^2 + \mu^2}$$

koji nam kaže da se totalna raspoloživa energija E_0 deli na elektron i neutrino (zanemarujući uzmak jezgra). Za konstantni impuls (energiju) elektrona imaćemo

$$dE_0 = dE_\nu = \frac{qdq}{\sqrt{q^2+\mu^2}} = \frac{qdq}{E_0 - E_e}$$

dakle:

$$dN = \frac{16\,\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6}\, p^2\, dp\, q\, (E_0 - E_e)\, dE_0$$

Kako je:

$$p^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad \text{i} \quad p^2\, dp = E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\, dE_e$$

tj.

$$dN = \frac{16\,\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - \mu_0^2}\, \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\, (E_0 - E_e)\, E_e\, dE_0\, dE_e$$

U izvođenju ovog izraza koristili smo jedinice u kojima je $c=1$. Ako, sada, uvedemo za energiju elektrona oznaku E ($E_e \to E$) i pređemo na jedinice u kojima je $c \neq 1$, statistički faktor dobija oblik:

$$\rho(E) \equiv \frac{d^2 N}{dE_0\, dE} = \frac{16\,\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar c)^6} \left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2} \left[E^2 - m_0^2 c^4\right]^{1/2} (E_0 - E)\, E.$$

Matrični element $\left| \int_V \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i\, dV \right|^2$ ima tačno određenu vrednost za dati raspad pa je $\rho(E)$ onaj član koji govori o opštem ponašanju beta spektra. Sam spektar je, dakle, predstavljen funkcijom:

$$y(E) = \mathrm{const} \left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2} \left[E^2 - m_0^2 c^4\right]^{1/2} (E_0 - E)\, E$$

Funkciju $y(E)$ treba ispitati u blizini (fizički mogućih) nula:

a) $E = m_0 c^2$ što predstavlja početak spektra i

b) $E = E_0 - \mu_0 c^2$ što predstavlja maksimalnu moguću energiju elektrona (kraj spektra), E_{max}.

Za $\mu_0 = 0$ biće $y = [E^2 - m_0^2 c^4]^{1/2} (E_0 - E)^2\, E$ sa maksimalnom energijom $E = E_0 = E_{max}$. Ponašanje spektra u blizini maksimalne energije dobijamo iz ispitivanja vrednosti izvoda funkcije $y(E)$ u tački $E = E_{max} = E_0$:

$$y(E_0) = 0, \quad y'(E_0) = 0, \quad y''(E_0) = 2\, E_0 \left(E_0^2 - m_0^2 c^4\right)^{1/2}$$

tj. u blizini E_{max} oblik je paraboličan i tangenta na spektralnu distribuciju u toj tački je horizontalna (videti sliku).

Za $\mu_0 \neq 0$ biće: $y(E = E_0 - \mu_0 c^2) = 0$, i

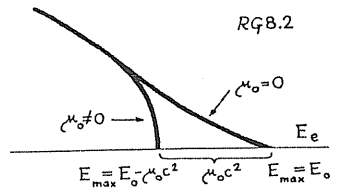
$$y'(E) = \frac{E(E_0 - E)\left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2} E}{\left(E^2 - m_0^2 c^4\right)^{1/2}} +$$

$$\Big(E^2 - m_0^2 c^4 \Big)^{1/2} (E_0 - E) \left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2} -$$

$$\left(E^2 - m_0^2 c^4\right)^{1/2} \left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2} E -$$

$$\left\{E \left(E^2 - m_0^2 c^4\right)^{1/2} (E_0 - E)^2\right\} /$$

$$\left\{\left[(E_0 - E)^2 - \mu_0^2 c^4\right]^{1/2}\right\} \Big|_{E \to E_0 - \mu_0 c^2} \to -\infty$$



RG8.2

tj. tangenta je u ovoj tački normalna (u tački $E_{max}=E_0—\mu_0c^2$). Iz ponašanja realnih beta spektara u blizini maksimalne energije, uz sadašnju eksperimentalnu tačnost postavljena je gornja granica za μ_0 od $\sim$60 eV. Koje su teškoće u ovome? (Mala statistika i malost μ_0).

RG9 Matrični element, dakle, postaje:

$$\mathfrak{M}_{if}=g\int_V V_p^*\,\psi_\beta^*\,\Phi_\nu U_n\,dV$$

talasnu funkciju neutrina pišemo u obliku Φ_ν (što odgovara apsorpciji neutrina) a ne kao $\Phi_{\bar\nu}^*$ (što bi odgovaralo realnoj situaciji emisije antineutrina) što je, uostalom, ekvivalentno i radi se iz čisto formalnih razloga. Neutrino ima zanemarljivo mali presek za interakciju sa drugim česticama i poljima i razumno je predstavljen ravnim talasom. Ova funkcija normirana je kao:

$$\int_V \Phi_\nu^*\Phi_\nu\,dV=1 \quad \text{tj.} \quad \Phi_\nu=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

Talasna funkcija elektrona morala bi da vodi računa o energiji Coulombove interakcije, no, za male je Z-ove ova energija manja od kinetičke pa se u zadovoljavajućoj aproksimaciji i ovde može koristiti ravan talas normiran na isti način kao i neutrinski:

$$\psi_\beta=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

Tako dobijamo:

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}g^2\left|\int_V V_p^*U_n e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}}\,dV\right|^2\frac{1}{V^2}\frac{dN}{dE_0}$$

Kako je $r\leqslant R_{\text{jezgra}}$ to je član $\frac{i}{\hbar}(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}$ približno reda veličine $\frac{1}{\hbar}R_{\text{jezgra}}\times\frac{Q}{c}\simeq 10^{-2}$ gde smo impuls procenili njegovom gornjom granicom uzimajući da je tipična energija raspada reda veličine 1 MeV. Tako možemo ravan talas razviti u stepeni red:

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{g^2}{V^2}\frac{dN}{dE_0}\left|\int_V \underbrace{V_p^*U_n}_{M}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}+\vec{q})\vec{r}\right]^n dV\right|^2$$

i zadržati se samo na prvom članu reda; što nam daje traženi izraz:

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}g^2|M|^2\frac{1}{V^2}\frac{dN}{dE_0}$$

U gustini konačnih stanja dN/dE_0 nađenoj u prethodnom zadatku razmatrali smo istu zapreminu V na koju su ovde normirane talasne funkcije odlazećih čestica tako da konačno imamo (uz pretpostavku da je $\mu_0=0$):

$$P(E)\,dE=\frac{2\pi}{\hbar}g^2|M|^2\frac{1}{V^2}\frac{16\pi^2V^2}{(2\pi\hbar c)^6}\left[E^2-m_0^2c^4\right]^{1/2}(E_0-E)^2\,E\,dE$$

$$=\frac{g^2}{2\pi^3\hbar^7c^6}|M|^2\left[E^2-m_0^2c^4\right]^{1/2}(E_0-E)^2\,E\,dE$$

Preko relacije: $E=(m^2c^4+p^2c^2)^{1/2}$ možemo ovaj izraz napisati u impulsnoj reprezentaciji:

$$P(E)\,dE=\frac{g^2}{2\pi^3\hbar^7c^6}|M|^2(m^2c^4+p^2c^2-m^2c^4)^{1/2}\left(\sqrt{m^2c^4+p_0^2c^2}-\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}\right)$$

$$\times(m^2c^4+p^2c^2)^{1/2}\frac{1}{2}\frac{2pc^2\,dp}{(m^2c^4+p^2c^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{g^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}|M|^2\left(\sqrt{m^2c^4+p_0^2c^2}-\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}\right)^2p^2\,dp$$

Konstanta raspada λ definiše se kao verovatnoća beta emisije u jedinici vremena svih energija, od 0 do E_0, tj.:

$$\lambda=\frac{g^2|M|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}\int_0^{p_0}\left[(m^2c^4+p_0^2c^2)^{1/2}-(m^2c^4+p^2c^2)^{1/2}\right]^2p^2\,dp$$

Uvedimo smenu $mc\eta=p$ i $mc\eta_0=p_0=p_{\max}$, pa dobijamo:

$$\lambda=\frac{g^2|M|^2c^4m^5}{2\pi^3\hbar^7}F(\eta_0)$$

sa:

$$F(\eta_0)=\int_0^{\eta_0}\left(\sqrt{1+\eta_0^2}-\sqrt{1+\eta^2}\right)\eta^2\,d\eta$$

Nađimo ovaj faktor:

$$F(\eta_0)=\frac{1}{3}(1+\eta_0^2)\,\eta_0^3+\frac{1}{3}\eta_0^3+\frac{1}{5}\eta_0^5-2(1+\eta_0^2)^{1/2}\int_0^{\eta_0}(1+\eta^2)^{1/2}\,\eta^2\,d\eta$$

$$-\frac{2}{3}\eta_0^3+\frac{8}{15}\eta_0^5-2(1+\eta_0^2)^{1/2}$$

$$\times\left\{\frac{1}{4}\eta_0(\eta_0^2+1)^{3/2}-\frac{1}{8}\eta_0(\eta_0^2+1)^{1/2}-\frac{1}{8}\ln\left[\eta_0+(\eta_0^2+1)^{1/2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{30}\eta_0^5-\frac{1}{12}\eta_0^3-\frac{1}{4}\eta_0+\frac{1}{4}(1+\eta_0^2)^{1/2}\ln\left[\eta_0+(1+\eta_0^2)^{1/2}\right].$$

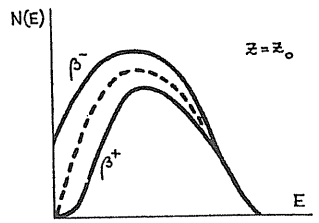
Konačno je:

$$\lambda=\frac{1}{\tau}=g^2\frac{c^4m^5}{2\pi^3\hbar^7}|M|^2F(\eta_0)$$

tj.:

$$\frac{1}{\tau}=\text{const}'\,g^2|M|^2F(\eta_0) \quad \text{ili} \quad F\tau=\frac{\text{const}}{|M|^2}$$

što je vrednost karakteristična za svaki raspad a koja se i eksperimentalno može odrediti. Sistematizacijom eksperimentalnih vrednosti ft (ili radije $\log ft$) opaženo je da se ove grupišu: odvojena je grupa tzv. superdozvoljenih prelaza (ogledalska jezgra) sa $\log ft=3$—3,5, dozvoljenih prelaza sa $\log ft=4$—6, itd. grupe zabranjenih prelaza, ne tako jasno izražene, sa sukcesivno rastućim vrednostima $\log ft$. Terminologija je jasna jer je prelaz dozvoljeniji, odnosno verovatniji u odnosu na druge prelaze sa manjim vrednostima matričnog elementa M, odnosno većim $\log ft$. Ovde obrađena elementarna teorija beta raspada najbolje radi baš za dozvoljene prelaze gde oblik spektra dobijen u prethodnom zadatku verno opisuje realnu situaciju (Kurijev dijagram je prava linija). Odstupanja se javljaju u niskoenergetskom delu spektra usled sekundarnog efekta: energija elektrona (pozitrona) influentirana je Coulombovom interakcijom sa naelektrisanjem jezgra. Ovo je uzeto u obzir preko faktora $F(Z, E)$ a spektri poprimaju oblik kao na slici.



RG9

RG10 Coulombov faktor za elektrone je:

$$F(Z, E)=\frac{2\pi\eta}{1-e^{-2\pi\eta}}$$

gde je $\eta=+\frac{Ze}{\hbar v}=\frac{Z}{137}\cdot\frac{1}{\beta}$ a kako je $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=m_0 c^2+T$

dobija se

$$\eta=\frac{Z}{137}\left(1-\frac{m_0 c^2}{T+m_0 c^2}\right)^{-1/2}=8{,}8$$

pošto je $\eta>1$ član $e^{-2\pi\eta}$ u izrazu za Coulombov faktor možemo da zanemarimo. Prema tome: $F(75{,}2\text{ keV})\simeq 2\pi\eta=55$.

RG11 Vrednost $\log ft=3$ odgovara superdozvoljenim prelazima za koje važe izborna pravila $\Delta\pi=0$; $L=0,\pm1$. Zaključujemo da je polazno stanje: 2^+ ili 1^+ ili 3^+.

RG12 Za superdozvoljene prelaze ft se kreće u granicama 10^3—10^4, a $|M_{if}|^2$ je reda veličine 1. Ako za ft uzmemo vrednost 5×10^3 imaćemo

$$g\sim\left(\frac{2\pi^3\ln 2\,\hbar^7}{5\times10^4 m_0^5 c^4}\right)^{1/2}\simeq 0{,}03\sqrt{\frac{(\hbar c)^7}{(m_0c^2)^5 c}}\simeq 10^{-43}\text{ MeV cm}^3=10^{-4}\text{ MeV fm}^3$$

RG13 Srednja energija beta čestica je

$$\langle T_\beta\rangle=\int_0^{T_{max}} TP(T)\,dT\Big/\int_0^{T_{max}} P(T)\,dT$$

gde je $P(T)$ gustina raspodele beta čestica po kinetičkoj energiji. Polazeći od izraza (videti zadatak G9):

$$P(E)=A\,[E^2-m_0^2c^4]^{1/2}(E_0-E)^2\,E$$

i imajući u vidu da je $T=E-m_0c^2$ i $T\ll m_0c^2$ lako se dobija da je

$$P(T)=B\sqrt{T}\,(T_{max}-T)^2$$

gde je B numerička konstanta. Dakle,

$$\langle T_\beta\rangle=\int_0^{T_{max}} T^{3/2}(T_{max}-T)^2\,dT\Big/\int_0^{T_{max}} T^{1/2}(T_{max}-T)^2\,dT=\frac{1}{3}T_{max}$$

RG14 Izborna pravila za dozvoljene beta minus i beta plus prelaze glase:

$\Delta J=0$,	$\Delta\pi=0$	prelazi Fermijevog tipa
$\Delta J=0,1\,(-1)$,	$\Delta\pi=0$	prelazi Gamow-Tellerovog tipa.

Dakle: prelaz ③ je Gamow-Tellerovog tipa, prelaz ④ je Fermijevog tipa. Svi ostali prelazi su dozvoljeni i jednim i drugim izbornim pravilima.

RG15 Kurijeov dijagram impulsne raspodele beta čestica ($N(p)$) i njihovog impulsa (p) je funkcija koja je linearna po energiji beta čestica, tj.

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2}}=K(E_0-E)$$

gde je K konstanta čija nam numerička vrednost za rešavanje ovog zadatka nije ni potrebna, a E_0 maksimalna energija beta spektra. Izvršimo transformaciju energije i uvedimo za impuls jedinicu mc. Tada je

$$p=\eta\,mc;\quad E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}=mc^2\sqrt{1+\eta^2}$$

a gornji izraz dobija oblik:

$$\sqrt{\frac{N(p)}{\eta^2}}=K(mc^2)\left\{E_0-mc^2\sqrt{1+\eta^2}\right\}$$

Uvedimo smenu promenljivih: $y=\sqrt{N(p)/\eta^2}$, $x=\sqrt{1+\eta^2}$

tada je

$$y=K\,m^3c^4(E_0/mc^2-x)=K'(E_0/mc^2-x)$$

kako je

$$K'=[y_2-y_1]/[x_2-x_1]$$

dobija se da maksimalna energija beta spektra E_0 iznosi:

$$E_0=mc^2\left\{x_1-y_1\,\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\right\}=7{,}76\,mc^2\simeq 4\text{ MeV}.$$

RG16 Konstantu K-zahvata naći ćemo polazeći od izraza:

$$\lambda=\frac{2\pi}{\hbar}|\mathcal{H}_{if}|^2\frac{dN}{dE_\nu}$$

gde statistički faktor $\frac{dN}{dE_\nu}$ odgovara gustini neutrinskih stanja

$$\frac{dN}{dE_\nu}=\frac{Vp_\nu^2\,dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3\,dE_\nu}$$

E_0-energija oslobođena u K-zahvatu upravo je jednaka energiji neutrina, dakle, $E_\nu=E_0$.
Ako zanemarimo masu mirovanja neutrina tada je

$$p_\nu=E_\nu/c \qquad \text{i} \qquad dp_\nu=\frac{1}{c}\,dE_\nu$$

Dakle:

$$\frac{dN}{dE_\nu}=\frac{VE_0^2}{(2\pi\hbar c)^3}$$

Ako konstantu slabe interakcije označimo sa g, a neutrinsku funkciju u najnižoj mogućoj aproksimaciji prikažemo konstantom: $\psi_\nu\sim 1/\sqrt{V}$ tada je

$$\mathcal{H}_{if}=g\int\psi_{fN}^*\psi_{iN}\psi_\nu\psi_e\,d\tau\simeq g\frac{1}{\sqrt{V}}\psi_e(0)\int\psi_{fN}^*\psi_{iN}\,d\tau'$$

$$=g\frac{1}{\sqrt{V}}\psi_e(0)\,M_{if}$$

gde su talasne funkcije jezgra sadržane u matričnom elementu M_{if}. Korišćenjem ovog izraza i izraza za statistički faktor dobijamo:

$$\lambda_K=\frac{4\pi}{\hbar}g^2|M_{if}|^2|\psi_e(0)|^2\frac{E_0^2}{(2\pi\hbar c)^3}$$

izraz smo pomnožili sa 2 zato što su u K-ljusci smeštena dva elektrona. Ako zamenimo vrednost amplitude elektronske funkcije dobićemo:

$$\lambda_K=\frac{4}{\hbar}\frac{g^2}{(2\pi\hbar c)^3}|M_{if}|^2\frac{z^3}{a^3}E_0^2.$$

RG17 Pretpostavimo da su energije oslobođene u K i L elektronskom zahvatu jednake međusobno. Odnos verovatnoća (konstanti) raspada (pošto su energetski faktori a i matrični elementi $|M_{if}|^2$ jednaki, pogledati prethodni zadatak) iznosi:

$$\frac{W(L)}{W(K)}=\frac{|\psi_{eL}(0)|^2}{|\psi_{eK}(0)|^2}=\left(\frac{z}{n_1}\right)^3\Big/\left(\frac{z}{n_2}\right)^3=\frac{n_2^3}{n_1^3}$$

gde su n_1 i n_2 glavni kvantni brojevi; $n_1=2$ (L-elektron), $n_2=1$ (K-elektron). Dakle, teorijska procena daje:

$$W(L)/W(K)=1/8=0{,}125.$$

RG18 Verovatnoća da sistem pređe iz K u L ljusku (prelaz $1s$ u $2s$) jednaka je $|C_{2s}|^2$ (Videti napomenu uz zadatak)

$$W_{1s-2s}=|C_{2s}|^2=|\langle U_{2s}^{z+1}(r)\,|\,U_{1s}^{z}(r)\rangle|^2$$

gde je $U_{1s}^z(r)$ radijalna talasna funkcija elektrona u početnom (beta nestabilnom) jezgru

$$U_{1s}^z(r)=2\,z^{3/2}\,e^{-zr}$$

a $U_{2s}^{z+1}(r)$ radijalna talasna funkcija u konačnom jezgru

$$U_{2s}^{z+1}(r)=\left(\frac{z+1}{2}\right)^{3/2}\{2-(z+1)r\}\,e^{-\frac{z+1}{2}r}$$

Dakle:

$$W_{1s-2s}=2^{-1}z^3(z+1)^3\left|2\int_0^\infty e^{-\left(\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)r}r^2\,dr\right.$$

$$\left.-(z+1)\int_0^\infty e^{-\left(\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)r}r^3\,dr\right|^2.$$

Dva integrala koja treba izračunati su tipa:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r}r^n\,dr=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

(gde je n ceo broj) tako da je integracija vrlo jednostavna. Posle integracije i sređivanja dobijamo:

$$W_{1s-2s}=\frac{2^{10}}{3^8}\frac{z^{3/2}(z+1)^{3/2}}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^4}$$

Ako uzmemo u obzir da je $z\gg 1$ i da u K ljusci ima dva $1s$ elektrona konačna verovatnoća za ekscitaciju atoma pri beta minus raspadu može se napisati u obliku:

$$W_{1s-2s}=8\left(\frac{2}{3}\right)^8\frac{1}{z^2}.$$

Glava H

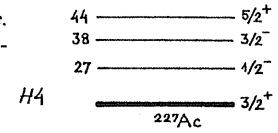
Gama raspad

H1 Jezgro $^{187}_{74}W$ emituje gama kvant od 1180 keV. Koliko je puta veća talasna dužina ovog gama kvanta od radijusa jezgra ^{187}W? Da li za ovaj prelaz važi dugotalasna aproksimacija?

H2 Poluživot nekog nuklearnog nivoa iznosi 0,06 ns. Ako je konverzioni koeficijent za prelaz sa ovog nivoa u osnovno stanje znatno manji od 1, i ako je energija prelaza manja od praga za formiranje elektronsko-pozitronskog para, proceniti radijacionu širinu pobuđenog nivoa.

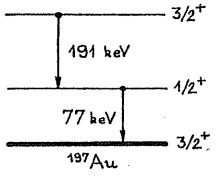
H3 Za neki prelaz sa energijom većom od $2\,m_e c^2$ poznata je ukupna radijaciona širina nivoa Γ, totalni konverzioni koeficijent α i parcijalna širina nivoa Γ_γ za emisiju gama kvanta. Pomoću ovih veličina izraziti verovatnoću za emisiju elektronsko-pozitronskog para.

H4 Na slici je prikazan deo šeme raspada $^{227}_{89}Ac$. Odrediti energije svih mogućih gama kvanata multipolnosti $E1$ i $E2$ i prikazati ih na šemi raspada.



H4

H5 Na slici je prikazan deo šeme raspada ^{197}Au.



H5

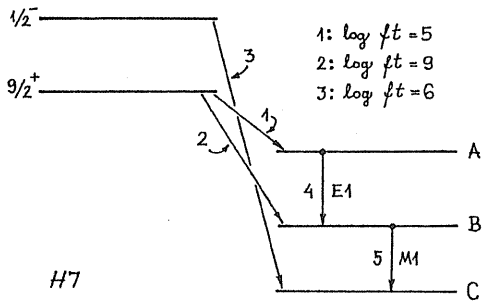
a) Koje su multipolnosti gama kvanata od 77 i 191 keV?

b) Odrediti procenat primese višeg multipola za prelaz od 191 keV, znajući izmerenu vrednost K konverzivnog koeficijenta za taj prelaz $(\alpha_k^{exp} = 0{,}9)$ kao i teorijske vrednosti K konverzionih koeficijenata za sledeće multipole

multipol	$E1$	$E2$	$E3$	$M1$	$M2$	$M3$
α_k^{teor}	0,08	0,22	0,59	1,15	5,40	18

H6 Koristeći zakone održanja energije i impulsa pokazati da slobodan foton ne može da kreira elektron i pozitron. Foton energije 2 MeV, u polju nekog jezgra kreira elektronsko-pozitronski par. Ako je brzina pozitrona 0,4 c, kolika je kinetička energija elektrona, ako se zanemari energija uzmaka jezgra.

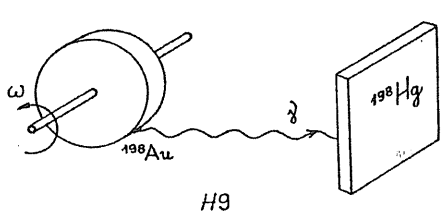
H7 Na slici je prikazan deo šeme raspada nekog izotopa. Na osnovu datih podataka i izbornih pravila za beta i gama raspad naći spinove i parnosti stanja *A*, *B* i *C*.



H7

H8 Foton energije $\hbar\omega$ koji emituje jezgro u miru nema energiju tačno jednaku energiji prelaza, pošto održanje impulsa u aktu emisije zahteva konačnu veličinu uzmaka jezgra. Pretpostaviti da se ekscitirano jezgro X^* (sa energijom ekscitacije E_1 u odnosu na osnovno stanje) koje se nalazi u izvoru gama kvanata, kreće brzinom v_1 u odnosu na laboratorijski sistem, a relativnom brzinom v_2 u odnosu na apsorber gama kvanata sačinjen od jezgara X u osnovnom stanju. Ako je radijaciona širina ekscitiranog nivoa Γ_1 prodiskutovati mogućnost za rezonantnu apsorpciju gama kvanata iz izvora u apsorberu.

H9 Na slici je prikazana aparatura koja je korišćena za rezonantnu apsorpciju gama kvanata. Izvor ^{198}Au bio je pričvršćen na disk radijusa R=30 cm. Jezgra izvora ^{198}Au beta minus raspadom prelaze u ekscitirana jezgra ^{198}Hg koja emituju gama kvante energije oko 411 keV. Odrediti ugaonu brzinu ω kojom treba obrtati disk pa da dođe do rezonantne apsorpcije gama zraka u apsorberu koji sadrži jezgra ^{198}Hg u osnovnom stanju.

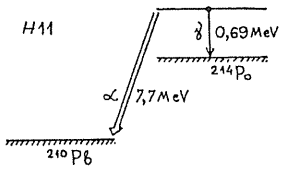


H9

H10 U elektromagnetskim prelazima tipa $2^+ \to 2^+$, koji se sreću kod parno-parnih jezgara osim $M1$ i $E2$ multipolnih gama kvanata primećeni su i tzv. električni monopolni prelazi $E0$. Pošto se u prelazima $E0$ tipa »odnosi« moment impulsa L=0 emisija fotona sa ovakvim momentom impulsa nije moguća ali je zato moguća

emisija orbitalnih elektrona (K, L, M) kojima se energija prelaza predaje direktnim procesima (bez učešća realnih fotona). Pretpostaviti da je za neki $2^+ \to 2^+$ prelaz precizno izmeren odnos ukupnog broja elektrona prema ukupnom broju gama kvanata koji se u prelazu emituju (α^*). (Ovaj broj nije totalni koeficijent interne konverzije zbog prisustva $E0$ elektrona). Ako su poznate veličine: odnos verovatnoće za emisiju $E2$ fotona prema verovatnoći za emisiju $M1$ fotona (δ^2), kao i konverzioni koeficijenti $\alpha_{tot}(M1)$ i $\alpha_{tot}(E2)$, izraziti preko njih odnos q^2 definisan kao broj $E0$ elektrona prema broju $M1$ elektrona koji se emituju u jedinici vremena.

H11 Ako se jezgra iz ekscitiranog stanja deekscitiraju ne samo emisijom gama kvanta već i emisijom alfa-čestice (videti na slici deo šeme raspada ^{214}Po), tada je iz faktora grananja (η) (relativnog odnosa intenziteta alfa i gama linije) i procene poluživota za alfa česticu moguće odrediti radijacioni period poluraspada. Kako?



H12 Na osnovu poznatih klasičnih izraza za intenzitet zračenja emitovanog od strane oscilujućeg električnog ($E1$) odnosno magnetnog ($M1$) dipola:

$$J_{E1}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\omega^4 \mathfrak{E}\, I_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\vartheta = \mathfrak{D}\frac{\mathfrak{E}\, I_0^2}{c^3 r^2}\sin^2\vartheta$$

$$J_{M1}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\omega^4 \mathfrak{M}\, I_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^5 r^2} \sin^2\vartheta = \mathfrak{D}\frac{\mathfrak{M}\, I_0^2}{c^5 r^2}\sin^2\vartheta$$

(tipične dipolne distribucije)

gde su $\mathfrak{E}I_0$ i $\mathfrak{M}I_0$ srednje vrednosti intenziteta vektora električnog odnosno magnetnog dipolnog momenta sistema naelektrisanja a ϑ ugao sa osom momenta (z-osom), proceniti red veličine odnosa totalnog intenziteta $[M1]/[E1]$. Kvalitativno argumentisati činjenicu da je emisija fotona sa totalnim momentom impulsa L= =2, 3, ... (kvadrupolno, oktupolno, ... zračenje) sukcesivno manje verovatna od dipolne emisije (bez obzira na tip). Na osnovu ovoga objasniti zašto su u atomskim prelazima najčešće emitovani fotoni $E1$ tipa dok su u nuklearnim elektromagnetnim deekscitacijama to fotoni $M1$ i/ili $E2$ tipa.

H13 Interakcija jezgra s poljem elektromagnetnog zračenja (odgovorna za gama raspad) opisuje se pomoću teorije perturbacija. Korišćenje teorije perturbacija opravdano je, pre svega, zahvaljujući »slabosti« elektromagnetne interakcije čija je konstanta interakcije jednaka konstanti fine strukture $\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137\right)$. Neperturbovani sistem sastoji se od jezgra i elektromagnetnog polja, dok perturbacija predstavlja interakciju jezgra i elektromagnetnog polja ($\hat{V}$). Polazeći od najnižeg reda vremenski zavisne teorije perturbacija izračunati verovatnoću za emisiju gama

kvanta impulsa $\hbar\vec{k}$ i polarizacije $\vec{e}$, u pravcu prostornog ugla $d\Omega_k$ oko vektora $\vec{k}$, ako u procesu emisije jezgro prelazi iz stanja $|\psi_i\rangle$ u stanje $|\psi_f\rangle$. Pretpostaviti da je elektromagnetno polje zatvoreno u zapreminu L^3 i da je nejgov skalarni potencijal $\Phi(\vec{r}, t)=0$. Pošto je gama-prelaz praćen promenom stanja polja, uobičajeno je da se operator elektromagnetskog polja (elektromagnetski potencijal A_μ) predstavlja u reprezentaciji druge kvantizacije, pomoću operatora kreacije i anihilacije fotona u različitim stanjima. U ovom zadatku stanje fotona numerisali smo sa $(\vec{k}, \vec{e})$. Operator elektromagnetskog polja, tada, glasi:

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3\omega}} \sum_k \{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}(a^+_{\vec{k},\vec{e}} + a^+_{\vec{k},\vec{e}'}) + cc\}$$

gde smo sa *cc* označili član koji sadrži anihilacione operatore, koji nas u slučaju emisije ne interesuje. Vektor $\vec{e}'$, koji smo upotrebili kao indeks polarizacije fotona, odnosi se na linearno nezavisnu polarizaciju polarizaciji $\vec{e}$.

Napomena:
O obliku nuklearne struje ne treba praviti nikakve pretpostavke. Označiti je jednostavno simbolom j_μ ($\mu=1, 2, 3, 4$).

H14 Foton *EL* tipa je foton koji ima moment impulsa L i parnost $(-1)^L$. Verovatnoća za emisiju (jednog) *EL* fotona u jedinici vremena, s talasnim vektorom $\vec{k}$ u prostorni ugao $d\Omega_k$, uz prelaz jezgra iz stanja a u stanje b izračunata u prvoj popravci vremenski zavisne teorije perturbacija (videti prethodni zadatak) glasi:

$$W_{ab} = \frac{k}{\hbar c^2}\left|\int \vec{j}_{ab}(r)\langle 1_{LM}|\hat{\vec{A}}|0\rangle d^3r\right|^2 \frac{d\Omega_k}{2\pi}$$

gde je $\vec{j}_{ab}$ matrični element nuklearne struje, $\hat{\vec{A}}$ operator elektromagnetskog polja a $|1_{LM}\rangle$ i $|0\rangle$ stanje elektromagnetnog polja sa jednim fotonom *EL* tipa i bez njega. (Indeks M se odnosi na projekciju momenta impulsa fotona duž nekog fizičkog pravca). Znajući vrednost matričnog elementa $\langle 1_{LM}|\hat{\vec{A}}|0\rangle$ u dugotalasnoj aproksimaciji ($kR \ll 1$):

$$\langle 1_{LM}|\hat{\vec{A}}|0\rangle = -\sqrt{2\pi}\,\frac{i^{L+1}}{k}\sqrt{\frac{(2L+1)(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}}\nabla(kr)^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi)$$

(ϑ je ugao definisan u odnosu na osu $\vec{z}$ koja se poklapa sa vektorom $\vec{k}$, $\vec{k}\cdot\vec{r}=kz$). Pokazati da verovatnoća za emisiju *EL* fotona može da se predstavi izrazom:

$$W_{ab} = \frac{8\pi(2L+1)(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\frac{k^{2L+1}}{\hbar}|\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle|^2 d\Omega_k$$

gde je $\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle$ tzv. multipolni matrični element *EL* tipa oblika

$$\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle = \int\langle b|\hat{\rho}(r)|a\rangle r^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d^3r.$$

Napomena:
Treba imati u vidu dve moguće polarizacije fotona *EL* tipa!

H15 Polazeći od izraza za matrični element koji figuriše u verovatnoćama *EL* gama prelaza

$$\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle = \int\langle b|\hat{\rho}(r)|a\rangle r^L Y_{LM}\,d^3r$$

naći oblik operatora $\hat{O}^E_{LM}$ pretpostavljajući da se jezgro sastoji od A tačkastih naelektrisanja. Protone i neutrone posmatrati ravnopravno, imajući jedino u vidu da je naelektrisanje neutrona jednako nuli.

H16 U preciznijoj teoriji električnih multipolnih prelaza uvodi se koncept efektivnih naelektrisanja nukleona. Takva modifikacija je naročito značajna za *E1* prelaze. Jednočestične talasne funkcije nukleona date su u odnosu na proizvoljni koordinatni sistem u kome su koordinate nukleona $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A$. Ovaj nesavršeni sistem koordinata može donekle da se izbegne korišćenjem multipolnog operatora definisanog u odnosu na centar mase jezgra. Odrediti efektivna naelektrisanja nukleona koja odgovaraju prelazu sistema $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A)$ na sistem centra mase u slučaju *E1* multipolnog operatora.

H17 Verovatnoća spontane emisije jednog fotona *EL* tipa, u ceo prostor, u jedinici vremena data je izrazom:

$$W(EL) = \frac{8\pi}{\hbar}\frac{L+1}{L}\frac{1}{[(2L+1)!!]^2}K^{2L+1}B(EL)$$

gde je $B(EL)$ tzv. redukovana verovatnoća gama prelaza definisana na sledeći način

$$B(EL) = \frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_i M_f \mu}|\langle I_f M_f|\,er^L Y_{L\mu}(\vartheta,\varphi)\,|I_i M_i\rangle|^2.$$

Sumiranje po indeksima M_i, M_f i μ ukazuje da se ne vodi računa o polarizaciji jezgra (koje pre emisije ima spin I_i i jednu od polarizacija M_i) niti o polarizaciji gama kvanta nastalog u aktu emisije. Redukovanu verovatnoću prelaza možemo da izračunamo jedino u okviru nekog modela jezgra. Tako se Weisskopfova procena redukovane verovatnoće zasniva na sledećim pretpostavkama:

— za gama-prelaz odgovoran je samo jedan nukleon koji je pre emisije bio u stanju sa momentom impulsa L a posle emisije u stanju s momentom impulsa 0;

— radijalne talasne funkcije nukleona konstantne su u oblasti jezgra a jednake nuli van njega.

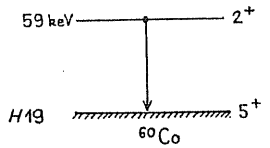
Označivši radijus jezgra sa R pokazati da Weisskopfova procena dovodi do sledeće vrednosti verovatnoće prelaza:

$$W_w(EL) = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\alpha\omega\left(\frac{e_{\text{eff}}}{e}\right)^2(kR)^{2L}\left(\frac{3}{3+L}\right)^2$$

gde su α konstanta fine strukture, ω energija prelaza, a e_{eff} vrednost efektivnog naelektrisanja nukleona.

H18 Koristeći definiciju redukovane verovatnoće prelaza naći odnos redukovane verovatnoće za ekscitaciju jezgra sa nivoa (1) na nivo (2) prema redukovanoj verovatnoći za deekscitaciju nivoa (2) na nivo (1). Koliko je puta manja redukovana verovatnoća za emisiju $E2$ fotona od 412 keV između stanja $2^+ \to 0^+$ u ^{198}Hg od verovatnoće za Kulonovu ekscitaciju istog nivoa?

H19 Izotop ^{60}Co ima jedan izomerni nivo od 59 keV sa periodom poluraspada $T_1/_2 = 10{,}5$ minuta. Totalni konverzioni koeficijent, procenjen za prelaz u osnovno stanje ^{60}Co iznosi 40. Koliki poluživot za nivo od 59 keV predviđa Weisskopfova procena?



H19

Napomena:

Za ML prelaze redukovana verovatnoća prelaza u Weisskopfovom modelu iznosi:

$$B(ML) = 10\left(\frac{\hbar}{mcR}\right)^2 B(EL).$$

H20 Ako u procesu gama emisije izborna pravila dozvoljavaju emisiju ML i $E(L+1)$ multipolne komponente gama zračenja i ako nema nekih specijalnih efekata nuklearne strukture, tada je ML komponenta zračenja znatno intenzivnija od $E(L+1)$ komponente. Dokazati ovo tvrđenje!

H21 Jezgro koje ima sferno simetričnu gustinu naelektrisanja u osnovnom stanju i svim pobuđenim stanjima ne može da emituje gama kvante EL tipa. Dokazati! (Oblik EL multipolnog matričnog elementa dat je u zadatku br. H14).

H22 Površina jezgra opisana je funkcijom $R(\vartheta, \varphi) = R_0(1+\beta Y_{20}(\vartheta, \varphi))$, gde je R_0 srednji kvadratni radijus jezgra, a beskonačno mala veličina prvog reda β, parametar kvadrupolne deformacije. Pretpostaviti da je naelektrisanje jezgra Ze ravnomerno raspoređeno po zapremini i dokazati da električni kvadrupolni operator do na β^2 ima oblik:

$$\hat{O}^E_{2M} = \text{const}\, R_0^2 \beta \delta_{M0}.$$

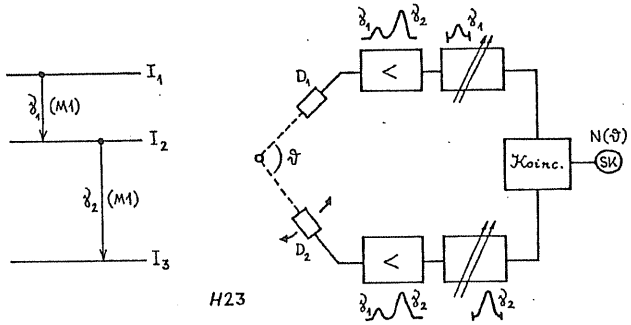
H23 Neka se jezgro nalazi u pobuđenom stanju sa spinom I_1 i deekscitira sukcesivnom kaskadnom emisijom dva gama kvanta $M1$ tipa (slika levo) energetske razlike veće od moći razlaganja raspoloživih detektora. Neka detektori D_1 i D_2 osama zaklapaju ugao ϑ. U kolu D_1 nalazi se jednokanalni analizator koji propušta samo impulse koji su rezultat registracije fotona γ_1 a u kolu D_2 analizator koji propušta samo liniju γ_2. Detektori su vezani u koincidentno kolo. Skaler, dakle, registruje impuls samo kada D_1 registruje γ_1 a D_2 registruje γ_2 unutar vremenskog intervala jednakog vremenu razlaganja koincidentnog kola. (Na slici desno šematski je prikazan uređaj za merenje ugaonih distribucija gama zraka). Ovim smo, znači, od svih jezgara koja se raspadaju u izvoru odabrali samo ona koja emituju fotone γ_1 i γ_2 pod uglom ϑ jedan u odnosu na drugi. Koincidentni odbroj N u funkciji ugla ϑ, $N(\vartheta)$, predstavlja takozvanu korelacionu funkciju date ugaone (angularne)

korelacije ovih dvaju γ-kvanata. Ako je poznato da ugaona distribucija dipolnog zračenja ima oblik:

$$\mathcal{T}^0_1(\vartheta) \propto 1 - P_2(\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{T}^{\pm 1}_1(\vartheta) \propto 1 + \frac{1}{2} P_2(\cos\vartheta)$$

gde gornji indeksi označavaju vrednosti projekcije totalnog momenta impulsa fotona na proizvoljnu z-osu u odnosu na koju je i definisan ugao ϑ a $P_2(\cos\vartheta)$ je drugi Legendreov polinom, naći konkretan oblik funkcije $N(\vartheta)$ za slučaj ugaone γ—γ korelacije merene na kaskadi tipa $0^+(M1)\,1^+(M1)\,0^+$. Odatle naći kolika



H23

je relativna razlika u koincidentnom odbroju na $\vartheta = 90$ i $180°$, takozvanu aniziotropiju. (Obratiti pažnju da foton koji se kreće u pravcu kvantizacione ose ne može da ima projekciju momenta impulsa jednaku nuli). Prodiskutovati kakva se vrsta informacija može izvući iz ovakvih merenja za razliku od čistih spektroskopskih merenja.

RH1 Talasna dužina gama kvanta iznosi:

$$\lambda^* = \frac{c}{\omega} = \frac{\hbar c}{E_\gamma} = 1{,}7 \times 10^{-11}\,\text{cm}$$

a poluprečnik volframovog jezgra R=6,9 fm, tako da je talasna dužina gama kvanta približno 25 puta veća od radijusa jezgra. Uslov za dugotalasnu aproksimaciju glasi: $kR \ll 1$. Kako je

$$kR = \frac{R}{\lambda^*} = 0{,}04$$

na emisiju gama kvanta je primenljiva dugotalasna aproksimacija.

RH2 Ukupna radijaciona širina nivoa jezgra koje se raspada gama raspadom (u širem smislu) (Γ) jednaka je sumi parcijalnih širina: za proces interne konverzije (Γ_c), za proces kreacije elektronsko-pozitronskog para (Γ_p) i za proces emisije fotona (Γ_γ), tj.

$$\Gamma = \Gamma_\gamma + \Gamma_c + \Gamma_p.$$

Kako je u zadatku pretpostavljeno da su Γ_c i Γ_p=0 dobija se da Γ iznosi:

$$\Gamma \simeq \Gamma_\gamma = \frac{\hbar \ln 2}{T_{1/2}} \simeq 7 \times 10^{-6}\,\text{eV}.$$

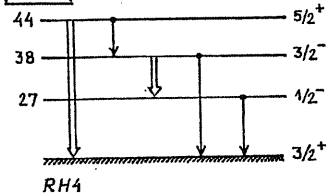
RH3 Verovatnoća raspada u jedinici vremena i širina nivoa povezani su relacijom $W = \Gamma/\hbar$. Prema tome, verovatnoća za emisiju para (W_p) iznosi:

$$W_p = \frac{\Gamma_p}{\hbar} = \frac{\Gamma - \Gamma_\gamma - \Gamma_c}{\hbar}$$

odnosno, kako je konverzioni koeficijent α, izražen preko širine nivoa, jednak $\alpha = \Gamma_c/\Gamma_\gamma$ za W_p se konačno dobija:

$$W_p = \frac{\Gamma - \Gamma_\gamma(1+\alpha)}{\hbar}.$$

RH4



RH4

Za emisiju $E1$ fotona održanje parnosti zahteva (pošto je parnost EL fotona $(-1)^L$) da se prelazi vrše samo između stanja različite parnosti. Mogući $E1$ prelazi energija 6, 27 i 38 keV prikazani su na slici ↓, dok su $E2$ fotoni (koji se emituju između nivoa iste parnosti) energija 9 i 44 keV označeni na slici simbolom ⇓.

RH5 a) Za oba prelaza promena spina iznosi $\Delta I = 1, 2$. Pošto u prelazima nema promene parnosti fotoni od 77 keV i 191 keV su mešanih multipolnosti $M1+E2$.
b) Ako sa δ označimo primesu $E2$ multipola imaćemo:

$$\alpha^{exp} = (1-\delta)\,\alpha^{teor}(M1) + \delta\alpha^{teor}(E2)$$

odnosno

$$\delta = 27\%.$$

RH6 Zakoni održanja impulsa i energije, za slobodan foton, koji se raspada na elektronsko-pozitronski par daju nam sledeće jednakosti:

$$\hbar\omega = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (\textit{energija})$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (\textit{impuls})$$

Ove dve jednakosti su u saglasnosti jedino ako su brzine pozitrona i elektrona jednake c, što je nemoguće budući da obe čestice imaju konačne mase mirovanja. Kako je u sistemu jedinica u kome je c=1 impuls pozitrona

$$P_{e^+} = \frac{m_e v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

zakon održanja energije (ako se zanemari energija uzmaka jezgra) daje:

$$\hbar\omega = \sqrt{P_{e^-}{}^2 + m_e{}^2} + \sqrt{\frac{(m_e v)^2}{1-v^2} + m_{e^+}^2};$$

ako od ove jednačine oduzmemo $m_{e^-} = m_{e^+} = m$ dobićemo:

$$\hbar\omega - m = T_{e^-} + \sqrt{\frac{(mv)^2}{1-v^2} + m^2}$$

Dakle, kinetička energija elektrona iznosi:

$$T_{e^-} = \hbar\omega - m\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0{,}931\ \text{MeV}.$$

RH7 Na osnovu izbornih pravila: za β raspad:

Tip prelaza	ΔI	$\Delta\pi$	*log ft*
superdozvoljen	0	ne	~3
dozvoljen	0, ±1 (ne 0→0)	ne	3—6
jednom zabranjen	0, ±1, ±2	da	6—10
dvaput zabranjen	2, ±3, (0→0)	ne	10—14

i za γ raspad:

$$|I_i - I_f| \leqslant L \leqslant I_i + I_f$$

$$\pi_i = \pi_f \pi_{zrač} \quad \text{sa} \quad \pi_{zrač} = \begin{cases} (-1)^L & \textit{za električni prelaz} \\ (-1)^{L+1} & \textit{za magnetni prelaz} \end{cases},$$

posle malo spekulisanja lako nalazimo (navedenim redosledom):

$$\pi_A = +, \quad \pi_B = -, \quad \pi_C = - \qquad \text{i}$$

$$I_B = 5/2, \quad I_C = 3/2, \quad I_A = 7/2.$$

RH8 Uslov za rezonantnu apsorpciju je da je promena energije γ-kvanta u odnosu na energiju prelaza (E_1), uslovljena kinematikom izvor-apsorber, i uzmacima jezgra emitera i apsorbera, manja ili jednaka od prirodne širine ekscitiranog stanja (Γ_1), tj.

$$\Delta E_\gamma \leqslant \Gamma_1.$$

Promena energije gama kvanta emitovanog iz izvora u odnosu na jezgro apsorbera jednaka je

$$\Delta E_\gamma = E_1 - E_\gamma = 2E_u - E_{doppler},$$

gde je E_u energija uzmaka jezgra, $E_u = \frac{p_\gamma^2}{2M_j} = \frac{E_\gamma^2}{2M_j c^2}$, a $E_{doppler}$ popravka frekvencije gama kvanta usled Dopplerovog efekta.
Ako je $(v_1+v_2)/c \ll 1$:

$$E_{doppler} = E_\gamma \frac{v_1+v_2}{c}$$

odnosno:

$$\Delta E_\gamma = E_\gamma \left[\frac{E_\gamma}{M_j c^2} - \frac{v_1+v_2}{c} \right].$$

Uslov za rezonantnu apsorpciju izražen preko relevantnih veličina glasi:

$$\Gamma \geqslant \left(\frac{E_\gamma}{M_j c^2} - \frac{v_1+v_2}{c} \right) E_\gamma;$$

iz ove nejednakosti vidimo da je uslov to bolje zadovoljen, što je energija gama prelaza manja. Uslov je sigurno zadovoljen ako je:

$$\text{a)} \quad \frac{E_\gamma}{M_j c^2} \sim \frac{v_1+v_2}{c}, \qquad \text{b)} \quad \frac{E_\gamma}{M_j c^2} \to 0 \text{ i } v_1 \text{ i } v_2 \ll c.$$

RH9 Relativno pomeranje izvora u odnosu na apsorber dovodi do Dopplerovog efekta koji povećava energiju gama kvanta (u sistemu izvor-apsorber) za iznos $E_\gamma v/c$ gde je v linijska brzina diska ($v = R\omega$). Pošto uzmak jezgara dovodi do smanjenja a Dopplerov efekat do povećanja učestanosti gama kvanata, maksimalnu apsorpciju dobićemo kada jednim efektom kompenzujemo drugi. Tj.

$$E_{doppler} = 2E_u; \qquad E_\gamma \frac{\omega R}{c} = 2 \frac{E_\gamma^2}{2M_j c^2}$$

Uslov za ugaonu brzinu je:

$$\omega = \frac{c}{R} \frac{E_\gamma}{M_j c^2} = 0{,}2 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

RH10 Polazeći od definicije veličine α^*, ako raščlanimo broj elektrona i broj gama kvanata na njihove multipolne komponente imaćemo:

$$\alpha^* = \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{N_e(E0) + N_e(M1) + N_e(E2)}{N_\gamma(M1) + N_\gamma(E2)}$$

ili uvođenjem oznaka:

$$\delta^2 = \frac{N_\gamma(E2)}{N_\gamma(M1)}, \qquad q^2 = \frac{N_e(E0)}{N_e(M1)}; \qquad \alpha^* = \frac{N_e(M1)\left[q^2 + 1 + \frac{N_e(E2)}{N_e(M1)}\right]}{N_\gamma(M1)(1+\delta^2)}.$$

Međutim odnos $\frac{N_e(M1)}{N_\gamma(M1)}$ predstavlja $M1$ konverzioni koeficijent $\alpha_{tot}(M1)$; a odnos $\frac{N_e(E2)}{N_e(M1)}$ možemo napisati na sledeći način:

$$\frac{N_e(E2)}{N_e(M1)} \cdot \frac{N_\gamma(M1)}{N_\gamma(M1)} \cdot \frac{N_\gamma(E2)}{N_\gamma(E2)} = \delta^2 \frac{\alpha_{tot}(E2)}{\alpha_{tot}(M1)}$$

tako da izraz za q^2 postaje:

$$q^2 = \frac{\alpha^*}{\alpha_{tot}(M1)}(1+\delta^2) - \frac{\alpha_{tot}(E2)}{\alpha_{tot}(M1)}\delta^2 - 1.$$

Ispravnost dobijenog izraza lako je proveriti: ako $N_e(E0) \to 0$ tada α^* mora da teži totalnom konverzionom koeficijentu, a za q^2 treba da se dobije nula.

RH11 Ako su izmereni intenziteti α i γ linije I_α i I_γ onda je faktor grananja η jednak:

$$\eta = \frac{I_\alpha}{I_\gamma} = \frac{T_{1/2\gamma}}{T_{1/2\alpha}}.$$

Period poluraspada za α raspad možemo da procenimo iz Geiger-Nuttalove formule

$$\ln T_{1/2} = A - B\frac{Z}{\sqrt{E}}.$$

Dakle, radijacioni poluživot ekscitiranog nivoa je:

$$T_{j/2\gamma} = \eta\, e^{A - BZ/\sqrt{E}}.$$

Naravno, tačnost ovog metoda zavisi od tačnosti Geiger-Nuttalove formule i najčešće može da nam dâ samo grubu procenu poluživota.

RH12 Ukupna energija emitovana u jedinici vremena (koja po usvojenoj korespondenciji u probabilističkoj interpretaciji odgovara emisiji određenog broja fotona datog totalnog momenta impulsa (ovde $L=1$) i energije u 4π u jedinici vremena) biće dakle:

$$[E\ 1]\equiv\left(\frac{dE}{dt}\right)_{E1}=\int J_{E1}(r,\vartheta,\varphi)\,dS=\mathcal{D}\frac{\mathfrak{E}\,1_0^2}{c^3}\int\frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta\,r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=\mathcal{D}'\mathfrak{E}\,1_0^2/c^3,$$

i slično za $M1$:

$$[M1]=\mathcal{D}'\mathfrak{M}\,1_0^2/c^5$$

tako da je traženi odnos:

$$\frac{[M1]}{[E1]}=\frac{1}{c^2}\frac{\mathfrak{M}\,1_0^2}{\mathfrak{E}\,1_0^2}.$$

(Isto smo mogli dobiti posmatranjem direktno datih izraza za distribuciju energije $J(r,\vartheta,\varphi)$ analogno kao gore shvaćenih, kao verovatnoće za emisiju fotona datog tipa pod datim uglom, tj. za nalaženje fotona datog tipa u infinitezimalnoj oblasti prostora oko tačke (r,ϑ,φ)).

Električni dipolni moment možemo razumno aproksimirati kao

$$\mathfrak{E}\,1_0\sim q\,R_{sistema}$$

a magnetni sa:

$$\mathfrak{M}\,1_0\sim i\cdot S=q\,v\pi\,R^2_{sistema}=\frac{1}{2}\,q\,\omega\,R^2_{sistema}=\frac{q}{2m}\,L=\frac{q}{2}\,vR_{sistema};$$

Tako da konačno imamo:

$$\frac{[M\ 1]}{[E\ 1]}\sim\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Odnos v/c procenimo iz relacija neodređenosti za koordinatu i impuls $\Delta p\,\Delta x\sim\hbar$ tj. ako je čestica ograničena na zapreminu linearnih dimenzija R_{sist} biće:

$$MvR_{sistema}\simeq\hbar\ \text{tj.}\ v\simeq\hbar/MR_{sist.}\ \text{odnosno}\ v/c\simeq\hbar/McR_{sist.}$$

ili, izraženo preko Comptonove talasne dužine naelektrisane čestice: $v/c\simeq\lambda_c^*/R_{sist.}$ tako da konačno imamo:

$$\frac{[M\ 1]}{[E\ 1]}\sim\left(\frac{v}{c}\right)^2=\left(\frac{\lambda_c^*}{R_{sist}}\right)^2=\left(\frac{\hbar}{M_c R_{sist}}\right)^2\simeq\begin{cases}10^{-5}\ \text{za atom}\\ 10^{-2}\ \text{za jezgro}\end{cases}$$

pod pretpostavkom da je i u jezgru samo jedan nukleon odgovoran za sve elektromagnetne pojave. Emisija električnog dipola je, dakle, mnogo verovatnija od emisije magnetnog dipola no, ipak za tri reda veličine manje u jezgru no u atomu.

Kao i u beta-raspadu (zadatak G.7) analogna ocena za orbitni moment impulsa koga odnosi foton daje vrednost koja je bliska nuli. No, sopstveni moment impulsa (spin) fotona jednak je jedinici te je i totalni moment impulsa koga će foton najverovatnije odneti jednak upravo jedinici — dipolno zračenje je najverovatnije. Svi viši momenti impulsa biće sukcesivno manje verovatni. (Da bi se vrednost izraza pR približila $\hbar$ potrebni su jako veliki impulsi, tj. da talasna dužina fotona bude što bliža radijusu sistema koji zrači. Tako vidimo da verovatnoća emisije viših multipola raste sa energijom).

Na osnovu ovih kvalitativnih procena vidimo da je u atomima daleko najintenzivniji (najverovatniji) tip zračenja $E1$. Po poznatim izbornim pravilima razlika spinova početnog i krajnjeg stanja jednaka je jedinici a parnost se ne menja. (Jasno je da u jednom prelazu ne možemo imati i $E1$ i $M1$ prelaz ako se parnost održava. Ovakve procene odnose se na prelaze koji su po svemu slični osim po promeni parnosti) U jezgru, pak, $M1$ prelazi za faktor ~100 su verovatniji no u atomima. Osim toga, uslovi za realizaciju $E1$ prelaza u jezgru su retki jer su ovi zabranjeni uglavnom održanjem parnosti; promena parnosti ne postoji ni u okviru jedne ljuske (shella) u modelu ljusaka, ni u okviru jedne familije u kolektivnim modelima. Na taj način $E2$ prelazi (simultano dozvoljeni sa $M1$) koji su sa jedne strane zbog većeg momenta impulsa fotona manje verovatni od dipolnih prelaza a sa druge, zbog električne prirode verovatniji od magnetnih prelaza, postaju po intenzitetu (verovatnoći) poredljivi sa $M1$ prelazima. Ovome doprinose i veliki električni kvadrupolni momenti kod deformisanih jezgara. $M2$ prelazi, u kompeticiji sa $E1$, nemaju nikakve šanse; oni su dvostruko malo verovatni, jednom zbog magnetne prirode i drugi put zbog velikog momenta impulsa.

RH13 Verovatnoća prelaza u jedinici vremena data je »zlatnim« izrazom:

$$W=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\hat{V}|\,i\,\rangle|^2\frac{dn}{dE}$$

gde je $\frac{dn}{dE}$ gustina konačnih stanja po jedinici energije. Foton zatvoren u zapreminu L^3 sadrži ukupno

$$dn=\frac{L^3d^3(\hbar k)}{(2\pi\hbar)^3}\quad\text{stanja},\quad d^3(\hbar k)=\hbar^3\,d\Omega_k\,k^2.$$

Kako je $\omega=kc$, a $dE=\hbar d\omega=\hbar c\,dk$, tražena gustina stanja jednaka je:

$$\frac{dn}{dE}=\frac{L^3}{(2\pi)^3}\frac{k^2}{\hbar c}d\Omega_k.$$

U izrazu za W, $|\,i\rangle$ i $|f\rangle$ su vektori koji opisuju stanje sistema jezgro + elektromagnetno polje pre i posle emisije

$$|\,i\rangle=|\,\psi_i\rangle|\,0\rangle,\quad|f\rangle=|\,\psi_f\rangle|\vec{k},\vec{e}\rangle;$$

$|\,\psi_i\rangle$ i $|\,\psi_f\rangle$ označavaju početno i krajnje stanje jezgra, a vektori $|\,0\rangle$ i $|\vec{k},\vec{e}\rangle$ stanje elektromagnetnog polja: vakuum, i prisustvo fotona impulsa $\vec{k}$ i polarizacije $\vec{e}$. Najopštiji (relativistički invarijantan) oblik interakcije elektromagnetnog polja i sistema naelektrisanja je oblika:

$$V=\int j_\mu A_\mu\,d^3r$$

gde je $\vec{A}_\mu$ četvorovektor potencijal $\vec{A}_\mu(\Phi,\vec{A})$ a j_μ četvorostruja

$$j_\mu(\rho,\vec{j}).$$

Pošto je u uslovima zadatka rečeno da je $\Phi=0$, operator energije interakcije postaje:

$$\hat{V} = -\frac{1}{c}\int \vec{\hat{j}}(\vec{r})\,\vec{\hat{A}}(\vec{r})\,d^3r$$

gde je $\vec{\hat{j}}(\vec{r})$ operator nuklearne struje.
Matrični element $\langle f|\hat{V}|i\rangle$ možemo sada napisati u obliku:

$$\langle f|\hat{V}|i\rangle = -\frac{1}{c}\int \langle\psi_f|\vec{\hat{j}}|\psi_i\rangle\,\langle \vec{k},\vec{e}|\vec{\hat{A}}|0\rangle\,d^3r.$$

Uvedimo (u daljem tekstu) oznaku

$$\langle\psi_f|\vec{\hat{j}}|\psi_i\rangle \equiv \vec{j}_{fi}$$

i iskoristimo osobinu kreacionih operatora

$$\langle \vec{k},\vec{e}|\,\hat{a}^{+}_{\vec{k}'\vec{e}'}|0\rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\vec{e}\vec{e}'}$$

tada je

$$\langle f|V|i\rangle = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{L^3\omega}}\int e^{-\vec{k}\vec{r}}\,\vec{e}\,\vec{j}_{fi}\,d^3r.$$

Verovatnoća za emisiju fotona $\vec{k},\vec{e}$ u jedinici vremena postaje:

$$W = \frac{1}{\hbar c^2}k\left|\vec{e}\int \vec{j}_{fi}(r)\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,d^3r\right|^2\frac{d\Omega_k}{2\pi}.$$

Zanimljivo je da izraz ispod znaka apsolutne vrednosti možemo da posmatramo kao Furijeov transform. Dakle, verovatnoća za emisiju fotona proporcionalna je kvadratu nuklearne struje (prelaza) u impulsnoj reprezentaciji.

RH14 Smenom matričnog elementa $\langle 1_{LM}|\vec{\hat{A}}|0\rangle$ u izraz za verovatnoću prelaza u jedinici vremena dobićemo:

$$W_{ab} = \frac{d\Omega_k}{2\pi\hbar c^2}k^{2L-1}\frac{(2L+1)(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\left|\int \vec{j}_{ab}(r)\,\vec{\nabla}\,(r^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi))\,d^3r\right|^2.$$

Da bismo uprostili matrični element iskoristimo relaciju iz vektorske analize

$$\int \varphi(\vec{r})\,\mathrm{div}\,\vec{a}(\vec{r})\,d^3r = -\int \vec{a}(\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})\,d^3r$$

koja važi ako na granicama integriranja $\varphi(\vec{r})\,div\,\vec{a}(\vec{r})\to 0$.
Zbog toga što je nuklearna struja smeštena u malu zapreminu prostora sigurni smo da $div\,\vec{j}_{ab}\to 0$;
Dakle:

$$\int \vec{j}_{ab}\nabla r^L Y_{LM}\,d^3r = -\int r^L Y_{LM}\,\nabla\vec{j}_{ab}\,d^3r.$$

Međutim, jednačina kontinuiteta daje nam, odmah, vrednost divergencije nuklearne struje:

$$\nabla\vec{j}_{ab}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial t}\langle b|\hat{\rho}(r)|a\rangle.$$

Naravno, razumno je pretpostaviti da je vremenska zavisnost matričnog elementa operatora gustine naelektrisanja uobičajena, tj.:

$$\langle b|\rho(r,t)|a\rangle = \langle b|\rho(r)|a\rangle\,e^{i(E_b-E_a)t/\hbar};$$

Dakle

$$\nabla\vec{j}_{ab}(\vec{r}) = \frac{i}{\hbar}(E_a-E_b)\,e^{-i(E_b-E_a)t/\hbar}\langle b|\hat{\rho}|a\rangle = ikc\,e^{-ikct/\hbar}\langle b|\hat{\rho}|a\rangle.$$

Smenom ovog izraza i sumiranjem po dve moguće polarizacije EL fotona dobićemo:

$$W_{ab} = \frac{d\Omega_k}{4}\frac{(L+1)}{L}\frac{(2L+1)}{[(2L+1)!!]^2}\frac{k^{2L+1}}{\hbar}\left|\int \rho_{ab}(r)\,r^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d^3r\right|^2$$

što je i trebalo dokazati.
Zanimljivo je da ova formula važi samo u koordinatnom sistemu u kome je osa z upravljena duž talasnog vektora $\vec{k}$.

RH15 Gustina naelektrisanja u tački prostora $\vec{r}$ koje potiče od tačkastih nukleona s koordinatama $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_A$ je:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{A} e_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

gde su e_i za $i=Z+1,\ Z+2,\ldots A$ jednaki nuli.
Sa gustine naelektrisanja na operator gustine naelektrisanja (u koordinatnoj reprezentaciji) prelazimo direktno. Neka su $\psi_a(\vec{r}_1,\vec{r}_2\ldots\vec{r}_A)$ i $\psi_b(\vec{r}_1,\vec{r}_2\ldots\vec{r}_A)$ talasna funkcija početnog i krajnjeg stanja jezgra, tada je:

$$\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle = \int d^3r\,\psi^*_b(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_A)\sum_{i=1}^{A} e_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\,\psi_a(\vec{r}_1,\vec{r}_2\cdots\vec{r}_A)$$
$$\times r^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d^3r_1\,d^3r_2\cdots d^3r_A$$

Ako izvršimo prvo integraciju po $\vec{r}$ (koristeći osobinu δ-funkcije) dobićemo:

$$\langle b|\hat{O}^E_{LM}|a\rangle = \int d^3r_1\,d^3r_2\cdots d^3r_A\,\psi^*_b(\vec{r}_1\cdots\vec{r}_A)\times\sum_{i=1}^{A} e_i r_i^L Y_{LM}(\vartheta_i\varphi_i)\,\psi_a(\vec{r}_1\cdots\vec{r}_A).$$

uz $\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r})d^3r = f(\vec{r}_0)$.

Zaključujemo da je električni multipolni operator u slučaju tačkastog jezgra oblika:

$$\hat{O}^E_{LM} = \sum_{i=1}^{A} e_i r_i^L Y_{LM}(\vartheta_i, \varphi_i).$$

RH16 Koordinata centra mase nukleona u koordinatnom sistemu $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A$ je

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A} \vec{r}_i;$$

koordinate nukleona u odnosu na sistem centra mase su

$$\vec{R}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} = \left(1 - \frac{1}{A}\right)\vec{r}_i - \frac{1}{A}\sum_{i\neq j} \vec{r}_i.$$

Operator za $E1$ prelaz u sistemu $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_A)$ glasi:

$$\sum_{i=1}^{A} e_i r_i Y_{1M}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{i=1}^{A} e_i (\vec{r}_i)_M = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} D_M$$

gde smo sa $(\vec{r}_i)_M$ označili sferne komponente vektora $\vec{r}_i$:

$$(\vec{r}_i)_0 = Z, \quad (\vec{r}_i)_{\pm 1} = \mp (1/\sqrt{2})(x \pm iy).$$

U sistemu centra mase veličina $\vec{D}$ (dipolni moment) prelazi u $\vec{D}'$

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^{A} e_i \vec{r}_i \to \vec{D}' = \sum_{i=1}^{A} e_i \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{A} e_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) = e\sum_{i=1}^{Z} r_i -$$

$$- \frac{eZ}{A}\sum_{i=1}^{A} \vec{r}_i = e\left(1 - \frac{Z}{A}\right)\sum_{i=1}^{Z} \vec{r}_i - \frac{eZ}{A}\sum_{i=Z+1}^{A} \vec{r}_i.$$

U izvođenju ovog izraza koristili smo činjenicu da je

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{za } i = 1, 2, \ldots, Z \\ 0 & \text{za } i = Z+1, \ldots, A. \end{cases}$$

Zaključujemo da su operatori $\vec{\mathbf{D}}$ i $\vec{\mathbf{D}}'$ formalno isti izuzev što su se promenila efektivna naelektrisanja. Tako operator $\vec{\mathbf{D}}'$ uvodi za naelektrisanje protona efektivnu veličinu

$$e_p^{eff} = e\left(1 - \frac{Z}{A}\right)$$

a za naelektrisanje neutrona veličinu

$$e_n^{eff} = -e\frac{Z}{A}.$$

Kako je kod težih jezgara $Z/A \simeq 0{,}4$ a kod lakih 0,5 vidimo da je

$$0{,}5\, e < e_p^{eff} < 0{,}6\, e \quad \text{i} \quad -0{,}5\, e < e_n^{eff} < -0{,}4\, e.$$

RH17 Kako su radijalne talasne funkcije nukleona konstantne u jezgru, a jednake nuli van njega, njihov eksplicitni oblik je lako naći iz uslova normiranja

$$|U|^2 \int_0^R r^2\, dr = 1.$$

Dakle, prostorni deo jednočestičnih funkcija nukleona (ne vodimo računa o njihovom spinskom delu) je:

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{3}{R^3}}\, Y_{LM_i}(\vartheta, \varphi)$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{R^3}} \quad (Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}).$$

Redukovana verovatnoća za ovakav (jednočestični prelaz) iznosi:

$$B(EL) = \frac{e_{eff}^2}{2L+1} \sum_{M=-L}^{+L} \sum_{\mu=-L}^{+L} |\langle f | r^L Y_{LM} | i \rangle|^2.$$

Međutim, kako je:

$$\langle f | r^L Y_{LM} | i \rangle = \frac{3}{R^3}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{(4\pi)} Y^*_{LM}(\vartheta, \varphi)\, Y_{L\mu}(\vartheta, \varphi)\, d\Omega \int_0^R r^{L+2}\, dr$$

$$= \frac{3}{L+3} R^L \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{M\mu}$$

dobijamo:

$$B(EL) = \frac{e_{eff}^2}{4\pi}\left(\frac{3R^L}{L+3}\right)^2 \sum_{M=-L}^{+L} \sum_{\mu=-L}^{+L} \delta_{M\mu} = \frac{e_{eff}^2}{4\pi}\left(\frac{3R^L}{L+3}\right)^2.$$

Verovatnoća prelaza data je izrazom:

$$W_W(EL) = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}(kR)^{2L}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2 e_{eff}^2 \frac{k}{\hbar}$$

ili ako uzmemo u obzir da je

$$e_{eff}^2 \frac{k}{\hbar} = e_{eff}^2 \frac{kc}{\hbar c} = e_{eff}^2 \alpha\omega$$

dobićemo izraz koji je i trebalo da dokažemo.

RH18 Redukovane verovatnoće za ekscitaciju i deekscitaciju razlikuju se jedino do na statistički faktor $1/(2J_i+1)$ gde je J_i spin početnog stanja, pošto je operator prelaza hermitski operator.
Dakle:

$$\frac{B_\downarrow(2 \to 1)}{B_\uparrow(1 \to 2)} = \frac{2I_1 + 1}{2I_2 + 1}.$$

Primenjujući ovaj rezultat na drugi deo zadatka zaključujemo da je redukovana verovatnoća za Kulonovu ekscitaciju 5 puta veća od redukovane verovatnoće za emisiju $E2$ fotona.

RH19 Foton od 59 keV je $M3$ tipa. Procena poluživota nivoa 2^+ iznosi:

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{(1+\alpha)\,W_W(M3)}$$

gde je W_W Weisskopfova verovatnoća za emisiju $M3$ fotona.
Kako je:

$$W_W(ML)=\frac{20\,(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2}\,\alpha c\left(\frac{\hbar c}{Mc^2}\right)^2 R^{2L-2}\left(\frac{E\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1}$$

dobijamo:

$$W_W(M3)=3{,}7\times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

što odgovara poluživotu od $T_{1/2}=4500$ s.
Bez obzira što Weisskopfova procena daje oko 7 puta duži poluživot od izmerenog, u slučaju ovog izomernog prelaza, možemo da smatramo da je slaganje vrlo dobro, imajući u vidu grubost Weisskopfove formule.

RH20 Odnos verovatnoće prelaza $E(L+1)$ prema ML komponenti multipolnog zračenja ocenićemo pomoću Weisskopfovog modela:

$$\frac{W[E(L+1)]}{W(ML)}\simeq\frac{1}{10}\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{McR}\right)^2}(kR)^2=\frac{R^4}{10}\frac{E_\gamma^2(mc^2)^2}{(\hbar c)^4}=1{,}3\times 10^{-4}A^{4/3}E_\gamma^2$$

gde je E_γ energija prelaza izražena u MeV.
Tako, na primer, ako je $A=200$ i $E_\gamma=1$ MeV:

$$\frac{W[E(L+1)]}{W(ML)}=0{,}15$$

Međutim, ako je $A=100$ a energija prelaza 100 keV:

$$\frac{W[E(L+1)]}{W(ML)}=6\times 10^{-4}!$$

RH21 EL multipolni matrični element dat je izrazom:

$$\langle b\,|\,\hat{O}^E_{LM}\,|\,a\rangle=\int\langle b\,|\,\hat{\rho}\,|\,a\rangle\,r^L\,Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d^3r$$

ako jezgro u početnom (a) i krajnjem (b) stanju ima sfernu simetriju, onda matrični element operatora gustine naelektrisanja $\langle b\,|\,\rho\,|\,a\rangle$ zavisi samo od r, a ne i od uglova ϑ, φ. Dakle:

$$\langle b\,|\,\hat{O}^E_{LM}\,|\,a\rangle=\int_0^\infty r^{L+2}\rho(r)\,dr\int_\Omega Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d\Omega$$

Međutim, zbog ortogonalnosti sfernih harmonika možemo da pišemo:

$$\int_\Omega Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\,d\Omega=\sqrt{4\pi}\int_\Omega Y_{00}\,Y_{LM}\,d\Omega\equiv 0;$$

Tako da je

$$\langle b\,|\,\hat{O}^E_{LM}\,|\,a\rangle\equiv 0$$

pa je i verovatnoća EL prelaza jednaka nuli, što je i trebalo dokazati.

RH22 Kao i u prethodnom zadatku, pođimo od izraza za matrični element $E2$ prelaza:

$$\langle b\,|\,O^E_{2M}\,|\,a\rangle=\int\langle b\,|\,\hat{\rho}\,|\,a\rangle\,r^2\,Y_{2M}(\vartheta,\varphi)\,d^3r.$$

Ako je naelektrisanje ravnomerno raspoređeno po zapremini, približno sfernog jezgra, gustina naelektrisanja takvog jezgra je:

$$\rho(r)=\frac{3eZ}{4\pi R_0^3}\,\theta(r)$$

gde je $\theta(r)$ Hevisajdova funkcija:

$$\theta(r)=\begin{cases}1 & 0<r\leqslant R(\vartheta,\varphi)\\ 0 & R(\vartheta,\varphi)<r<\infty.\end{cases}$$

Izvršimo u izrazu za matrični element prvo integraciju po $\vec{r}$, pretpostavljajući da je $\rho(r)$ operator naelektrisanja:

$$\langle b\,|\,\hat{O}^E_{2M}\,|\,a\rangle=\left\langle b\left|\int\rho(r)\,r^2\,Y_{2M}\,d^3r\right|a\right\rangle$$

Dakle:

$$\hat{O}^E_{2M}=\frac{3eZ}{4\pi R_0^3}\int\theta(r)\,r^2\,Y_{2M}(\vartheta,\varphi)\,d^3r=\frac{3eZ}{4\pi R_0^3}\int_\Omega d\Omega\,Y_{2M}(\vartheta,\varphi)\int_0^{R(\vartheta,\varphi)}dr\,r^4.$$

Radijalni integral prirodno je rastaviti na sledeća dva integrala:

$$\int_0^{R(\vartheta,\varphi)}r^4\,dr=\int_0^{R_0}r^4\,dr+\int_{R_0}^{R(\vartheta,\varphi)}r^4\,dr=\frac{1}{5}R_0^5(1+\beta\,Y_{20})^5\simeq\frac{1}{5}R_0^5(1+5\,\beta\,Y_{20}(\vartheta,\varphi)).$$

Izraz za operator $\hat{O}^E_{2M}$ postaje:

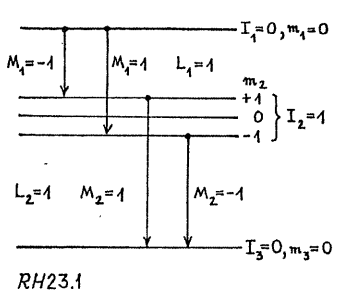
$$\hat{O}^E_{2M}=\frac{3eZR_0^2}{20\pi}\int_\Omega Y_{2M}(\vartheta,\varphi)\,[1+5\,\beta\,Y_{20}(\vartheta,\varphi)]\,d\Omega.$$

Iskoristivši ortogonalnost sfernih harmonika dobićemo:

$$\hat{O}^E_{2M}=\frac{3eZ}{4\pi}R_0^2\delta_{M0}\,\beta.$$

što je i trebalo dokazati!

RH23 Pogledajmo detaljno kaskadu o kojoj se radi (potrebne oznake uvedene su na slici). Zbog zakona održanja momenta impulsa biće $\vec{I}_1=\vec{I}_2+\vec{L}_1$ tj. za projekcije: $m_1=m_2+M_1$. Izaberemo li kvantizacionu osu duž ose detektora D_1 (na taj način je »materijalizujući«) tada su jedini mogući prelazi među magnetnim podstanjima prikazani na slici i svaki od njih ima svoju određenu ugaonu distribuciju. U uobičajenim eksperimentima gama-spektroskopije, međutim, nikad ne možemo meriti pojedinačno komponente prelaza sa različitim M već se uvek meri njihov zbir, cela linija, tj. ne opažamo pojedinačno distribucije $\mathcal{F}_L^M(\vartheta)$ već zbirnu distribuciju $\mathcal{F}_L(\vartheta)$. Ona će biti jednaka zbiru distribucija komponenti otežanih relativnim verovatnoćama prelaza preko odgovarajućih komponenti, tj.:



RH23.1

$$\mathcal{F}_{L1}(\vartheta) \propto \sum_{m_1 m_2} W(m_1 \to m_2)\, \mathcal{F}_{L_1}^{M_1}(\vartheta).$$
$$(\text{uz } m_1 = m_2 + M_1)$$

Apsolutna verovatnoća prelaza preko date komponente proporcionalna je kvadratu matričnog elementa odgovarajuće komponente tenzorske elektromagnetne interakcije (ireducibilni tenzor) koje se po Wigner-Eckartovoj teoremi raspada na dva člana; Clebsch-Gordanov koeficijent i redukovani matrični element koji više ne zavisi od magnetnih kvantnih brojeva:

Verovatnoća za emisiju fotona L_1M_1 $\quad \propto \langle I_2 m_2 \mid \hat{L}_1 M_1 \mid I_1 m_1\rangle^2 =$

$$= \langle I_2 m_2 L_1 M_1 \mid I_1 m_1\rangle^2 \langle I_2 \parallel \hat{L}_1 \parallel I_1\rangle^2.$$

Relativna verovatnoća emisije fotona sa datom projekcijom momenta impulsa proporcionalna je, dakle, sa:

$$W(m_1 \to m_2) \propto \langle I_2 m_2 L_1 M_1 \mid I_1 m_1\rangle^2.$$

No, pošto smo z-osu izabrali tako da se poklapa sa pravcem emisije (detekcije) γ_1 to će tražena korelaciona funkcija biti jednaka samoj distribuciji zračenja γ_2, tj. funkciji $\mathcal{F}_{L2}(\vartheta)$. Nađimo ovu distribuciju. Analogno ranijem, ona će biti jednaka zbiru distribucija M_2 komponenti otežanih relativnim verovatnoćama prelaza preko pojedinih komponenti i, dodatno, relativnim populacijama podstanja m_2, $P(m_2)$, tj.:

$$\mathcal{F}_{L_2}(\vartheta) = \sum_{m_2 m_3} P(m_2)\, W(m_2 \to m_3)\, \mathcal{F}_{L_2}^{M_2}(\vartheta)$$

Relativne populacije podstanja m_2, pak, nalazimo tako što saberemo verovatnoće svih $m_1 \to m_2$ prelaza realizovanih emisijom fotona γ_1 u pravcu detektora D_1 (duž z-ose), pravca za koji je $\vartheta=0$, tj.:

$$P(m_2) = \sum_{m_1 m_2} W(m_1 \to m_2)\, \mathcal{F}_{L_1}^{M_1}(\vartheta = 0).$$

Tako konačno imamo da je verovatnoća emisije fotona γ_2 pod uglom ϑ u odnosu na pravac emisije fotona γ_1, tj. tražena korelaciona funkcija $N(\vartheta)$, jednaka:

$$N(\vartheta) \equiv \mathcal{F}_{L_2}(\vartheta) = \sum_{m_1 m_2 m_3} W(m_1 \to m_2)\, W(m_2 \to m_3)\, \mathcal{F}_{L_1}^{M_1}(\vartheta = 0)\, \mathcal{F}_{L_2}^{M_2}(\vartheta)$$

$$= \sum_{m_1 m_2 m_3} \langle I_2 m_2 L_1 \pm 1 \mid I_1 m_1\rangle^2 \langle I_3 m_3 L_2 M_2 \mid I_2 m_2\rangle^2\, \mathcal{F}_{L_1}^{\pm 1}(0)\, \mathcal{F}_{L_2}^{M_2}(\vartheta),$$

gde smo iskoristili činjenicu da je $M_1 \neq 0$.

Za dati slučaj ova suma sadrži samo dva člana

$$N(\vartheta) = \langle 111 — 1 \mid 00\rangle^2 \langle 0011 \mid 11\rangle^2\, \mathcal{F}_1^{-1}(0)\, \mathcal{F}_1^1(\vartheta)$$

$$+ \langle 1 — 111 \mid 00\rangle^2 \langle 001 — 1 \mid 1 — 1\rangle^2\, \mathcal{F}_1^1(0)\, \mathcal{F}_1^{-1}(\vartheta).$$

Uz vrednosti C—G koeficijenata i Legendreovog polinoma:

$$\langle 111 - 1 \mid 00\rangle^2 = \frac{1}{3} \qquad P_2(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$\langle 0011 \mid 11\rangle^2 = \frac{1}{9} \qquad \mathcal{F}_1^{\pm 1}(\vartheta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\vartheta)$$

$$\langle 1 - 111 \mid 00\rangle^2 = \frac{1}{3}$$

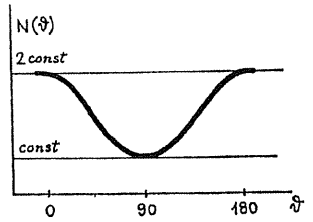
$$\langle 001 - 1 \mid 1 - 1\rangle = \frac{1}{9}$$

ovo konačno postaje:

$$N(\vartheta) = \text{const}\,(1 + \cos^2\vartheta).$$

Tražena anizotropija biće jednaka:

$$A = \frac{N(180°) - N(90°)}{N(90°)} = 100\%.$$



RH23.2

Jasno je da će za druge vrednosti spinova konstanta imati drugu vrednost tj. i sama korelacija izgledati drugačije. Na taj način merenje korelacione funkcije govori o spinovima stanja između kojih se prelazi u kaskadi vrše. Ovo je tačno i u slučaju drugih tipova zračenja (kvadrupolnih itd.) kada i ugaoni deo korelacione funkcije, jasno, izgleda drugačije.

Tako je korelaciona funkcija u opštem slučaju funkcija svih spinova stanja između kojih se prelazi vrše kao i multipolnosti između njih emitovanih fotona. Ako su sve ove veličine, osim jedne, poznate tada merenje korelacije u principu daje jednoznačno vrednost te nepoznate veličine.

U običnom spektroskopskom eksperimentu, međutim, fotoni sa različitim vrednostima totalnog momenta impulsa, različite multipolnosti, ni po čemu se ne razlikuju jedan od drugoga! Kada napusti jezgro foton »zaboravlja« mesto sa koga je emitovan! I samo u jednom ovakvom eksperimentu gde se statistički posmatra njihova distribucija u ansamblu identičnih sistema moguće je ovo opaziti.

Kada pojedinačni foton napusti matični sistem jedina informacija o momentima koju sobom nosi jeste vrednost projekcije sopstvenog momenta impulsa (spina) na pravac kretanja, tj. njegova polarizacija, spiralnost (helicitet). Običan detekcioni eksperiment, kao ni gore opisani korelacioni, ne osećaju ovu veličinu.

Glava I

Modeli jezgra

I1 Osnovna ideja modela ljusaka (shell-modela) sastoji se u zameni stvarnih nuklearnih sila u jezgru koje deluju na nukleon, nekim srednjim (fenomenološkim) poljem $V(r)$. Ako je srednje, samousaglašeno, polje predstavljeno potencijalom prostornog izotropnog harmonijskog oscilatora

$$V(r) = -V_0 + \frac{M}{2}\omega^2 r^2$$

gde su V_0 i ω fenomenološki parametri, odrediti magične brojeve za ovaj potencijal.

I2 U slučaju jezgra sa velikim masenim brojem A moguće je uspostaviti vezu između parametra $\hbar\omega$ srednjeg nuklearnog potencijala $\left(V(r) = \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 - V_0\right)$ i broja A u opštem obliku. Odrediti ovu vezu imajući u vidu da su u oscilatornoj jami srednja kinetička i srednja potencijalna energija nukleona, računate od dna jame, jednake međusobom.

I3 Napisati, eksplicitno, spinsko-uglovni deo talasne funkcije nukleona koji se nalazi u vezanom stanju $2d_{3/2}$ sa projekcijom spina $m=3/2$.

I4 Vezivna energija ^{16}O u osnovnom stanju iznosi $W=-130$ MeV. U slučaju lakih jezgara dobrom aproksimacijom srednjeg nuklearnog polja u oblasti jezgra smatra se potencijal:

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2$$

gde je V_0 dubina potencijala u centru jezgra, M masa nukleona, a $\hbar\omega = 13{,}2$ MeV. Koristeći ove podatke proceniti veličinu parametra V_0 za jezgro ^{16}O.

I5 Pokazati da su u beskonačnoj pravougloj potencijalnoj jami magični brojevi za protone (i neutrone) jednaki: 2, 8, 20, 34, 40, 58.
Nule (prvi i drugi koreni) sfernih Beselovih funkcija $j_l(x)$ date su u tablici

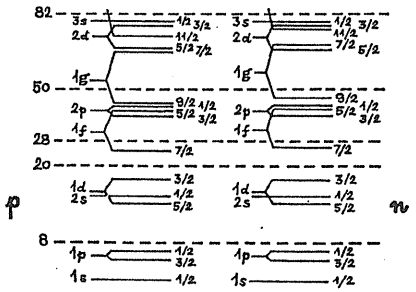
$j_l(x)$	j_0	j_1	j_2	j_3	j_4
PRVA NULA	π	4,49	5,76	6,99	8,18
DRUGA NULA	2π	5,76	9,09	10,42	11,71

I6 U okviru modela ljusaka odrediti spin osnovnog stanja jezgra ^{41}Ca, ako je poredak jednočestičnih energetskih nivoa:

$$1s-1p-1d-2s-1f-2p$$

I7 Pored centralnog polja $V(r)$ na nukleone dejstvuje i spinorbitalni potencijal $V_{sl}=-f(r)\,\vec{l}\cdot\vec{s}$, gde je $\vec{s}$ spin a $\vec{l}$ orbitalni moment impulsa nukleona. Za potencijal V_{sl} odgovorna je, najverovatnije, nukleon-nukleon interakcija. O funkciji $f(r)$ zna se jedino da je pretežno locirana na površini jezgra. Pretpostaviti da je $f(r)$ oblika $+\frac{A}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial r}$, pa u slučaju srednjeg polja tipa izotropnog harmonijskog oscilatora odrediti energetske nivoe nukleona.

I8 Slika prikazuje deo empirijske šeme jednočestičnih energetskih nivoa za neutrone i protone.



I8

Koristeći podatke sa slike odrediti (u okviru modela ljusaka) spinove i parnosti osnovnih stanja sledećih jezgara: $^{7}_{3}Li$, $^{9}_{4}Be$, $^{13}_{6}C$, $^{27}_{13}Al$, $^{53}_{25}Mn$ i $^{61}_{28}Ni$.

I9 Pretpostavljajući da su spin i magnetni moment jezgra jednaki totalnom momentu impulsa i magnetnom momentu nesparenog nukleona naći magnetne momente jezgara ^{7}Li, ^{13}C i ^{17}O. Pri nalaženju magnetnog momenta $\mu=gj$, odnosno žiromagnetnog odnosa g, čestice u (nlj) stanju-ljusci- koristiti vektorski model. Žiromagnetni odnosi protona i neutrona su: $g_{sp}=5{,}585$ i $g_{lp}=1$; $g_{sn}=-3{,}827$ i $g_{ln}=0$.

I10 Koristeći sledeću osobinu Klebš-Gordanovih koeficijenata

$$\langle j_1 j_2 J \mid m_1 m_2 M\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J}\langle j_2 j_1 J \mid m_2 m_1 M\rangle$$

pokazati, sa aspekta modela ljusaka, da parno jezgro sa dve nesparene čestice u ljusci (nlj) ne može da ima neparan ukupan spin J, ako između čestica postoji j—j veza.

I11 Odrediti moguće spinove jezgra za sledeće konfiguracije nesparenih nukleona iste vrste

$(nlj)^k$ $j=3/2, 5/2, 7/2$ a k-broj nesparenih nukleona $= 1, 2, 3$.

Pretpostaviti j—j spregu između nukleona.

I12 Prostija varijanta ujedinjenog modela jezgra je takozvani rotacioni model u kome se pretpostavlja da je oblik jezgra fiksiran. U ovom modelu osim rotacije jezgra kao celine uzimaju se u obzir i ekscitacije povezane s unutrašnjim stepenima slobode jezgra (jednočestične ekscitacije). Hamiltonijan jezgra možemo da napišemo u obliku:

$$H=H_0+H_R+H'$$

gde H_0 opisuje unutrašnje stepene slobode jezgra, H_r rotaciju jezgra a H' vezu između rotacionog i unutrašnjeg kretanja. U takozvanoj adijabatskoj aproksimaciji pretpostavlja se da je veličinu H' moguće zanemariti u odnosu na H_0 i H_r. Označimo sa $\vec{j}$ moment impulsa povezan sa unutrašnjim stepenima slobode a sa $\vec{R}$ moment impulsa rotacije jezgra kao celine. Ukupni spin jezgra je tada

$$\vec{I}=\vec{R}+\vec{j}.$$

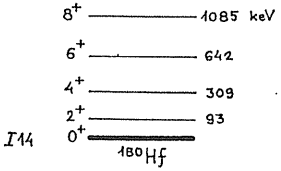
Pretpostavljajući da jezgro ima osnu simetriju (rotacioni elipsoid) koristeći adijabatsku aproksimaciju napisati hamiltonijan jezgra u ovom modelu.

I13 Hamiltonijan aksijalno simetričnog jezgra u ujedinjenom rotacionom modelu, ako se zanemari član proporcionalan $\vec{I}\cdot\vec{j}$ glasi:

$$H=H_0+\frac{\hbar^2}{2y}\cdot\hat{I}^2.$$

Napisati energetski spektar rotacionog niza (»banda«) izgrađenog nad fiksiranim unutrašnjim energetskim stanjem ε_0 (ε_0 je svojstvena vrednost hamiltonijana H_0 koji opisuje unutrašnje ekscitacije). Od kog karakterističnog kvantnog broja mora da zavisi veličina ε_0?

I14 Na slici je prikazana šema niskoležećih energetskih nivoa jezgra $^{180}_{72}Hf$. Pokazati da rotacioni model dobro opisuje sekvencu energetskih nivoa. Oceniti veličinu momenta inercije ovog jezgra.

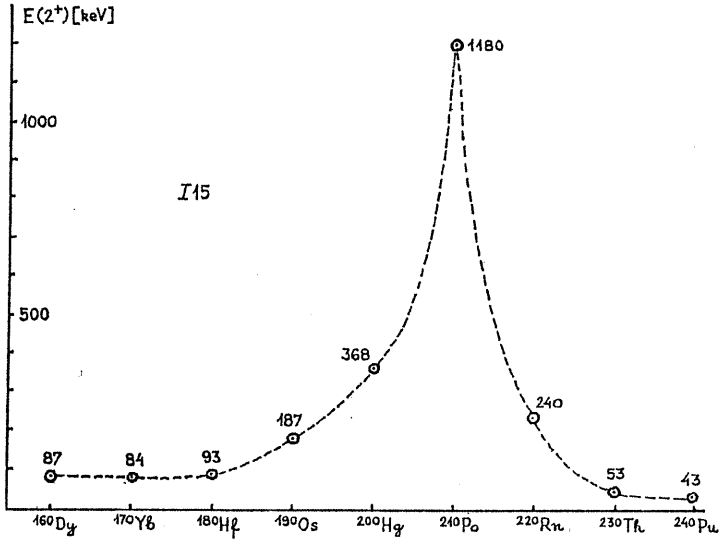


I14

I15 Pretpostaviti da se jezgro može shvatiti kao čvrsto telo oblika bliskog sfernom pa naći energije sekvence rotacionih pobuđenih stanja u jezgru ^{180}Hf. Eksperimentalne vrednosti energija, u funkciji spina stanja, su: (u keV)

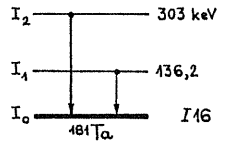
$$E(2)=93,\quad E(4)=309,\quad E(6)=642,\quad E(8)=1085$$

(pogledati prethodni zadatak). Prodiskutovati dobijeni rezultat. Eksperimentalne vrednosti energije prvog rotacionog stanja spina 2 u parno-parnim jezgrima (iza-



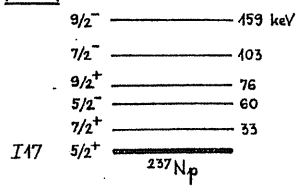
branim jezgrima sa $A=n\times 10$) prikazane su na slici. Uporediti ove vrednosti sa vrednostima nađenim prema gornjem modelu i prodiskutovati valjanost modela.

I16



U deformisanim jezgrima sa neparnim A takođe se sreću rotacioni energetski spektri. Na slici je prikazana šema rotacionih nivoa jezgra $^{181}_{73}Ta$. Pokazati da je samo iz odnosa energija E_1 i E_2 moguće odrediti spin osnovnog stanja jezgra ^{181}Ta, kao i spinove I_1 i I_2.

I17



Objasniti deo šeme nivoa jezgra ^{237}Np prikazan na slici. Poznato je da se jezgro ^{237}Np nalazi u oblasti jako deformisanih jezgara i da je osno simetrično.

I18 U klasičnoj mehanici energija i moment impulsa tela koje rotira određeni su poznatim izrazima:

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad \text{i} \quad L=J\omega$$

gde su: ω ugaona brzina, a J moment inercije. U kvantnoj mehanici L je kvantovano i jednako $\hbar\sqrt{I(I+1)}$. Ako se iz izraza za E i L eliminiše brzina dobija se dobro poznata formula za spektar rotatora:

$$E=\frac{\hbar^2}{2J}I(I+1).$$

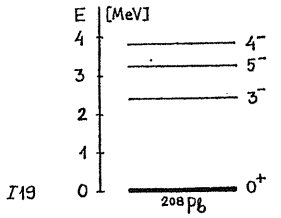
Možemo, međutim, da pretpostavimo da iz bilo kog razloga E i L sadrže i više stepene ω. Na primer:

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2+\alpha\omega^4, \qquad L=J\omega+\beta\omega^3$$

gde su α i β fenomenološki parametri.

Pretpostaviti da su $\alpha, \beta \ll J$. Iz uslova $\frac{dE}{dL}=\omega$ uspostaviti vezu između α i β. Zadržavajući se na članovima reda α^2 napisati energetski spektar jezgra predstavljenog ovakvim rotatorom.

I19 U dvostruko magičnom jezgru $^{208}_{82}Pb$ zadnja popunjena neutronska ljuska je $(3p_{1/2})$ a prva prazna $(2g_{9/2})$. Dopuštajući mogućnost interakcije čestica-rupa objasniti šemu energetskih nivoa jezgra $^{208}_{82}Pb$ prikazanu na slici.



I20 Elementarne ekscitacije površinskih oscilacija jezgra možemo da posmatramo kao kvazičestice — fonone. Ako su oscilacije kvadrupolnog tipa onda svaki fonon ima moment impulsa $L=2$ i pet projekcija na zadati fizički pravac.

U reprezentaciji druge kvantizacije definišimo sa $a^+_{2\mu}$ operator kreacije površinskih fonona, a sa

$$H=\left(a^+_{2\mu}a_{2\mu}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_2$$

hamiltonijan površinskih oscilacija jezgra. (Pošto su fononi Boze čestice $a_{2\mu}\,a^+_{2\nu}-a^+_{2\mu}a_{2\nu}=\delta_{\mu\nu}$).

Napisati talasne funkcije jezgra, kao i energetski spektar i spinska stanja ako su dozvoljene jednofononske i dvofononske ekscitacije površine jezgra kvadrupolnog tipa.

RI1 Energetski spektar za potencijal izotropnog oscilatora glasi:

$$E_N = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad N = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

tj. energetski nivoi zavise samo od glavnog kvantnog broja N. Za dato N kvantni brojevi momenta impulsa l zadovoljavaju uslov $l \leqslant N$, a pritom l imaju i istu parnost kao i N. (Na primer za $N=4$; $l=4,\ 2,\ 0$)
Za fiksirano N degeneracija energetskog nivoa E_N je (uzimajući u obzir i spin čestice):

$$D(N) = 2\sum_l (2l+1) = (N+1)(N+2).$$

Magični brojevi određuju maksimalan broj identičnih nukleona koji shodno Paulijevom principu mogu da se smeste u stanja sa glavnim kvantnim brojevima: $N=0$, $0+1$, $0+1+2$, itd.
Dakle, prvi magični broj je $D(0)=2$

drugi $D(0)+D(1)=8$

treći $D(0)+D(1)+D(2)=20$

četvrti $D(0)+D(1)+D(2)+D(3)=40$

itd.

RI2 Ako se jezgro nalazi u osnovnom stanju svi niskoležeći energetski nivoi oscilatora su zauzeti. Energija jezgra računata od dna jame iznosi:

$$E = \sum_i (T_i + V) = \sum_{k=0}^{N} 2D(k)\left(k + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

gde je $D(K)=(K+1)(K+2)$ degeneracija K-tog energetskog nivoa u oscilatornom potencijalu (pogledati prethodni zadatak). Faktor 2 u drugoj sumi potiče od činjenice da jamu treba »puniti« i protonima i neutronima. Međutim, kako je:

$$\langle T_i\rangle = \langle V\rangle = \frac{1}{2} M\omega^2 \langle r_i^2\rangle,$$

$$E = M\omega^2 \sum_i \langle r_i^2\rangle = 2\sum_{k=0}^{N} (k+1)(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega.$$

Sumu $\sum_i \langle r_i^2\rangle$ možemo da izrazimo preko srednjeg kvadratnog radijusa jezgra $\langle R^2\rangle$ koji je u slučaju homogenih raspodela masa jednak 3/5 kvadrata stvarnog radijusa. Dakle:

$$\sum_i \langle r_i^2\rangle = A\langle R^2\rangle = \frac{3}{5} A R_0^2 A^{2/3} \qquad (R_0 = 1{,}2 \text{ fermi}).$$

U rezultatu, se dobija:

$$\hbar\omega = \frac{5}{3}\frac{\hbar^2}{MR_0^2}\frac{1}{A^{5/3}}\sum_{k=0}^{N} 2(k+1)(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right).$$

Sa tačnog izraza možemo da pređemo na približan zamenjujući sumu integralom:

$$\sum_{k=0}^{N} 2(k+1)(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right) \simeq 2\int_0^N (k+1)(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)dk \simeq \frac{1}{2}N^4.$$

Međutim, kako je:

$$A = 2\sum_k (k+1)(k+2) \simeq 2\int_0^N (k+1)(k+2)\,dk \simeq \frac{2}{3}N^3$$

dobijamo vezu između N i A

$$N = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} A^{1/3}$$

odnosno:

$$\hbar\omega \simeq \frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{MR_0^2} A^{-1/3} = 41\,A^{-1/3}\text{ MeV}.$$

RI3 Spinsko-uglovni deo talasne funkcije nukleona ne zavisi od glavnog (radijalnog) kvantnog broja n. U opštem slučaju, za nukleon u stanju $(n\,l\,j\,m)$ dobićemo, uz pomoć Klebš- Gordanovih koeficijenata (videti dodatak), izraz:

$$|j\,m\rangle = \sum_{\substack{m_s, m_l \\ (m_s + m_l = m)}} \langle l\,2/3\,j \mid m_e\,m_s\,m\rangle\ Y_{lm_l}(\vartheta,\varphi)\,\chi_{m_s}$$

gde su sa m_s i m_l označeni »magnetni« kvantni brojevi unutrašnjeg spina i orbitalnog momenta impulsa nukleona a χ_{m_s} označuje dvokomponentnu spinsku funkciju

$$\chi_{m_s} = \begin{cases} \alpha & m_s = +1/2 \\ \beta & m_s = -1/2. \end{cases}$$

U, konkretnom, slučaju:

$$|d\,3/2\rangle = |3/2,\ 3/2\rangle = \langle 2\,1/2\ 3/2 \mid 1\,1/2\ 3/2\rangle\ Y_{11}(\vartheta,\varphi)\,\alpha +$$
$$+\langle 2\,1/2\ 3/2 \mid 2\ -1/2\ 3/2\rangle\ Y_{22}(\vartheta,\varphi)\,\beta$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} Y_{11}(\vartheta, \varphi)\,\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}} Y_{22}(\vartheta, \varphi)\,\beta$$

$$= \sqrt{\frac{3}{40\pi}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}\,\alpha + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\cos\vartheta\, e^{2i\varphi}\,\beta.$$

RI4 Vezivna energija jezgra iznosi:

$$W = \sum_i E_i D_i$$

gde su E_i svojstvene vrednosti energije hamiltonijana H

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 - V_0$$

a D_i degeneracije energetskih nivoa (sumiranje ide po svim nukleonima). Međutim, kako je:

$$E_i = \hbar\omega\left(N_i + \frac{3}{2}\right) - V_0$$

i

$$V_0 = \frac{-W + \hbar\omega \sum_i (N_i + 3/2)\cdot D_i}{A}$$

U stanju s $N_i=0$ nalazi se 4 nukleona (2 protona i 2 neutrona), a u stanju s $N_i=1$ nalaze se preostalih 12 nukleona (6 protona + 6 neutrona).
Dakle:

$$V_0 = \frac{130 + 13{,}2 \sum_i (N_i + 3/2) D_i}{16} = 37{,}5\ \text{MeV}.$$

RI5 Poznato je da je radijalni deo talasne funkcije čestice koja se kreće u beskonačnoj potencijalnoj jami opisan sfernom Beselovom funkcijom:

$$u(r) = j_l(kr)$$

gde je k talasni broj čestice.
Na zidovima jame talasna funkcija mora da bude jednaka nuli:

$$j_l(kR) = 0$$

(gde je R »širina« jame).
Iz ovog uslova jednoznačno se određuju svojstvene vrednosti energije čestica. Pri tom, prvom korenu jednačine odgovara glavni kvantni broj $n=1$, a drugom glavni kvantni broj $n=2$.
Koristeći tablicu korena funkcije $j_l(x)$, datu u zadatku, svojstvene vrednosti energije, opisane brojevima (n, l) možemo da poređamo u rastućem nizu na sledeći način:

$$E(n,l): 1s,\ 1p,\ 1d,\ 2s,\ 1f,\ 2p,\ 1g,\ 2d \text{ itd.}$$

Međutim, kako je svako energetsko stanje degenerisano $2(2l+1)$ puta, u svaku energetsku »ljusku« staje $2(2l+1)$ čestica, a ukupan broj čestica koji popunjava sve ljuske (energetska stanja) do neke nepopunjene ljuske jednak je:

$$\sum_{n,l} 2(2l+1) \qquad \text{(magičan broj)}.$$

Dakle, lako je pokazati da su magični brojevi za beskonačnu pravouglu jamu jednaki:

$$2,\ 8,\ 18,\ 20,\ 34,\ 40,\ 58,\ 68 \ldots \text{ itd.}$$

RI6 Jezgro ^{41}Ca ima magični broj protona (20) i jedan neutron izvan zadnje popunjene ljuske koja odgovara magičnom broju 20. Ovaj neutron, sledeći sekvencu energetskih nivoa, mora da se nalazi u stanju $1f$, tj.:

$$(1s)^2\,(1p)^6\,(1d)^{10}\,(2s)^2\,(1f)^1.$$

Ovaj zadnji, nespareni, nukleon određuje spin celog jezgra. Sigurno je da je njegov orbitalni moment impulsa $l=4$. Međutim, kako je unutrašnji spin neutrona $1/2$ ukupan moment nesparenog nukleona (tj. i jezgra ^{41}Ca) je ili $7/2$ ili $9/2$.

RI7 U slučaju potencijala izotropnog harmonijskog oscilatora, ne uzimajući u obzir potencijal V_{ls} energetski nivoi koje zaposedaju nukleoni su:

$$E_N = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega.$$

Potencijal V_{ls} dovodi do cepanja nivoa s datim l (koji više nije dobar kvantni broj) na dva nivoa sa ukupnim momentom impulsa $j = l \pm 1/2$. Veličinu cepanja nivoa određuje član (u prvoj popravci teorije perturbacije)

$$\varepsilon_{lj} = \langle Nlj \,|\, f(r)\,\vec{l}\cdot\vec{s} \,|\, Nlj\rangle = -AM\omega^2 \langle Nlj \,|\, \vec{l}\cdot\vec{s} \,|\, Nlj\rangle$$

gde je $|\, Nlj\rangle$ jednočestična talasna funkcija nukleona u kojoj su N i j dobri kvantni brojevi.

Operator $\vec{l}\cdot\vec{s}$ možemo da napišemo na sledeći način:

$$\vec{l}\cdot\vec{s} = \frac{j^2 - l^2 - s^2}{2}$$

Dakle:

$$\langle Nlj \,|\, \vec{l}\cdot\vec{s} \,|\, Nlj\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle Nlj \,|\, j^2 \,|\, Nlj\rangle - \langle Nlj \,|\, l^2 \,|\, Nlj\rangle - \langle Nlj \,|\, s^2 \,|\, Nlj\rangle\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} l & \text{ako je } j = l + 1/2 \\ -\dfrac{1}{2}(l+1) & \text{ako je } j = l - 1/2. \end{cases}$$

Energetski nivoi nukleona postaju dakle:

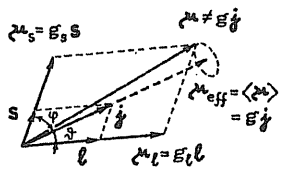
$$E_{N(lj)} = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2} AM\omega^2 \times \begin{cases} l & \text{za } j = l + 1/2 \\ -(l+1) & \text{za } j = l - 1/2. \end{cases}$$

Potencijal V_{ls} ima, dakle, dvojaku ulogu:
— snižava energetsku degeneraciju nivoa
— nivoe sa $j=l+1/2$ spušta niže nego nivoe sa $j=l-1/2$.

RI8 Saglasno modelu ljusaka paran broj nukleona obrazuje »kor« (»srce«) jezgra sa spinom nula, tako da je spin i parnost jezgra određena stanjem poslednjeg neparnog nukleona (u slučaju jezgra sa neparnim brojem nukleona). Inače »rupa« u popunjenoj podljusci ponaša se isto kao jedan nukleon u istoj podljusci.
Dakle:

		Spin	Parnost
^7Li	→ 3 protona: $(1s)^2 (1p_{3/2})^1$ →	3/2	—
^9Be	→ 5 neutrona: $(1s)^2 (1p_{3/2})^{-1}$ →	3/2	—
^{11}B	→ 5 protona: $(1s)^2 (1p_{3/2})^{-1}$ →	3/2	—
^{13}C	→ 7 neutrona: $(1s)^2(1p)^4(1p_{1/2})^1$ →	1/2	—
^{27}Al	→ 13 protona: $8+(1d_{5/2})^{-1}$ →	5/2	+
^{53}Mn	→ 25 protona: $20+(1f_{7/2})^5$ →	7/2	—
^{61}Ni	→ 33 neutrona: $20+8+(2p_{5/2})^5$ →	5/2	—

RI9 Međusobni odnosi momenata impulsa i magnetnih momenata čestice u stanju sa definisanim l i j, po shvatanju vektorskog modela, prikazani su na slici.



RI9

Zbog toga što $g_l \neq g_s$ $\vec{\mu}$ i $\vec{j}$ nisu paralelni. Interakcija orbitnog i spinskog momenta dovodi do precesije $\vec{\mu}$ oko $\vec{j}$ i efektivna (srednja) vrednost rezultujućeg magnetnog momenta $\vec{\mu}$ kolinearna je sa $\vec{j}$. Tako je, dakle:

$$\vec{\mu} = \langle\vec{\mu}\rangle = g\vec{j}$$

i dalje:

$$\mu = \mu_l \cos\vartheta + \mu_s \cos\varphi = g_l\, l \cos\vartheta + g_s\, s \cos\varphi.$$

Očigledno je:

$$s^2 = j^2 + l^2 - 2\vec{j}\cdot\vec{l} = j^2 + l^2 - 2\,j\,l\cos\vartheta$$

i

$$l^2 = j^2 + s^2 - 2\,j\,s\cos\varphi$$

a odavde:

$$\cos\vartheta = \frac{j^2 + l^2 - s^2}{2\,jl} \quad \text{i} \quad \cos\varphi = \frac{j^2 + s^2 - l^2}{2\,js}.$$

Tako je:

$$\mu = g_l\, l\frac{j^2 + l^2 - s^2}{2jl} + g_s\, s\frac{j^2 + s^2 - l^2}{2js}$$

$$= \left\{\frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_s - g_l}{2}\,\frac{s^2 - l^2}{j^2}\right\} j \equiv gj$$

odnosno:

$$g = \frac{g_l + g_s}{2} + \frac{g_s - g_l}{2}\,\frac{s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)}.$$

Kako je $s=1/2$ i $j=l\pm 1/2$ konačno nalazimo:

$$g = g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l+1} \quad \text{za} \quad j = l \pm 1/2.$$

Koristeći se šemom jednočestičnih stanja modela ljusaka iz zadatka I8 lako nalazimo da:
— u jezgru ^7Li jedan nespareni proton u $1p_{3/2}$ stanju sa $j=l+1/2=3/2$ daje magnetni moment:

$$\mu(^7Li) = \left\{g_{lp} + \frac{g_{sp} - g_{lp}}{2l+1}\right\} j \simeq 3\,\mu_N$$

— u jezgru ^{13}C jedan nespareni neutron u $1p_{1/2}$ stanju sa $j=l-1/2=1/2$ daje magnetni moment:

$$\mu(^{13}C) = \left\{g_{ln} - \frac{g_{sn} - g_{ln}}{2l+1}\right\} j \simeq 0{,}63\,\mu_N$$

— u jezgru ^{17}O jedan nespareni neutron u $1d_{5/2}$ stanju sa $j=l+1/2=5/2$ daje magnetni moment:

$$\mu(^{17}O) = \left\{g_{ln} + \frac{g_{sn} - g_{ln}}{2l+1}\right\} j = \frac{g_{sn}}{2} = \mu_n = -1{,}91\,\mu_N.$$

Ovo su čuvene Schmidtove vrednosti koje se za ova jezgra veoma dobro slažu sa eksperimentalnim vrednostima. Sva odstupanja u odnosu na ove jednočestične vrednosti ispravljaju se korišćenjem takozvanih efektivnih žiromagnetnih odnosa.

RI10 Dve nesparene čestice u ljusci $(n\,l\,j)$ određuju, sa aspekta modela ljusaka, ukupan spin J jezgra. Ako sa $\varphi_{jm}(1)$ i $\varphi_{jM-m}(2)$ označimo talasne funkcije nesparenih nukleona u ovoj ljusci, čestice moraju da se kombinuju na sledeći način da bi dale moment impulsa jezgra (JM):

$$|JM\rangle = \sum_m \langle jjJ \mid m\ M-m\ M\rangle\, \varphi_{jm}(1)\varphi_{jM-m}(2).$$

Ukupna funkcija dve čestice mora da bude antisimetrična u odnosu na izmenu čestica kako bi bio zadovoljen Paulijev princip. Ako se zamene mesta čestice (1) i (2) funkcija $|JM\rangle$ postaje:

$$|JM\rangle' = \sum_m \langle jjM \mid m\ M-m\ M\rangle\, \varphi_{jm}(2)\,\varphi_{jM-m}(1).$$

Ako promenimo indeks sumiranja uvodeći $\mu=M-m$ imaćemo:

$$|JM\rangle' = \sum_{\mu}\langle jjJ|M-\mu\ \mu M\rangle\,\varphi_{j\mu}(1)\,\varphi_{jM-\mu}(2).$$

Iskoristimo osobinu Klebš-Gordanovih koeficijenata citiranu u zadatku:

$$|JM\rangle' = (-1)^{2j-J}\sum_{\mu}\langle jjJ|\mu\ M-\mu\ M\rangle\,\varphi_{j\mu}(1)\,\varphi_{jM-\mu}(2) = (-1)^{2j-J}|JM\rangle.$$

Kako je j poluceo broj: $(-1)^{2j-J}=(-1)^{J+1}$.
Dakle, dvočestična funkcija zadovoljava Paulijev princip ako i samo ako je J paran broj, što je i trebalo pokazati.

RI11 Ako se samo jedan nukleon nalazi u ljuskama $(nl\ 3/2)$, $(nl\ 5/2)$, $(nl\ 7/2)$ spinovi jezgara su $J=3/2,\ 5/2,\ 7/2$.
Ako se dva nukleona nalaze u ljusci $(n\,l\,j)$ spin jezgra leži u granicama $0<J<2j$ isključujući neparne brojeve (pogledati prethodni zadatak).
Dakle:

ljuska: $(n\,l\,3/2)^2$: $J=0,2$

$(n\,l\,5/2)^2$: $J=0,\ 2,\ 4$

$(n\,l\,7/2)^2$: $J=0,\ 2,\ 4,\ 6.$

U ljusku $(n\,l\,3/2)$ ne mogu da »stanu« tri nesparena nukleona, dok ljuska $(n\,l\,5/2)^3$ može da dâ sledeće spinove jezgra: 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2,

a ljuska $(n\,l\,7/2)^3$: 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, 13/2, 15/2.

Očekujemo da neki od ovih polucelih spinova, koji odgovaraju konfiguracijama od tri nesparene čestice, nije moguć zbog Paulijevog principa.

RI12 U adijabatskoj aproksimaciji je: $H=H_0+H_R$.
Hamiltonijan koji opisuje rotaciju jezgra je oblika:

$$H_R=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_3}R_3^2+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_2}R_2^2+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_1}R_1^2$$

gde su $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ i $\mathcal{J}_3$ momenti inercije jezgra u odnosu na glavne ose inercije jezgra. Neka je osa aksijalne simetrije osa 3. Tada je:

$$\mathcal{J}_2=\mathcal{J}_1=\mathcal{J}.$$

Dakle:

$$H_R=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}(R_1^2+R_2^2)+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_3}R_3^2\equiv\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}R^2+\hbar^2\left(\frac{1}{2\mathcal{J}_3}-\frac{1}{2\mathcal{J}}\right)R_3^2.$$

Međutim, kako je

$$\vec{R}=\vec{I}-\vec{j}$$

i

$$R_3=I_3-j_3=0$$

(u slučaju aksijalno simetričnog jezgra) biće:

$$H_R=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}[I^2+j^2-2\vec{I}\cdot\vec{j}].$$

Dakle, ukupni hamiltonijan je oblika:

$$H=H_0+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}j^2+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}I^2-\frac{\hbar^2}{\mathcal{J}}\vec{I}\cdot\vec{j}.$$

Prvi i drugi član opisuju unutrašnje stepene slobode jezgra.

RI13 Ako energiju računamo u odnosu na energiju unutrašnje ekscitacije ε_0 energetski spektar glasi:

$$E(I)=\varepsilon_0+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}I(I+1).$$

Ako jezgro ima aksijalnu simetriju onda takvu simetriju mora da ima i unutrašnje polje, tj. projekcija unutrašnjeg momenta impulsa $\vec{j}$ na tu osu, opisana operatorom j_3, mora da bude konstanta kretanja, a njen kvantni broj Ω dobar kvantni broj.
Dakle ε_0 mora da bude neka funkcija Ω. Prema tome:

$$E(I,\Omega)=\varepsilon_0(\Omega)+\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}I(I+1).$$

Kako su kod aksijalnih jezgara projekcije j_3 i I_3 jednake među sobom

$$K=\Omega$$

gde je K kvantni broj projekcije I_3.

RI14 U slučaju parno-parnih jezgara najniža je rotaciona serija $K=0^+$ kojoj odgovara sekvencija spinova $I=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,$ koju srećemo kod ^{180}Hf. Označimo sa $E(I)$ energiju računatu u odnosu na osnovno stanje. Rotacioni model zahteva

$$E(I)=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}I(I+1)$$

odnosno sledeće pravilo energetskih intervala

$$E(2):E(4):E(6):E(8)=1:3{,}33:7:12.$$

U slučaju ^{180}Hf pravilo intervala se dobro slaže sa predviđanjem rotacionog modela (1 : 3,28 : 6,85 : 11,5).
Moment inercije jezgra iznosi:

$$\mathcal{J}=\frac{3\hbar^2}{E(2)}=2{,}3\times10^{-54}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

RI15 Moment inercije čvrstog sferoidalnog tela oko glavne ose biće svakako blizak vrednosti za sferu (eventualne deformacije su male), tj.:

$$\mathcal{J} \simeq \frac{2}{5} mR^2 \simeq \frac{2}{5} m_p A R^2 = 9{,}6 \times 10^{-51} A^{5/3} \text{ g cm}^2.$$

Rotacione ekscitacije ovakvog jezgra imaće energije:

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} I(I+1) \simeq 36 \frac{I(I+1)}{A^{5/3}} \text{ MeV}.$$

Za jezgro sa $A=180$ biće, dakle:

$$E(\text{I}) = 6{,}3 \times 10^{-3} I(I+1) \text{ MeV}$$

pa je: (u keV):

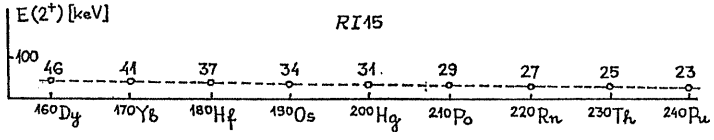
$$E(2)=38,\ E(4)=125,\ E(6)=263,\ E(8)=451.$$

Sva su stanja, dakle, za faktor ~2,5 niža od eksperimentalnih vrednosti dok je njihov relativni položaj, jasno (prema rezultatu prethodnog zadatka), dobar. Razlog ovom neslaganju očito je prirodno tražiti u lošoj proceni momenta inercije sistema (nađena vrednost za $\mathcal{J}$ se, uostalom, ~2,5 puta i razlikuje od vrednosti nađene u prethodnom zadatku). Jezgro se, znači, ne može shvatiti kao čvrsto telo u kome se nukleoni nalaze u ravnotežnim položajima na fiksnim relativnim rastojanjima. Manji moment inercije koji nam je potreban da bismo rotacioni model, koji nam izgleda plauzibilan jer dobro opisuje relativne položaje stanja, uspešno primenili, možemo dobiti pretpostavljajući da nuklearna materija pre ima osobine gasa ili tečnosti no čvrstog tela.

U skladu sa gore dobijenim izrazom vidimo da bi energije rotacionih stanja istih spinova u funkciji A, trebalo da se ponašaju približno kao $A^{-5/3}$. Specijalno, za stanje spina 2 je:

$$E(2) = 216/A^{5/3} \text{ MeV}.$$

Vrednosti ovog izraza za zadate A-ove prikazane su na slici.



Vidimo da je opšti tok funkcije zadovoljavajući i da je svuda niža za približno isti iznos od eksperimentalne (jednako loša pretpostavka o čvrstoći jezgra). Izuzetak čini široka oblast jezgara bliskih dvostruko magičnom olovu 208. Što smo bliži zatvorenim ljuskama to je naš jednostavni model sve lošiji. Moment inercije, dakle, ovde na komplikovan način zavisi od detalja konkretne nuklearne strukture i pri razmatranju ovakvih kolektivnih ekscitacija prosta aproksimacija jezgra telom bez unutrašnjih stepeni slobode nije dobra za jezgra kod kojih ne postoji veliki broj nukleona van zatvorenih ljusaka.

RI16 Rotacioni energetski spektar za neparno jezgro je oblika:

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} [I(I+1) - K(K+1)]; \quad K = I_0.$$

Dakle:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E(I_0+2)}{E(I_0+1)} = 2 + \frac{1}{I_0+1}$$

odnosno:

$$I_0 = \frac{1}{\frac{E_2}{E_1} - 2} - 1 = 3{,}45 \simeq 7/2.$$

Ostali spinovi su:

$$I_1 = 9/2, \quad I_2 = 11/2.$$

RI17 Energetski nivoi različite parnosti moraju da pripadaju različitim unutrašnjim ekscitacijama jezgra Np.

Interval energija stanja pozitivnih parnosti:

$$\frac{E_{9/2+}}{E_{7/2+}} = 2{,}23 \quad \left(2 + \frac{1}{\frac{5}{2}+1} = 2{,}28\right)$$

upućuje nas (pogledati prethodni zadatak) da nivoi $5/2^+$, $7/2^+$, $9/2^+$ čine jednu rotacionu seriju.

Slično je i sa nivoima negativne parnosti:

$$\frac{E_{9/2-}}{E_{7/2-}} = \frac{159-60}{103-60} = 2{,}30 \left(2 + \frac{1}{\frac{5}{2}+1} = 2{,}28\right).$$

Dakle, nivoi sa spinovima $5/2^-$, $7/2^-$, $9/2^-$ čine drugu rotacionu seriju.

RI18 Uslov $dE/dp = \omega$ daje sledeću vezu između parametara α i β:

$$\beta = \frac{4}{3}\alpha.$$

Dakle:

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^4 + \alpha\omega^4$$

$$L = \mathcal{J}\omega + \frac{4}{3}\alpha\omega^3.$$

Iz druge jednačine dobijamo:

$$\omega = \frac{L}{\mathcal{J}} - \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\mathcal{J}}\omega^3.$$

Smenom u prvu jednačinu imaćemo do na α^3:

$$E=\frac{1}{2\mathcal{J}}L^2\left(1-\frac{2}{3}\alpha\frac{L^2}{\mathcal{J}^3}+\frac{16}{9}\alpha^2\frac{L^4}{\mathcal{J}^6}\right).$$

Uvedemo li oznaku:

$$x=\frac{2}{3}\alpha\frac{L^2}{\mathcal{J}^3}=\frac{2}{3}\alpha\frac{\hbar^2 I(I+1)}{\mathcal{J}^3}$$

Izraz za energetski spektar postaje:

$$E=\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}I(I+1)\{1-x+4x^2\}.$$

Ako je $\alpha=0$ ili ako je $\alpha\neq 0$ a x vrlo malo dobija se poznata formula za rotacioni spektar osno-simetričnih jezgara.

RI19 U modelu ljusaka osnovno stanje jezgra odgovara sistemu neinteragujućih nukleona koji popunjavaju diskretna energetska stanja srednjeg polja od njegovog dna do Fermijeve granice. Osnovno stanje jezgra $^{208}_{82}Pb$, koje ima i magičan broj protona i magičan broj neutrona (sve čestice sparene) je 0^+ kao što je to i eksperimentalno utvrđeno.

Najprostija jednočestična ekscitacija magičnog jezgra dobija se prebacivanjem jednog nukleona iz pune u slobodnu ljusku. (Neutron iz $(3p_{1/2})$ u $(2g_{9/2})$). Iznad Fermijeve granice obrazuje se, dakle, čestica; ispod : rupa. Zbog različite parnosti ove dve ljuske parnost ekscitiranih stanja takvog tipa je negativna.

Moment impulsa ekscitiranog stanja dobijamo sumiranjem momenta impulsa čestice i rupe (dopuštajući interakciju između njih). U slučaju j—j interakcije moguća su dva momenta impulsa

$$\vec{1/2}+\vec{9/2}=\begin{cases}5\\4\end{cases}.$$

Dakle, ekscitacije 5^- i 4^- su ekscitacije tipa čestica-rupa. Stanje 3^- nije ovakvog tipa. Možemo da kažemo da ono predstavlja neku kolektivnu ekscitaciju.

RI20 Prvo ekscitirano stanje jezgra dobija se jednofononskom ekscitacijom. Talasna funkcija (u reprezentaciji druge kvantizacije) glasi:

$$|1\rangle=a^+_{2\mu}|0\rangle.$$

Spin jezgra je 2, a energiju dobijamo rešavanjem »svojstvenog problema«:

$$H|1\rangle=\hbar\omega_2\left(a^+_{2\mu}a_{2\mu}+\frac{1}{2}\right)|1\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega_2|1\rangle+\hbar\omega_2 a^+_{2\mu}a_{2\mu}a^+_{2\mu}|0\rangle.$$

Međutim, kako je:

$$a_{2\mu}a^+_{2\mu}=1+a^+_{2\mu}a_{2\mu}\quad\text{i}\quad a_{2\mu}|0\rangle=0.$$

imaćemo:

$$a^+_{2\mu}a_{2\mu}a^+_{2\mu}|0\rangle=a^+_{2\mu}|0\rangle+a^+_{2\mu}a^+_{2\mu}a_{2\mu}|0\rangle=a^+_{2\mu}|0\rangle=|1\rangle$$

odnosno:

$$H|1\rangle=\frac{3}{2}\hbar\omega_2|1\rangle.$$

Dakle, energija jednofononskog stanja iznosi: $\frac{3}{2}\hbar\omega_2$.

Drugo ekscitirano stanje jezgra prikazano je funkcijom

$$|2\rangle=a^+_{2\mu}a^+_{2\nu}|0\rangle$$

i ima energiju $\frac{5}{2}\hbar\omega_2$.

Ova funkcija nema definisan moment impulsa (spin jezgra). Međutim linearnom kombinacijom lako je napraviti takve funkcije:

$$|\Lambda M\rangle=\sum_{\mu\mu'}\langle 22\,\Lambda\,|\,\mu\mu'\,M\rangle\,a^+_{2\mu}a^+_{2\mu'}|0\rangle$$

koje imaju istu svojstvenu vrednost energije ali definisane momente impulsa Λ u granicama od 0 do 4 ($0\leqslant\Lambda\leqslant 2+2$). Međutim, funkcije ΛM moraju da budu simetrične na izmenu fonona. Tj.: $|\Lambda M\rangle'=|\Lambda M\rangle$;

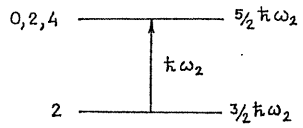
$$|\Lambda M\rangle'=\sum_{\mu\mu'}\langle 22\,\Lambda\,|\,\mu\mu'\,M\rangle\,a^+_{2\mu}a^+_{2\mu'}|0\rangle.$$

Ovo je ispunjeno (zbog osobine Klebš-Gordanovih koeficijenata)

$$\langle 22\,\Lambda\,|\,\mu\mu'M\rangle=(-1)^{4-\Lambda}\langle 22\,\Lambda\,|\,\mu'\mu\,M\rangle$$

jedino kada je Λ parno.

Dakle, ekscitirani spektar jezgra je:



RI20

Glava J

Fisija

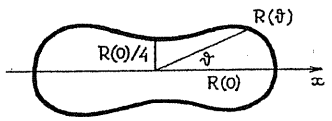
J1 Pretpostaviti da se jezgro ^{235}U raspada na dva jednaka dela (simetrična fisija). Koristeći Weizsäckerovu formulu za nuklearne mase proceniti energiju koja se oslobodi po jednom ovakvom raspadu.

J2 Odrediti masu urana koja doživi fisiju pri eksploziji atomske bombe, čiji je trotilni ekvivalent 5×10^4 tona. Toplotni ekvivalent trotila iznosi 800 cal/g.

J3 Nuklearna centrala čiji se kotao nalazi na temperaturi od 100 °C, a hladnjak na temperaturi od 25 °C, razvija snagu od 1 MW. Kao gorivni element koristi se ^{235}U, koji po jednom aktu fisije razvija približno energiju od 200 MeV. Naći dnevnu potrošnju goriva (u gramima) pretpostavljajući da je centrala idealna toplotna mašina.

J4 Jedan od načina da se grubo oceni energija oslobođena u fisionom procesu je da se izračuna Coulombova energija fisionih fragmenata u trenutku razdvajanja. Pretpostaviti da su jezgra zapreminski ravnomerno naelektrisane lopte pa izračunati fisionu energiju urana koji se raspada na ksenon i stroncijum.

J5 Na slici je prikazano jezgro koje započinje fisiju. Jezgro je rotaciono simetrično u odnosu na osu X. Naći analitički izraz za površinu jezgra imajući u vidu da se radi o kvadrupolnoj deformaciji, a zatim izračunati vrednost parametra kvadrupolne deformacije (β).



J5

J6 U okvirima modela nuklearne kapljice fisija se objašnjava različitim tendencijama Coulombove i površinske energije u slučaju deformisanja jezgra od sferne simetrije. Kada se jezgro deformiše njegova površina se uvećava, povećava se i površinski napon, koji teži da jezgru vrati sfernu simetriju, dok Coulombove sile odbijanja teže da se deformacija nastavi. Kada se porastom broja protona u jezgru dostigne kritična vrednost Coulombovih sila ($Z^2/A \simeq 50$) one postaju gospodari situacije i jednom započeta deformacija se nastavlja sve do »cepanja« jezgra. Ako je $Z^2/A<50$ jezgro je stabilno u odnosu na male deformacije. Međutim, ovu stabilnost treba shvatiti uslovno, kao konačnu potencijalnu barijeru (prag za fisiju), budući da separacija jezgra u dva fragmenta vodi do stanja sa nižom energijom. Polazeći od Bohr-Wheelerovog izraza za površinsku i Coulombovu energiju jezgra sa permanentnom kvadrupolnom deformacijom (β):

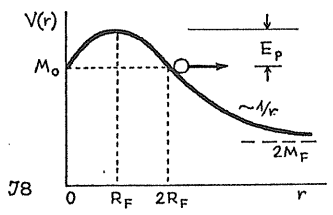
$$E_p = E_{po}\left(1+\frac{\beta^2}{2\pi}\right); \qquad E_c = E_{co}\left(1-\frac{\beta^2}{4\pi}\right)$$

gde su E_{p_0} i E_{C_0} površinska i Coulombova energija sferno simetričnog jezgra, pokazati da je kritični parametar deljivosti jezgra jednak:

$$(Z^2/A)_{kr}=50.$$

J7 Stepen kvadrupolne deformacije jezgra u kritičnom trenutku započinjanja fisije moguće je proceniti izjednačujući energiju praga za fisiju sa energijom deformacije jezgra. Oceniti parametar β za fotofisiju ^{238}U ako je poznat prag za fotofisiju $E_{pr}=5{,}8$ MeV kao i parametri: $E_{p_0}=520$ MeV i $E_{C_0}=800$ MeV (videti prethodni zadatak).

J8 Slika prikazuje potencijalnu energiju jezgra, koje doživljava spontanu simetričnu fisiju, u funkciji rastojanja dva fragmenta. Za rastojanja veća od zbira radijusa simetričnih fragmenata $r>2R_F$ potencijalna energija opada kao $1/r$ (Coulombov potencijal) i asimptotski teži vrednosti $2M_F$, gde je M_F masa mirovanja fragmenta.



J8

Za $r=0$ potencijalna energija treba da ima vrednost M_0 jednaku energiji polaznog jezgra. Oblast potencijala od $r=0$ do $r=2R_F$ ne poznaje se precizno. Međutim, poznato je da jezgru M_0 moramo da saopštimo energiju praga (E_{pr}) da bi fragmenti došli na rastojanje $2R_F$ i da bi fisija mogla da otpočne. Stoga se u posmatranoj oblasti potencijal često prikazuje kvadratnom funkcijom oblika:

$$V(r)=M_0+E_p-\frac{1}{2}k(r-R_F)^2.$$

Polazeći od ovakvog oblika fisionog potencijala proceniti verovatnoću za simetričnu spontanu fisiju ^{238}U pretpostavljajući da se jezgro tunel efektom raspada na dva fragmenta i da je visina fisione barijere $E_p\simeq 6$ MeV.

J9 U malenom uzorku ^{235}U doživi fisiju N jezgara. Po svakom aktu fisije oslobodi se prosečno 2,5 neutrona ($\bar{\nu}$). Koliki broj neutrona mora da napusti uzorak pa da se uspostavi stacionarno stanje (spreči lančana reakcija kao i opadanje broja neutrona). Odnos preseka za zahvat termalnih neutrona (σ_t), prema fisionom preseku (σ_f) iznosi:

$$(\sigma_f+\sigma_t)/\sigma_f=1{,}185.$$

J10 U jednom aktu fisije ^{241}Pu oslobodi se prosečno 2,45 neutrona. Znajući da je odnos neutronskih preseka za fisiju i radijacionu apsorpciju 5:4 izračunati koliko neutrona će dati polazno jezgro u petoj generaciji, ako je okruženo beskonačnim brojem atoma plutonijuma?

J11 U fisionoj lančanoj reakciji za stvaranje jedne generacije neutrona potrebno je vreme τ. Označimo sa k faktor umnožavanja neutrona po jednoj generaciji koji se može napisati u obliku $k=1+a$ gde je a beskonačno mala veličina. Ako je u početnom trenutku bilo prisutno n_0 neutrona, koliko neutrona će biti u trenutku T ($T\gg\tau$). Razmotriti i numerički primer: $a=0{,}01$; $T=10^{-4}$s, $n_0=10^3$ i $\tau=10^{-8}$ s.

J12 Od ukupnog broja neutrona emitovanih u fisiji X-ti deo se emituje sa znatnim zakašnjenjem T. Ovi, zakasneli neutroni smanjuju brzinu odvijanja lančane reakcije. Ako je $T\gg\tau$ gde je τ vreme potrebno za stvaranje jedne generacije neutrona, i ako sa k označimo faktor multiplikacije neutrona u fisionom materijalu izračunati broj trenutnih i broj zakasnelih neutrona u trenutku $1T$, $2T$, ako je u trenutku $t=0$ započeta lančana reakcija sa N neutrona.

J13 Neutroni dobijeni u fisionom procesu imaju kinetičke energije reda veličine 1 MeV. U čistom fisionom materijalu lančana reakcija može da se izvodi i sa ovakvim brzim neutronima. Međutim, kako efektivni presek za fisiju raste sa smanjenjem energije neutrona u najvećem broju reaktora, da bi se uštedelo na dimenzijama i fisionom materijalu, originalni fisioni neutroni se usporavaju do termalnih brzina (1/40 eV). To može da se postigne mešanjem fisionog materijala sa drugim materijalima koji su u stanju da u relativno malom broju elastičnih sudara sa neutronima redukuju njihovu kinetičku energiju na termalnu vrednost (moderatori).
Polazeći od klasične teorije sudara pokazati da važi relacija:

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\leqslant\frac{E}{E_0}\leqslant 1$$

gde je A maseni broj moderatora, E_0 energija neutrona pre, a E posle elastičnog sudara sa jezgrom moderatora u laboratorijskom sistemu. Zašto se za moderatore koriste laki elementi?

J14 Srednji gubitak energije neutrona po jednom elastičnom sudaru sa jezgrom moderatora opisuje se, obično, veličinom:

$$\xi=\left\langle\ln\frac{E}{E_0}\right\rangle$$

gde znak srednje vrednosti označava usrednjavanje po svim mogućim uglovima rasejanja neutrona; E i E_0 su energije neutrona posle i pre sudara. Ako se zna da je rasejanje neutrona izotropno i da se veličina E/E_0 kreće u granicama $\left[\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2, 1\right]$, gde je A maseni broj moderatora, pokazati da je veličina ξ funkcija samo masenog broja A ($\xi=\xi(A)$). Koliko puta mora da se sudari neutron energije 1 MeV sa jezgrima a) vodonika, b) ugljenika, pa da postane »termalan« (1/40 eV)?

J15 Da bi odredili minimalne kritične dimenzije reaktorskog materijala sa datim faktorom umnožavanja neutrona k ($k>1$) koristimo difuzionu jednačinu koja daje prostornu raspodelu neutrona u stacionarnom stanju ($n(x,y,z)$):

$$\nabla^2 n+\frac{k-1}{L^2}n=0$$

gde je L difuziona dužina za neutrone. Ako označimo sa L_a srednji put koji pređu termalni neutroni u reaktorskom materijalu pre apsorpcije, a sa L_s srednji slobodni put neutrona između dva sudara sa jezgrima koji ga usporavaju može se pokazati da je difuziona dužina L jednaka

$$L=\sqrt{\frac{L_a L_s}{3}}.$$

Pretpostavimo da su uran i grafit homogeno izmešani i smešteni u kocku stranice D. Ako se zna da je srednji slobodni put neutrona za rasejanje 3 cm, a za apsorpciju 300 cm, naći kritičnu stranicu kocke, za koju počinje lančana reakcija sa faktorom umnožavanja $k=1{,}05$.

RJ1 Energija oslobođena u jednom aktu fisije iznosi:

$$E_f=M(Z,A)-2M\left(\frac{Z}{2};\frac{A}{2}\right)=a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1-\frac{1}{2^{2/3}}\right)+a_S A^{2/3}(1-2^{1/3})\simeq 185\ \text{MeV}$$

($a_C=0{,}71$ MeV, $a_S=17{,}8$ MeV).

RJ2 Energija oslobođena pri eksploziji atomske bombe iznosi:

$$W=5\times 10^7\times 8\times 10^5\times 4{,}18\times\frac{10^{13}}{1{,}6}\simeq 1{,}04\times 10^{27}\ \text{MeV}.$$

Pošto se u jednom aktu fisije oslobodi približno 200 MeV, broj atoma urana, koji dožive fisiju, iznosi:

$$N=\frac{W}{200},\quad \text{a masa}\quad m=NA\,(\text{ajm})\simeq 2\ \text{kg}.$$

RJ3 Snaga idealne toplotne mašine iznosi:

$$P=\frac{Q}{t}\left(1-\frac{T_<}{T_>}\right)$$

gde su: Q uložena količina toplote, a $T_<$ i $T_>$ su apsolutne temperature hladnjaka i toplotnog rezervoara.
Količina toplote oslobođena tokom jednog dana može da se izrazi preko energije fisije ($E_f\simeq 200$ MeV) i broja atoma ^{235}U koji su doživeli fisiju, tj.:

$$Q=E_f N$$

Masa potrošenog urana iznosi:

$$m_U=\frac{P\cdot t}{E_f\left(1-\frac{T_<}{T_>}\right)}\times(\text{ajm})\simeq 68\ \text{g}.$$

RJ4 Energija Coulombovog odbijanja jezgara $^{144}_{54}Xe$ i $^{90}_{38}Sr$ jednaka je:

$$E_f=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_1+r_2}=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_0(A_1^{1/3}+A_2^{1/3})}\simeq 250\ \text{MeV}.$$

RJ5 Površina jezgra obično se opisuje zadavanjem dužine promenljivog poluprečnika jezgra u sfernim koordinatama. Pošto se radi o kvadrupolnoj deformaciji izraz mora da sadrži sferne harmonike ranga 2, tj.:

$$R(\vartheta, \varphi) = R_\alpha [1 + \sum_\mu a_\mu Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi)].$$

Međutim, kako jezgro ima rotacionu simetriju izraz ne sme da zavisi eksplicitno od koordinate φ; tj. od svih sfernih harmonika dozvoljen je samo $Y_{20}(\vartheta)$. Traženi analitički izraz za površinu jezgra je, dakle:

$$R(\vartheta) = R_\alpha [1 + \beta Y_{20}(\vartheta)].$$

Ako napišemo definicioni izraz za Y_{20} (videti dodatak):

$$R(\vartheta) = R_\alpha \left[1 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\beta\right].$$

Vrednost deformacionog parametra (β) nalazimo iz odnosa dva poluprečnika jezgra (naznačena na slici):

$$\frac{R(\vartheta = 0)}{R(\vartheta = \pi/2)} = 4$$

sleduje

$$\beta = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

odnosno:

$$R(\vartheta) = R_\alpha \left[1 + \cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right].$$

RJ6 Za jezgro sa permanentnom kvadrupolnom deformacijom β energija deformacije iznosi:

$$\Delta = (E_p + E_c) - (E_{p0} + E_{c0}) = \frac{\beta^2}{2\pi} E_{p0}\left(1 - \frac{E_{c0}}{2E_{p0}}\right).$$

Pošto je E_{p0} i $E_{C0} > 0$ znak energije deformacije određuje samo veličina:

$$x = \frac{E_{c0}}{2E_{p0}}.$$

Očigledno je da je »kapljica« nestabilna za $x > 1$. Parametar x u okvirima Weizsäckerovog modela iznosi:

$$x = \frac{a_c \dfrac{Z^2}{A^{1/3}}}{a_s A^{2/3}} = \frac{\dfrac{Z^2}{A}}{\dfrac{2a_s}{a_c}} \simeq \frac{Z^2}{50A}$$

Vidimo da kritičnoj vrednosti parametra x ($x = 1$) odgovara

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{kr} = 50$$

što je i trebalo dokazati!

RJ7 Polazeći od Bohr-Wheelerovog izraza za energiju deformisane nuklearne kapljice

$$\Delta = \frac{\beta^2}{2\pi}\left(1 - \frac{E_{c0}}{2E_{p0}}\right)E_{p0}$$

nalazimo kritičnu kvadrupolnu deformaciju iz uslova $\Delta = E_p$ tj.:

$$\beta = \sqrt{\frac{2\pi E_{pr}}{\left(1 - \frac{E_{c0}}{2E_{p0}}\right)E_{p0}}} = 0{,}55.$$

RJ8 Problem je identičan alfa-raspadu. Prozračnost barijere iznosi:

$$P = e^{-\frac{2}{\hbar}\int_0^{2R_F}\sqrt{2m[V(r)-E]}\,dr}$$

gde je m redukovana masa fragmenta $m = A/4$, a $V(r)$—E je negativna kinetička energija fragmenta

$$V(r) - E = M_0 + E_p - \frac{1}{2}k(r - R_F)^2 - M_0;$$

konstantu k nalazimo iz uslova:

$$V(0) \equiv M_0 + E_p - \frac{1}{2}kR_F^2 = M_0$$

tj.

$$k = 2E_p/R_F^2.$$

Dakle:

$$J = \int_0^{2R_F}\sqrt{2m[V(r)-E]}\,dr = \sqrt{2m}\int_0^{2R_F}\sqrt{E_p - \frac{E_p}{R_F^2}(r - R_F)^2}\,dr$$

$$= \sqrt{2mE_p}\int_0^{2R_F}\sqrt{1 - \left(\frac{r - R_F}{R_F}\right)^2}\,dr.$$

Uvođenjem smene promenljivih $x = \dfrac{r - R_F}{R_F}$; $dx = \dfrac{1}{R_F}dr$ dobija se

$$J = \sqrt{2mE_p}\,R_F\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}\,dx$$

$$= R_F\sqrt{2mE_p}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right\}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

odnosno

$$J=\frac{\pi}{2}R_F\sqrt{2mE_p}.$$

Verovatnoća spontane fisije iznosi:

$$W=fP=fe^{-\frac{\pi}{\hbar}R_F\sqrt{2mE_p}}$$

gde je f frekvencija udara fragmenta o »zidove« jezgra:

$$f\simeq 10^{20}\,\mathrm{s}^{-1}$$

Dakle:

$$W\simeq 10^{20}\,e^{-100}\simeq 3{,}7\times 10^{-24}\,\mathrm{s}^{-1}$$

što odgovara srednjem životu jezgra ^{238}U u odnosu na spontanu fisiju

$$\tau\sim\frac{1}{W}=2{,}7\times 10^{23}\,\mathrm{s}=8{,}7\times 10^{15}\,\mathrm{god}.$$

Dobijeni rezultat je uporedljiv sa vrednošću koja se dobija eksperimentalnim putem ($\tau_{eks}\simeq 10^{16}$ godina).

RJ9 Broj neutrona koji napušta uzorak (X) dobićemo kada od ukupnog broja neutrona stvorenih u jednoj generaciji odbijemo broj neutrona koji učestvuje u fisionom procesu (N_f) i broj neutrona koji učestvuju u nefisionom zahvatu (N_i)

$$X=\bar{\nu}N-N_f\left(1+\frac{N_i}{N_f}\right)=\bar{\nu}N-N_f\frac{\sigma_f+\sigma_i}{\sigma_i}.$$

Kritično X odgovara uslovu $N_f=N$.
Dakle, uzorak mora da napusti

$$X_C=N\left(\bar{\nu}-\frac{\sigma_f+\sigma_i}{\sigma_i}\right)=1{,}315\,N$$

neutrona da bi se uspostavilo stacionarno stanje.

RJ10 Broj neutrona stvoren u n-toj generaciji u beskonačnom uzorku, u kome nema odlaska neutrona u spoljašnju sredinu, iznosi:

$$N=\bar{\nu}\left(\bar{\nu}\frac{\sigma_f}{\sigma_f+\sigma_r}\right)^{n-1}=\bar{\nu}^n\frac{\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_r}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{\sigma_f}{\sigma_r}\right)^{n-1}}$$

gde je $\bar{\nu}$ prosečan broj neutrona po jednoj fisiji ^{241}Pu. Posle pete generacije biće u uzorku ukupno

$$N=(2{,}45)^5\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4}{\left(1+\frac{5}{4}\right)^4}=8{,}4\ \text{neutrona}.$$

RJ11 Posle n-te generacije biće stvoreno ukupno

$$N=n_0k^n\ \text{neutrona}$$

Kako je $n=\frac{T}{\tau}\gg 1$:

$$N=n_0\,(1+a)^{T/\tau}\simeq n_0\,e^{aT/\tau}=n_0\,e^{(k-1)\,T/\tau}.$$

Brojni primer:

$$N=10^3\,e^{100}\simeq 2{,}7\times 10^{46}.$$

RJ12 Ako je lančana reakcija otpočela sa N neutrona broj trenutnih neutrona u drugoj, trećoj i n-toj generaciji iznosi:

$$kN\,(1-x);\quad k\,[kN\,(1-x)]\,(1-x);\ \ldots\ ;\ Nk^n\,(1-x)^n.$$

Ukupan broj trenutnih neutrona proizveden za vreme $1\,T$ iznosiće:

$$N(1\,T)=N\sum_{i=1}^{n}[k\,(1-x)]^i$$

Međutim, kako je $n=T/\tau\to\infty$:

$$N(1\,T)=N\sum_{i=1}^{\infty}[k\,(1-x)]^i$$

Ako je $k\,(1-x)<1$ suma je konvergentna i jednaka sumi geometrijske progresije sa početnim članom 1 i količnikom $q=k\,(1-x)$.
Dakle:

$$N(1\,T)=\frac{N}{1-k\,(1-x)}.$$

Zakasneli neutroni, kojih u vremenu $0<t<1\,T$ nije bilo u fisionom materijalu pojavljuju se u vremenu $1\,T<t<2\,T$ i proizvode ukupno

$$N(2\,T)=\frac{Nx}{[1-k\,(1-x)]^2}\ \text{trenutnih neutrona}.$$

Faktor $\frac{x}{1-k\,(1-x)}$ određuje promenu broja trenutnih neutrona u drugom vremenskom intervalu. Kako je $k>1$, možemo da pišemo $k=1+a$. Ako su x i a male veličine tada je

$$\frac{x}{1-k\,(1-x)}\simeq\frac{1}{1-a}.$$

Dakle, broj neutrona raste u fisionom materijalu, ali sporo u vremenu reda 1 s, pošto su tolika karakteristična vremena zakasnelih neutrona, dok bi isti porast broja neutrona u lančanoj reakciji bez zakasnelih neutrona imali za vremena reda veličine 10^{-8} s.

RJ13 U sistemu *CM* ako atom moderatora miruje brzina upadnog neutrona iznosi:

$$\vec{u} = \frac{A}{1+A}\vec{v}_n$$

gde je $\vec{v}_n$ brzina neutrona u *LAB* sistemu.
Posle sudara apsolutna brzina neutrona u sistemu *CM* ostaje ista. Ako se ponovo vratimo u *LAB* sistem

$$\vec{v}'_n = \vec{u}' + \vec{v}_{CM}$$

gde je $\vec{v}_{CM}$ brzina centra masa:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{1+A}\vec{v}_n;$$

dakle

$$v_n'^2 = u'^2 + v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM}\cdot\vec{u}'$$

$$= \left(\frac{A}{1+A}\right)^2 v_n'^2 + \frac{1}{(1+A)^2}v_n^2 + 2\frac{A}{(1+A)^2}v_n^2\cos\vartheta.$$

Odnos energija neutrona pre (E_0) i posle sudara (E) u *LAB* sistemu jednak je

$$\frac{E}{E_0} = \frac{v_n'^2}{v_n^2} = \frac{1}{(1+A)^2}(A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta)$$

gde je ϑ ugao rasejanja u sistemu *CM*.
Posmatranjem dva granična slučaja $\vartheta_1=\pi/2$ i $\vartheta_2=\pi$ dobija se

$$\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \leqslant \frac{E}{E_0} \leqslant 1$$

što je i trebalo dokazati.
Za moderatore se koriste laki elementi da bi donja granica ove nejednačine bila što bliža nuli. (Ako je $E/E_0=0$ imamo totalnu predaju energije!).

RJ14 Ako je rasejanje neutrona izotropno, energetska raspodela neutrona posle sudara $\left(\frac{dW}{dE}\right)$ je konstantna u pomenutim energetskim granicama

$\left(\varepsilon_1 = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0;\ \varepsilon_2 = E_0\right)$. Tako, usrednjavanje veličine $\ln\frac{E}{E_0}$ možemo da izvršimo po energijama umesto po uglovima:

$$\xi = \left\langle \ln\frac{E}{E_0}\right\rangle = \frac{\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dW}{dE}\ln\frac{E}{E_0}dE}{\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dW}{dE}dE};$$

kako je $\frac{dW}{dE} = \text{const}$:

$$\xi = \frac{E_0}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\int_{\frac{E_1}{E_0}}^{\frac{E_2}{E_0}}\ln x\,dx = \frac{E_0}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot[x\ln x - x]\Big|_{\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}^{1}.$$

Dakle

$$\xi = \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A+1}{A-1} - 1$$

što je i trebalo dokazati!
Koristeći definiciju veličine ξ možemo da odredimo vrednost logaritma energije neutrona posle n-tog sudara:

$$\ln E_n = \ln E_0 + n\xi.$$

odavde određujemo broj sudara sa atomom moderatora:

$$n = \frac{1}{1-\frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A+1}{A-1}}\ln\frac{E_0}{E_n}.$$

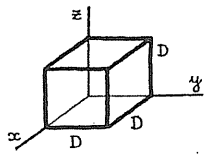
Za vodonik ($A=1$); pošto je $E_0=1$ MeV, a $E=1/40$ eV nalazimo da broj sudara iznosi 17,5, a za ugljenik ($A=12$) 116.

RJ15 Difuzionu jednačinu

$$\nabla^2 n + \alpha n = 0 \qquad \text{sa } \alpha = \frac{k-1}{L^2}$$

možemo da rešimo sa graničnim uslovima $n=0$ na granicama reaktorskog materijala. Postavimo kocku stranice D kao što je prikazano na slici. Granični uslovi tada glase:

$$n(D, y, z) = n(x, D, z) = n(x, y, D) = 0$$
$$n(0, y, z) = n(x, 0, z) = n(x, y, 0) = 0$$



RJ15

a difuziona jednačina se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}+\alpha n=0.$$

Ako pretpostavimo da je rešenje ove jednačine oblika:

$$n=cf(x)f(y)f(z),$$

difuziona jednačina se raspada na tri identične jednačine tipa:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\frac{\alpha}{3}f(x)=0.$$

Rešenje ove jednačine je oblika

$$f(x)=A\sin\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\,x.$$

Iz graničnog uslova $f(D)=0$ dobijamo kritičnu dimenziju reaktorskog materijala:

$$D=\pi\sqrt{\frac{3}{\alpha}}=\frac{\pi\sqrt{3}\,L}{\sqrt{k-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{k-1}}\sqrt{L_a L_s}\simeq 420\,\text{cm}.$$

Glava K

Elementarne čestice i kosmički zraci

K1 U jednačinama kvantne mehanike stalno se pojavljuju konstante $\hbar = h/2\pi$ i brzina svetlosti c. Zato je korisno upotrebljavati sistem jedinica koji dozvoljava eliminaciju ovih simbola. To je takozvani prirodni sistem (*PS*) koji se koristi i u nuklearnoj fizici ali ipak najviše u fizici elementarnih čestica. On sve veličine u *CGS* sistemu redukuje na određene stepene $\hbar$ i c i jednu jedinu prirodnu dimenziju — dužinu. Ako veličina A' u *CGS* sistemu ima dimenzije:

$$[A'] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$$

uvedite novu veličinu A sa dimenzijama dužine L koristeći poznatu dimenzionalnost konstanti $\hbar$ i c u *CGS* sistemu. Iz ovog opšteg izraza naći dimenzije mase, energije, naelektrisanja i samih konstanti $\hbar$ i c u *PS*.

K2 Neutralni K-mezon mase mirovanja 494 MeV ima poluživot od $1{,}2 \times 10^{-8}$s. Najčešći raspadi $K^{\pm}$ mezona su ($\mu^{\pm} + \nu$; $\pi^{\pm} + \pi^{\circ}$ itd. Proceniti neodređenost mase ove čestice koja nastaje zbog njenog konačnog života. Da li se može proceniti poluprečnik K-mezona?

K3 U mi-mezonskom atomu fosfora nađena je gama linija energije 88 keV koja odgovara »atomskom« prelazu između energetskih nivoa $3D_{5/2}$ i $2P_{3/2}$. Koristeći samo ovaj podatak odrediti masu mi-mezona. (U računu zanemariti relativističke popravke u energetskim termovima).

K4 Veličinu mase mi-mezona moguće je odrediti pomalo neobičnim putem; poznavanjem sledećih odnosa magnetskih momenata:

$$\mu_{\mu}/\mu_{p} = 3{,}183 \quad \text{i} \quad \mu_{e^-}/\mu_{p} = 658{,}2$$

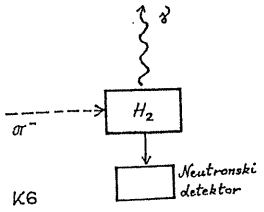
Eksperimentalno su takođe određeni i g-faktori za elektron i mi-mezon:

$$g_{\mu} \simeq g_{e} \simeq 2.$$

Izraziti masu mi-mezona u GeV.

K5 Visokoenergetski gama kvant interaguje sa protonom u miru i proizvodi neutralni π mezon (pion). Odrediti minimalnu energiju gama kvanta pri kojoj je moguća ovakva reakcija.

K6 Snop negativnih π-mezona sudara se sa vodoničnom metom.
Zahvatom mezona obrazuje se mezoatom vodonika, koji se raspada emisijom gama kvanta i neutrona. Pomoću neutronskog detektora nađeno je da kinetička energija neutrona iznosi 8,9 MeV. Proceniti masu mirovanja π^- čestice.



K6

K7 Otprilike pre jedne decenije Gell-Mann i Georg Zweig su predložili da sve jakointeragujuće čestice, hadrone, možemo da smatramo sastavljenim od »osnovnih« (fundamentalnih) hipotetičkih čestica kvarkova i njihovih antičestica (antikvarkova). Kvarkovi imaju neuobičajene karakteristike: barijonski broj 1/3 a naelektrisanje $-1/3\,e$, $2/3\,e$ i $-2/3\,e$. Koliko i kakvih kvarkova mora u sebi da sadrži: a) proton i b) π-mezon? Pretpostavljajući da je proton sačinjen od slabo vezanih kvarkova naći masu kvarka. Ako je pion sastavljen od jako vezanih kvarkova kolika je njegova energija veze? (Na žalost, do dana današnjeg i pored značajnijih eksperimentalnih napora kvarkovi nisu otkriveni. Ako je masa mirovanja kvarkova veća od energija koje se postižu današnjim akceleratorima, onda su vezivne energije kvarkova upravo fantastične).

K8 Koristeći model kvarkova (videti prethodni zadatak) odrediti odnos totalnih efikasnih preseka za elastično rasejanje:

$$p-p \qquad \text{i} \qquad \pi^+-p$$

Pretpostaviti da su verovatnoće za rasejanje kvarka na kvarku i kvarka na antikvarku jednake međusobom.

K9 Pojam izotopskog spina uveden za proton i neutron možemo da proširimo i na π-mezone. Iz eksperimenta je poznato da postoje neutralni, pozitivni i negativni π-mezoni približno istih masa mirovanja. Pretpostavimo da tri stanja naelektrisanja π-mezona odgovaraju trima projekcijama izospina. Tada je razumno da usvojimo za izospin piona $T=1$. Uvedimo oznake:

$$|T, T_z\rangle = |1, 1\rangle = |\pi^+\rangle, \quad |1, 0\rangle = |\pi^\circ\rangle, \quad |1, -1\rangle = |\pi^-\rangle$$

Ukupna talasna funkcija π-mezona jednaka je proizvodu talasne funkcije koja zavisi samo od prostornih koordinata i izospinske talasne funkcije (pošto je spin π-mezona jednak nuli).

Koliki je izotopski spin sistema od dva π-mezona? Kakvu simetriju mora da ima u izospinskom prostoru talasna funkcija koja opisuje dva piona? Napisati dve najprostije izospinske talasne funkcije sistema od dva piona za čiju konstrukciju vam nisu potrebni Klebš-Gordanovi koeficijenti.

K10 Napisati koristeći tabelu Klebš-Gordanovih koeficijenata sve moguće talasne funkcije sistema nukleon-pion u apstraktnom izospinskom prostoru koje odgovaraju stanjima izospina 1/2 i 3/2. Da li konstrukcija ovakvih talasnih funkcija ima ikakvog fizičkog smisla?

K11 Razmotriti procese elastičnog rasejanja pozitivnog i negativnog piona na protonu koristeći formalizam izospina. (Videti prethodne zadatke). Zanemarujući potpuno rasejanje u stanjima sa ukupnim izospinom 1/2 naći relativan odnos totalnih efikasnih preseka za elastično rasejanje pozitivnog i negativnog piona na protonu.

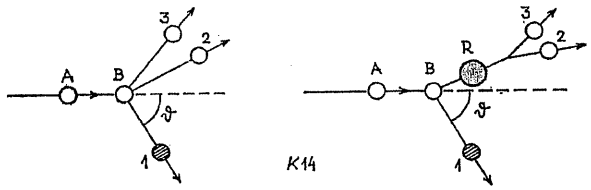
K12 U elektromagnetnim i jakim interakcijama pored drugih veličina održava se i tzv. hipernaelektrisanje (Y) definisano kao $Y=B+S$, gde je B barionski broj

a S stranost čestice. Koja (ili koje) od navedenih reakcija su zabranjene sa aspekta održanja hipernaelektrisanja

$$1_\circ \quad \pi^-+p \to K^\circ+\Lambda \qquad (Y(K^\circ)=+1)$$
$$2_\circ \quad \pi^-+p \to \pi^\circ+\Lambda^\circ$$
$$3_\circ \quad p+n \to p+\Lambda^\circ$$

K13 Dugo godina u fizici elementarnih čestica postojale su dve čestice ϑ i τ, približno istih masa od kojih se prva raspada na dva piona a druga na tri. Danas se smatra da su ϑ i τ čestica dva različita raspada jedne te iste — K-mezona. Imajući u vidu da je spin piona 0, odrediti spin i parnost K-mezona, koji učestvuje u oba raspada, pretpostavljajući da se parnost održava.

K14 Opisati kako će izgledati energetski spektar čestice 1 posmatrane pod uglom ϑ u odnosu na upadni pravac čestice A u produkcionom eksperimentu u kome se opserviraju tri čestice u finalnom stanju ($A+B \to 1+2+3$) ako je: a) proces



tipa prikazanog na slici levo i b) tipa prikazanog na slici desno u kome postoji intermedijarna kratkoživeća ($\tau \sim 10^{-23}$s) rezonansa R, tj. opisati kako se eksperimentalno mogu razlikovati ove dve situacije.

K15 Negativni π-mezon kinetičke energije 50 MeV raspada se u letu na mion i neutrino. Odrediti energiju neutrina koji izleće pod pravim uglom u odnosu na pravac kretanja π-mezona.

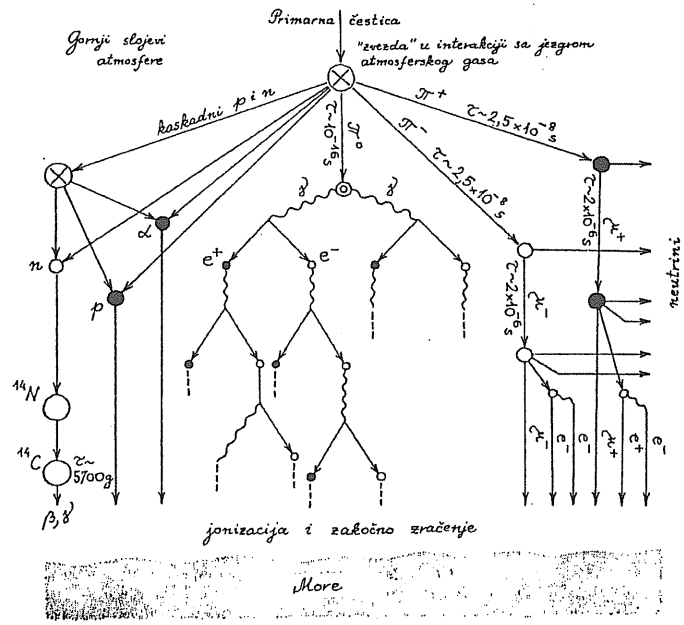
Pod kojim uglom se razleću čestice b i c jedna u odnosu na drugu u laboratorijskom referentnom sistemu ako je kinetička energija čestice a, koja se raspada na b i c ($a \to b+c$), jednaka T_a, a kinetičke energije čestica b i c su međusobno jednake. Mase mirovanja čestica su poznate. Koristiti se formalizmom četvorovektora.

K16 Uspostaviti vezu između kvantnih brojeva naelektrisanja čestice (Q), treće komponente izospina (T_3) i barijonskog broja (B), posmatrajući osobine izospinskog dubleta (p, n), izospinskog tripleta (π°, π^-, π^+) i izospinskog singleta (Λ°).

K17 Kosmičko zračenje otkriveno je u pokušajima da se objasni pojava spontanog razelektrisavanja usamljenog i inače izolovanog elektroskopa (Hess, 1913). Kapacitet vlakna i držača datog elektroskopa je 1 pF a zapremina komore 50 cm^3. Elektroskop je naelektrisan do desetog podeoka a njegova osetljivost je poznata i iznosi 0,1 V po podeoku. Tako naelektrisan on se na nivou mora potpuno razelektriše u toku

12,7 časova. Ako je gas u komori elektroskopa vazduh pod normalnim uslovima naći koliki je broj jonskih parova koji se stvara pod dejstvom kosmičkih zraka na nivou mora u jedinici zapremine i u jedinici vremena.

K18 Primarni kosmički zraci, uglavnom protoni i alfa čestice veoma visokih energija, izotropno dolaze iz celog svemirskog prostora do gornjih slojeva atmosfere i u njima, u sudarima sa jezgrima atmosferskih gasova, proizvode lavine relativističkih čestica, uglavnom π-mezona. Mali broj primarnog zračenja dostiže do nivoa mora. Ovde opažamo dve izrazite komponente, tvrdu i meku. Meka se jako apsorbuje u materiji, apsorpciona moć jako zavisi od rednog broja materijala. Nju

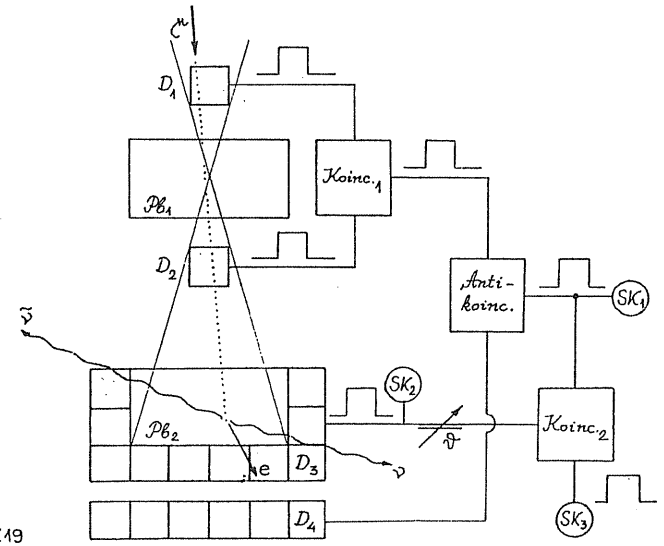


K18

uglavnom sačinjavaju elektroni koji potiču iz raspada $\pi^0 \to 2\gamma$ sukcesivnom kreacijom elektronsko-pozitronskih parova od strane ovih gama kvanata. Tvrda komponenta ima veliku prodornu moć približno nezavisnu od naelektrisanja atoma apsorbera. Nju sačinjavaju μ mezoni koji potiču iz raspada $\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu_{\mu}$ ($\bar{\nu}_{\mu}$). Jonizacioni gubici, međutim, ne zavise od mase čestice i, kako je jedina razlika između elektrona i miona u njihovoj masi, to se navedena razlika u karakteru apsorpcije mora objasniti na drugi način. Razlika se pojavljuje kada posmatramo gubitke energije na zakočno zračenje u polju jezgara apsorbera. Ovi su gubici obrnuto proporcionalni masi

čestice a upravo proporcionalni Z^2. Otud lake čestice ($m_e = 1/207\, m_{\mu}$) imaju znatne gubitke na zakočno zračenje koji jako zavise od Z, dok teške, mioni, nemaju. Postoji, međutim, još jedan neobičan efekat koji donekle dovodi do smanjenja razlike u apsorpciji ovih dvaju zračenja i to povećanjem apsorpcije miona. Mion je, naime, nestabilna čestica sa raspadom $\mu^{\pm} \to e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$ i srednjim životom $\tau_0 = 2{,}15 \times 10^{-6}$s. No, relativistički mezon koji se kreće brzinom βc imaće, u *LAB* sistemu, srednji život $\tau = \tau_0/(1-\beta)^{1/2}$. Pokazati da apsorpcija miona (nestajanje iz snopa) zbog raspada zavisi od gustine apsorbera i, shodno dobijenom rezultatu, objasniti naizgled paradoksalnu činjenicu da je apsorpcija miona usled raspada u vazduhu (dakle, retkoj sredini) značajnija no u gustim sredinama (tečnim i čvrstim telima)! Poznato je da jonizacioni gubici ultrarelativističkih mezona po jedinici puta u materijalima sa malim Z praktično ne zavise ni od energije ni od Z i da iznose približno 2 MeV/ /gcm^{-2}.

K19 Raspad μ mezona iz tvrde komponente kosmičkog zračenja ispitivan je aparaturom prikazanom na slici. Desetak santimetara olova u filteru F_1 dovoljni

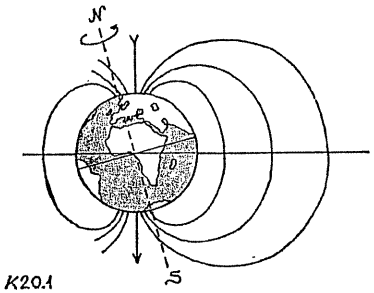


K19

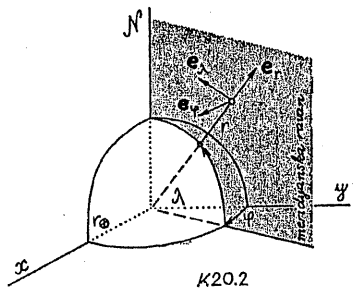
su da apsorbuju elektrone meke komponente. Impuls u skaleru SK_1 javlja se, dakle, samo ako mion prođe kroz F_1 i zaustavi se u filteru F_2 (ako prođe i kroz njega impulsa opet nema zbog antikoincidentne veze detektora D_4). Detektor D_3 oseća samo elektrone iz raspada miona $\mu \to e + \nu + \tilde{\nu}$ (impuls u SK_2). Impuls u SK_3 (pravi događaj, reprezentovan na slici) dobija se samo ako se mion zaustavi u F_2, u njemu raspadne posle vremena jednakog vremenskom kašnjenju ϑ, emitujući elektron kroz bateriju detektora D_3 (neutrino ne interaguje ni sa jednom detektor-

skom sredinom). Ovo mogu da urade samo mezoni koji dolaze iz pravaca ograničenih teleskopskim uglom sistema. U intervalu kašnjenja od 0 do 2 μs registrovano je 200 događaja (impulsa u SK_3), a u intervalu 0 do 6 μs 310 događaja. Pretpostavljajući da se raspad miona odvija po eksponencijalnom zakonu (kao i svi raspadi, uostalom) naći srednji život miona.

K20 Mnoge lokalne pojave na Zemlji u vezi sa kosmičkim zračenjem mogu se objasniti studijom kretanja naelektrisanih čestica u Zemljinom magnetnom polju.



K20.1



K20.2

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\lambda = \vec{e}_\varphi; \quad \vec{k} = \sin\lambda\,\vec{e}_r + \cos\lambda\,\vec{e}_\lambda$$

Magnetno polje Zemlje može se aproksimirati poljem magnetnog dipola lociranog nekoliko stotina kilometara od njenog centra i čija je osa pomerena u odnosu na osu rotacije za oko 11° tako da se severni pol ovog momenta nalazi negde u kanadskom polarnom krugu. Moment ovog magnetnog dipola od približno $\mu = 8 \times 10^{25}$ erg/gaus dovoljno dobro reprodukuje izmerene vrednosti magnetnog polja na većim visinama gde se lokalne varijacije više ne osećaju. Polje se izučava u, za fizičare neuobičajenom, geomagnetnom sfernom koordinatnom sistemu čiji su jedinični vektori prikazani i definisani na slici. Osa z poklapa se sa osom magnetnog momenta. Tačka na površini Zemlje opisana je koordinatama (r, λ, φ) gde je $r = r_0 = 6{,}4 \times \times 10^8$ cm a λ i φ su geomagnetska širina i dužina. Vektori $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\lambda$ i $\vec{e}_\varphi$ usmereni su u zenit, sever i zapad respektivno. Vektor-potencijal polja ovog magnetnog momenta jednak je:

$$\vec{A} = -\vec{\mu} \times \nabla \frac{1}{r}$$

Naći izraz za polje i prodiskutovati ga. Naći intenzitet, pravac i smer polja na ekvatoru i na polovima. Pošto statičko polje ne vrši rad (Lorentzova sila) to će se naelektrisana čestica pod njegovim dejstvom kretati tako da su joj E, $\vec{v}$ i $\vec{p}$ konstantni. Lagranžijan takve čestice jednak je:

$$\mathcal{L} = -Mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Ze}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$$

Naći odavde izraz za odnos komponente impulsa p_φ prema totalnom impulsu p izražen preko ugla (γ) između vektora brzine $\vec{v}$ i vektora $\vec{e}_\varphi$, tj. ugla koji trajektorija

čestice čini sa pravcem zapada. Ovaj integral kretanja naziva se Störmerovom teoremom (Störmer tokom produktivne prve trećine ovog veka). Prodiskutovati značenje Störmerove teoreme.

K21 Defleksiju naelektrisane čestice u magnetnom polju određuje njen impuls a ne energija i stoga se kao karakteristika kosmičke čestice često uzima impuls izražen u eV/c. Ako je čestica ultrarelativistička ($E \gg mc^2$) on je tada brojno jednak energiji u eV a ako je nerelativistička jednak je $2\,c/v$ puta njenoj energiji. Veličina koja adekvatno karakteriše kretanje date čestice u magnetnom polju je takozvana $\mathcal{H}\rho$ vrednost ili magnetna čvrstoća (magnetic rigidity) $\mathfrak{M}$. Jednačina kretanja je:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{Ze}{c}\vec{v} \times \vec{\mathcal{H}}$$

ili, za slučaj brzine normalne na homogeno polje:

$$\dot{p} = (Ze/c)\, v\, \mathcal{H} = (1/\rho)\, mv^2$$

gde je ρ poluprečnik putanje. Odavde imamo odmah da je:

$$\mathfrak{M} \equiv \mathcal{H}\rho = pc/Ze$$

Vidimo opravdanost naziva magnetna čvrstoća jer veličina $\mathfrak{M}$ zaista na izvestan način govori koliko »čvrsto« (na kom radijusu ρ) polje date jačine drži česticu impulsa p. Izraziti veličinu b (Störmerov integral) u jedinicama $(\mu/\mathfrak{M})^{1/2}$. Ova jedinica dužine naziva se Störmer (1 St) i očigledno je za svaku situaciju čestica — polje različita!

K22 Jedinica od jednog Störmer-a definisana u prošlom zadatku jednaka je dakle:

$$1\,St = \sqrt{\frac{\mu}{|\mathfrak{M}|}} = \sqrt{\frac{\mu\,|Z|\,e}{pc}} = 4{,}9 \times 10^9 \sqrt{\frac{|Z|}{pc\,(\mathrm{GeV})}}\ \mathrm{cm}$$

Radijus Zemlje $r = 6{,}378 \times 10^8$ cm izražen u St biće tako jednak:

$$R_\oplus = 0{,}13\sqrt{\frac{pc\,(\mathrm{GeV})}{|Z|}}\,St,$$

tj. svaka čestica »vidi« Zemlju određenog radijusa ako je ovaj izražen u St. ($R_\oplus \infty \sqrt{p}$). Ravan koja prolazi kroz česticu u pokretu i z-osu zove se meridijanska ravan (vidi sliku u zadatku br. K20). Ako iz Störmerove teoreme izrazimo $\cos\gamma$ očigledno je da će u ovoj ravni, za datu vrednost B, one oblasti u kojima je $|\cos\gamma| > 1$ (definisane određenim vrednostima R i λ) biti zabranjene (nepristupačne) za tu česticu. Trasirajte granice ovih oblasti u meridijanskoj ravni za vrednosti $B = -0{,}5$; 0; 1,95 i 2,05 (pojava je očigledno φ-simetrična). Raditi u störmerima i diskutovati dobijene rezultate (posmatrati samo pozitivne čestice). Imati u vidu da je zabranjena oblast zaista zabranjena; čestica u nju ne može prodreti ni kroz drugu zabranjenu oblast, ni kroz Zemlju! Detaljno prodiskutovati slučaj kretanja pozitivne čestice u ekvatorijalnoj ravni sa $B = 0$ i $B = 2{,}05$.

K23 Rezultati dobijeni u prethodnom zadatku a prikazani na slici RK22.1 očigledno važe za celu trajektoriju čestice no posmatrajmo sada samo krajnu tačku trajektorije pitajući se da li čestica date energije E (znači i datog $R_\oplus$) može da dostigne određenu širinu λ na površini Zemlje ako se kreće iz pravca koji sa pravcem zapada čini ugao γ. Za to prvo treba iz date energije E da nađemo $R_\oplus$ (u St) pa uz λ i γ nađemo odgovarajuće B. Time dobijamo sliku analognu onima na sl. RK22.1 i na njoj označimo tačku $(R_\oplus, \lambda)$, tj. krajnu tačku trajektorije. Ta će tačka, očigledno, ležati u dozvoljenoj oblasti jer je sigurno $|\cos\gamma| \leqslant 1$ (γ je biran kao stvarni ugao). Može se desiti, međutim, da to bude dozvoljena oblast tipa II ako je istovremeno $i\ B \geqslant 2$ i $R_\oplus \leqslant 1$ što se vidi na sl. RK22.1d za, na primer $R_\oplus^1$ (sve u slučaju pozitivne čestice). Ako je, pak, $R_\oplus \geqslant 1$, na primer, $R_\oplus^2$ ovo se nikad ne može desiti; trajektorija će se uvek završiti u oblasti I; bez obzira iz kog pravca dolazila čestica će na datoj širini biti opservabilna.

Na osnovu gornjih razmatranja izvesti opšte zaključke o opservabilnosti čestica na površini Zemlje a u funkciji upadnog ugla γ. Odatle zatim detaljno prodiskutovati za koje će upadne uglove γ proton impulsa p=3,25 GeV/c biti opservabilan na površini Zemlje na geomagnetnoj širini λ=45° (približno širina SFRJ).

K24 Nejednačina za $\cos\gamma$ iz prethodnog zadatka (uslov observabilnosti čestice date energije na datoj širini λ u funkciji ugla trajektorije sa pravcem zapada) može se rešiti po $R_\oplus$, tj.:

$$R_\oplus^{\gamma \geq 0} > \frac{1 - \sqrt{1 - \cos\gamma \cos^3\lambda}}{\cos\gamma \cos\lambda} \qquad R_\oplus^{\gamma < 0} > \frac{1 - \sqrt{1 - \cos(\pi - \gamma) \cos^3\lambda}}{\cos(\pi - \gamma) \cos\lambda}$$

Odavde naći uslov za opservabilne impulse čestice na datoj geomagnetnoj širini za česticu koja dolazi iz pravca definisanog uglom γ. Na osnovu dobijenog rezultata objasniti »efekt širine«; činjenicu da je intenzitet kosmičkog zračenja veći na polovima no na ekvatoru. Objasniti takođe kako pojava »zapadno-istočne asimetrije«, tj. činjenice da je na većim visinama (gde se radi o primarnom zračenju) intenzitet zračenja sa zapada veći od intenziteta zračenja sa istoka, govori da je primarno kosmičko zračenje sastavljeno pretežno od pozitivno naelektrisanih čestica.

K25 Uzmimo 1 mol molekularnog vodonika u nepromenljivoj zapremini i spolja dovodimo energiju. Pratimo porast temperature i vrednosti temperature na kojima se dešavaju značajne promene kao i ponašanje specifične toplote C_V. Slika koju pri tom dobijamo približno je sledeća:

TEMPERATURA (K)	OPIS
300—600	$C_V \simeq \text{const} \simeq (5/2)\,R$ (R je univerzalna gasna konstanta).
1000	Počinje disocijacija molekula, C_V raste.
5000	Disocijacija gotovo potpuna. Sistem se sastoji od dva mola atomskog vodonika; $C_V \simeq 3\,R$.
10 000	Primetna jonizacija atoma; C_V raste.
10^5	Jonizacija gotovo potpuna. Sistem se sastoji od dva mola protona i dva mola elektrona; C_V dostigla $\sim 6\,R$.

TEMPERATURA (K)	OPIS
10^5—10^8	$C_V \simeq$ const.
10^9	U sudarima čestica kreiraju se elektronsko-pozitronski parovi; C_V raste.
10^{11}	U proton-proton sudarima kreiraju se π-mezoni; C_V raste.
10^{12}	Broj π-mezona je veliki. U visokoenergetskim p—p sudarima kreiraju se proton-antiproton parovi; C_V dalje raste.
$\simeq 1{,}2 \times 10^{12}$	Maksimalna moguća temperatura, T_{max}! Dalje dovođenje energije samo povećava broj novih čestica; C_V stalno raste.

Objasniti kvalitativno gornju sliku a naročito poslednji stav o postojanju maksimalne moguće temperature (objasniti red veličine T_{max}) koji predstavlja zanimljivu vezu između termodinamike i fizike elementarnih čestica i koji se ponekad naziva »četvrtim principom termodinamike«.

RK1 Dimenzije $\hbar$ i c u *CGS* sistemu su:

$$[\hbar]=ML^2T^{-1} \quad \text{i} \quad [c]=LT^{-1}$$

Da bismo od veličine A' napravili veličinu sa dimenzijama dužine moramo kombinovati $\hbar$ i c tako da dimenzije M i T budu jednake nuli, tj.

$$[A]=[A']f(\hbar, c)=[A'][\hbar]^{\alpha}[c]^{\tau}$$
$$=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}(ML^2T^{-1})^{\alpha}(LT^{-1})^{\tau}$$

Da bi M i T imali dimenzije nula mora biti:

$$[M]: \quad \alpha+\sigma=0, \quad \sigma=-\alpha$$
$$[T]: \quad \alpha-\sigma-\tau=0, \quad \tau=\alpha+\gamma$$

tj. konačno:

$$[A]=[A']\hbar^{-\alpha}c^{\alpha+\gamma}=L^{\beta-\alpha+\gamma}$$

Odavde odmah nalazimo da masa u prirodnom sistemu ima dimenziju L^{-1}.
Za energiju nalazimo:

$$[E']=ML^2T^{-2}=M^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma} \text{ tj.}$$

$[E]=L^{-1}$, kao i masa, tj. $E=E'/\hbar c$ tako da je

$$E'_{erg}=1{,}05\times10^{-27}\times3\times10^{10}\,E_{prirodnim\ jedinicama}$$

Naelektrisanje u elektrostatičkim jedinicama ima dimenzije:

$$[e']=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \text{ pa je u } PS\ [e]=L^{0} \text{ tj.}$$

$$e'_{el.\ stas.\ jed.}=e_{prir.\ jed.}(\hbar c)^{1/2} \text{ što je, približno,}$$

$$e_{prir.\ jed.}=\sqrt{1/137}=\sqrt{\alpha}!$$

tj. $e^2=\alpha$ što opravdava ime sistema!

Lako nalazimo da je u *PS*

$\hbar=c=1$! što zadovoljava uslov zadatka.

RK2 Ako je poluživot neke čestice τ tada je neodređenost njene mase mirovanja reda veličine: $\Delta mc^2\simeq\hbar/\tau$. U našem slučaju $\Delta mc^2=5\times10^{-14}$ MeV. Mogućnost lokalizacije čestice impulsa p određena je talasnom dužinom de Broljevog talasa. Ako uzmemo da impuls K-mezona (gruba procena) iznosi $p\sim mc$, tada se za poluprečnik K-mezona dobija:

$$r\sim\lambda^*=\hbar/p=\frac{\hbar c}{mc^2}\simeq 0{,}4\text{ fm}$$

RK3 Mi-mezonski atom je sistem koji se sastoji od jednog jezgra i jednog (negativnog) mi-mezona koji predstavlja »teški« elektron. Ovakav atom je sličan vodoniku, tako da za n-to energetsko stanje atoma možemo da pišemo, ako zanemarimo spin i relativističke popravke:

$$-E_n=R\,n^{-2}$$

gde je R Ridbergova konstanta:

$$R=\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 m_{\mu}c^2$$

(α je konstanta hiperfine strukture, a Z redni broj fosfora; $Z=15$).
Masa mi-mezona iznosi:

$$m_{\mu}c^2=\frac{2E_{\gamma}}{(\alpha Z)^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}\simeq 106\text{ MeV}$$

RK4 Pođimo od identiteta:

$$\frac{\mu_{\mu}}{\mu_e}=\frac{\mu_{\mu}}{\mu_p}\cdot\frac{\mu_p}{\mu_e}$$

S druge strane sopstveni magnetni momenat čestice u sistemu u kome ona miruje jednak je:

$$\mu=g\frac{e\hbar}{2mc}s$$

gde je s maksimalna projekcija spina.
Budući da govorimo o česticama sa spinom 1/2

$$\frac{\mu_{\mu}}{\mu_e}=\frac{g_{\mu}}{g_e}\frac{m_e}{m_{\mu}}$$

odnosno:

$$m_{\mu}=\frac{g_{\mu}}{g_e}m_e\frac{\mu_p}{\mu_{\mu}}\frac{\mu_e}{\mu_p}\simeq 0{,}106\text{ GeV}$$

RK5 Prag za kreaciju čestica jednak je zbiru njihovih masa mirovanja u sistemu centra masa

$$E_{pr}=m_p+m_{\pi^0}$$

Uzimajući u obzir da je masa mirovanja relativistička invarijanta, možemo da pišemo

$$E_{pr}^2=E_{CM}^2=E^2-p^2=(m_p+m_{\pi^0})^2$$

gde se veličine p i E odnose na laboratorijski sistem pre reakcije. Kako je

$$p=\omega, \quad E=\omega+m_p \qquad (\hbar=c=1)$$

Zaključujemo da je minimalna energija fotona jednaka:

$$\omega = m_\pi \left(1 + \frac{m_{\pi^0}}{2m_p}\right) \simeq 145\,\text{MeV}.$$

RK6 Ako zanemarimo vezivnu energiju mezona u mezoatomu, kao i njegovu upadnu kinetičku energiju, onda koristeći se relativističkom kinematikom za reakciju tipa:

$$\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$$

pišemo, u jedinicama $\hbar = c = 1$:

$$m_{\pi^-} + m_p = \omega + \sqrt{\omega^2 + m_n^2}$$

(Prespostavili smo da je impuls neutrona jednak impulsu fotona).
Ako rešimo jednačinu po ω dobija se:

$$\omega = \frac{1}{2}\left(m_{\pi^-} + m_p - \frac{m_n^2}{m_{\pi^-} + m_p}\right)$$

Kinetička energija neutrona jednaka je:

$$T_n = m_p + m_{\pi^-} - m_n - \omega$$

Dakle:

$$2T_n\,(m_{\pi^-} + m_p) = (m_p - m_n + m_{\pi^-})^2$$

Korišćenjem vrednosti masa protona i neutrona dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu po masi π^- mezona:

$$m_{\pi^-}^2 - 20{,}4\, m_\pi - 16700 = 0$$

čije je pozitivno i realno rešenje

$$m_{\pi^-} \simeq 140\ \text{MeV}$$

RK7 Proton bismo mogli da dobijamo kombinacijom triju kvarkova, dva sa naelektrisanjem $2/3\,e$ i jedan sa naelektrisanjem $-1/3\,e$. Ako su kvarkovi slabo vezani u protonu masa mirovanja kvarka je približno 0,3 GeV (da bi ukupno dali masu mirovanja protona — 1 GeV). Pion (π) je sastavljen od kvarka i antikvarka (barionski broj nula), a naelektrisanje

$$\textit{antikvark!} \leftarrow \left|\frac{2}{3}e\right| + \frac{1}{3}e = e$$

Energija veze kvarkova u pionu jednaka je dakle:

$$B_\pi = 2\,m_{KVARK} - m_{\pi^+} \simeq 0{,}46\,\text{GeV}$$

Početna pretpostavka o protonu kao sistemu slabo vezanih kvarkova očigledno je daleko od istine jer ni u eksperimentima na energijama ~200 GeV kvarkovi nisu opaženi. No, čak i pod ovom pretpostavkom dobijamo enormnu energiju veze za kvarkove u π mezonu. Prvi put srećemo mikrosistem u kome je energija veze sistema

veća od mase mirovanja sistema! Osećate li potrebu za novim tipom sile kojom kvarkovi interaguju sposobnom da ostvari ovako čvrsto vezane sisteme, tolike defekte mase?!

RK8 Kako proton ima tri a pion dva kvarka u elastičnom $\pi^+ p$ rasejanju učestvuje šest kvarkova, pa može da se desi šest nezavisnih sudara svaki sa verovatnoćom A. Dakle:

$$\sigma(\pi^+ p) \propto 6A$$

S druge strane u slučaju proton — proton sudara učestvuje devet kvarkova te je:

$$\sigma(p\,p) \propto 9A$$

Odnos preseka za ova dva elastična rasejanja iznosi:

$$\frac{\sigma(pp)}{\sigma(\pi^+ p)} = \frac{3}{2}$$

(Što nije daleko od eksperimentalnog rezultata).

RK9 Sistem od dva piona može da ima izotopski spin 0, 1 i 2. Pošto pion ima obični spin 0, potčinjava se Bozeovoj statistici, tako da ukupna talasna funkcija dva piona mora da bude simetrična. To znači da simetričnoj izospinskoj funkciji odgovara simetrična prostorna i obratno.
Dve najprostije talasne funkcije u izospinskom prostoru sistema od dva piona su one koje odgovaraju maksimalnoj i minimalnoj projekciji izospina 2, tj.

$$|2, 2\rangle = |\pi^+\rangle\,|\pi^+\rangle$$

$$|2, -2\rangle = |\pi^-\rangle\,|\pi^-\rangle.$$

RK10 Procedura pravljenja izospinskih funkcija identična je kao i za običan spin. Označimo kvantni broj izospina slovom T, a projekcije izospina na »fizičku osu« T_3. Tada je:

$$|T, T_3\rangle = \sum_{T_{3\pi} T_{3n}} \langle T_\pi\, T_n\, T \,|\, T_{3\pi}\, T_{3n}\, T_3\rangle\,|\,T_\pi\, T_{3\pi}\rangle\,|\,T_n\, T_{3n}\rangle$$

gde se indeksi π i n odnose na kvantne brojeve izospina piona i nukleona. Vektore $|T_\pi\, T_{3\pi}\rangle$; $|T_n\, T_{3n}\rangle$ možemo da zamenimo nazivima čestica. Na primer:

$$|1\,1\rangle_\pi \equiv \pi^+,\ |1/2\ -1/2\rangle \equiv n$$

Dakle:

$$|1/2\quad 1/2\rangle = \sqrt{2/3}\,\pi^+ n - \sqrt{1/3}\,\pi^0 p$$

$$|1/2 - 1/2\rangle = \sqrt{1/3}\,\pi^0 n - \sqrt{2/3}\,\pi^- p$$

$$|3/2\quad 3/2\rangle = \pi^+ p$$

$$|3/2 - 3/2\rangle = \pi^- n$$

$$|3/2\quad 1/2\rangle = \sqrt{1/3}\,\pi^+ n + \sqrt{2/3}\,\pi^0 p$$

$$|3/2\ -1/2\rangle = \sqrt{2/3}\,\pi^0 n + \sqrt{1/3}\,\pi^- p$$

Konstrukcija ovakvih funkcija ima dubokog fizičkog smisla budući da pion i nukleon interaguju jakim interakcijama koje su nezavisne od naelektrisanja, pa se izospin održava.

RK11 Sistem π^+p odgovara stanju izospina 3/2 i projekcije 3/2, dok sistem π^-p možemo da posmatramo kao stanje sa smešama izospina 3/2 i 1/2. Posle korišćenja tabele Klebš-Gordanovih koeficijenata, ili rezultata prethodnog zadatka, imaćemo:

$$\pi^+p=|\,3/2\;\;3/2\rangle$$

$$\pi^-p=\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\,3/2-1/2\,\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\,1/2-1/2\,\right\rangle$$

Efikasni presek za bilo koji proces (pa i elastično rasejanje) proporcionalan je matričnom elementu između početnog i konačnog stanja, tj.

$$\sigma\infty\,|\langle\psi_f\,|\,H\,|\,\psi_i\rangle|^2$$

gde je H operator jake interakcije koji ne razlikuje π^+ od π^- mezona usled nezavisnosti jakih interakcija od naelektrisanja, tj. ne razlikuje projekcije ukupnog izospina.

Dakle:

$$\langle 3/2\;3/2\,|\,H\,|\,3/2\;3/2\rangle=\langle 3/2\;1/2\,|\,H\,|\,3/2\;-1/2\rangle$$

tj.

$$\sigma(\pi^+p\to\pi^+p)\infty|\langle 3/2\;3/2\,|\,H\,|\,3/2\;3/2\rangle|^2$$

$$\sigma(\pi^-p\to\pi^-p)\infty\left|\frac{1}{3}\langle 3/2\;3/2\,|\,H\,|3/2\;3/2\rangle+\frac{2}{3}\langle 1/2-1/2\,|\,H|\,1/2\;1/2\rangle\right|^2$$

Zanemarujući rasejanje u stanju sa izospinom 1/2 imaćemo:

$$\frac{\sigma(\pi^+p\to\pi^+p)}{\sigma(\pi^-p\to\pi^-p)}=9.$$

RK12 Proton, neutron i Λ° čestica pripadaju barionskom oktetu te imaju barionski broj $B=1$, dok pioni imaju barionski broj 0. Pobrojane čestice osim Λ° nisu strane pa je njihova stranost $S=0$. Stranost čestice Λ° je — 1. Dakle, možemo da napravimo sledeću tabelu:

čestica	p	n	π°	π^-	K°	Λ°
hipernaelektrisanje	+1	+1	0	0	+1	0

Korišćenjem tabele lako je videti da održanje hipernaelektrisanja zabranjuje reakcije 2 i 3:

$$\pi^-+p\to\pi^\circ+\Lambda^\circ;\qquad n+p\to p+\Lambda^\circ$$

$$(0)+(1)\neq(0)+(0)\qquad(1)+(1)\neq(0)+(1)$$

RK13 $K\to\pi\pi$: Kako je spin piona 0 konzervacija momenta impulsa zahteva da spin K-mezona bude jednak relativnom momentu impulsa dva piona (L). S druge strane parnost dva piona je $(-1)^L$. Dakle spin i parnost K-mezona mogu da budu:

$$J^P=0^+,\,1^-,\,2^+,\,3^-,\,4^+,\ldots$$

Međutim, kako su pioni bozoni, stanja 1^- i 3^- nisu dozvoljena. Zaključujemo da raspad K-mezona na dva piona dozvoljava sledeća stanja:

$$J^P=0^+,\,2^+,\,4^+,\ldots$$

Analiza raspada $K\to 3\pi$ je nešto složenija. Tropionski sistem možemo da shvatimo kao dvopionski sistem sa relativnim momentom impulsa L plus treći pion sa momentom impulsa l u odnosu na dvopionski sistem. Parnost ovakvog sistema je:

$$(-1)^3\,(-1)^L\,(-1)^l=(-1)^{l+1}$$

pošto smo u dvopionskom sistemu videli da je L parno. Ukupni spin J tropionskog sistema leži u granicama:

$$|\,L-l\,|\leqslant J\leqslant|\,L+l\,|$$

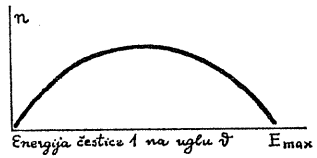
Konstruišimo sledeću tabelu:

L	l	J^P
0	0	0^-
0	1	1^+
0	2	2^-
2	0	2^-
2	1	$1^+,\,2^+,\,3^+$
⋮	⋮	⋮

Vidimo da je najniže moguće stanje zajedničko za dvo i tropionski sistem stanje 2^+ (što je u kontradikciji sa eksperimentalnim spinom 0!) Šta se odavde može zaključiti?

RK14 Slučaj a)

Usled konzervacije energije i impulsa čestice 1, 2 i 3 dele energiju na komplikovan način i pod datim uglom ϑ čestica 1 imaće kontinuiran spektar analogan, recimo, spektru elektrona u slučaju β-raspada, tj. nešto kao na slici.

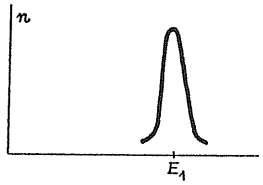


RK14a

Slučaj b)

Iako postoje tri čestice u finalnom stanju u prvom intermedijarnom procesu imamo običan dvočestični raspad u kome konzervacija energije i impulsa daje za česticu 1 pod datim uglom ϑ uvek tačno određenu energiju E_1. Rezonansa R, međutim,

živi veoma kratko; za vreme reda veličine njenog srednjeg života čestica 1 i rezonansa R neće se udaljiti van dometa jakih interakcija i energija čestice 1 će se usled ove interakcije »razmazati« oko srednje vrednosti energije E_1. Spektar čestice 1 izgledaće, dakle, kao na slici. Širina ove energetske distribucije indirektno govori o vremenu života rezonanse R. Oblik spektra čestice 1 nam, dakle, direktno govori o postojanju (odnosno nepostojanju) i osobinama rezonantnog stanja čestica 2 i 3.



RK14 8

RK15 Sa $\mathfrak{p}$ označimo četvorovektor impulsa čije su tri komponente dekartove komponente vektora impulsa $(\vec{p})$ a četvrta komponenta predstavlja »imaginarnu« energiju (iE) u jedinicama u kojima je $c=1$: $\vec{\mathfrak{p}}=(\vec{p}, iE)$. Kvadrat četvorovektora impulsa čestice predstavlja relativističku invarijantu, negativni kvadrat mase mirovanja čestice:

$$\mathfrak{p}^2=(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p})=-m^2.$$

Za raspad π^- biće:

$$\mathfrak{p}_\pi=\mathfrak{p}_\mu+\mathfrak{p}_\nu.$$

Kvadrirajmo jednom ovu jednačinu a drugi put je skalarno pomnožimo sa $\mathfrak{p}_\nu$:

$$\mathfrak{p}_\pi^2=\mathfrak{p}_\mu^2+\mathfrak{p}_\nu^2+2\,\mathfrak{p}_\mu\mathfrak{p}_\nu$$

$$\mathfrak{p}_\pi\mathfrak{p}_\nu=\mathfrak{p}_\mu\mathfrak{p}_\nu+\mathfrak{p}_\nu^2.$$

Oduzimanjem izraza dobijamo:

$$\mathfrak{p}_\pi\mathfrak{p}_\nu=\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_\pi^2-\mathfrak{p}_\mu^2+\mathfrak{p}_\nu^2).$$

Pošto se čestice razleću pod pravim uglom to je:

$$\mathfrak{p}_\pi\mathfrak{p}_\nu=|\vec{p}_\pi||\vec{p}_\nu|\cos(\vec{p}_\pi,\vec{p}_\nu)-E_\pi E_\nu=-E_\pi E_\nu.$$

Kako je, dalje:

$$\mathfrak{p}_\pi^2=-m_\pi^2;\quad \mathfrak{p}_\mu^2=-m_\mu^2;\quad \mathfrak{p}_\nu^2\simeq 0$$

tražena energija biće:

$$E_\nu=\frac{1}{2E_\pi}(m_\pi^2-m_\mu^2)=\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{2(T_\pi+m_\pi)}=22\text{ MeV}.$$

Koristeći ovaj formalizam za raspad $a\to b+c$, biće:

$$\mathfrak{p}_a=\mathfrak{p}_b+\mathfrak{p}_c;\quad \mathfrak{p}_b\cdot\mathfrak{p}_c=\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_a^2-\mathfrak{p}_b^2-\mathfrak{p}_c^2);$$

$$\mathfrak{p}_b\cdot\mathfrak{p}_c=p_b p_c\cos\theta_{bc}-E_b E_c$$

sa

$$p_b=|\vec{p}_b|\quad\text{i}\quad p_c=|\vec{p}_c|.$$

Tako je ugao između pravaca kretanja čestica b i c jednak:

$$\theta_{bc}=\arccos\frac{1}{2p_bp_c}(m_b^2+m_c^2-m_a^2+2E_bE_c)=$$

$$-\arccos\frac{m_b^2+m_c^2-m_a^2+2(T+m_b)(T+m_c)}{2T\sqrt{(T+2m_b)(T+2m_c)}}$$

uz $T=T_b=T_c=\dfrac{T_a+m_a-m_b-m_c}{2}$ (iz uslova zadatka i održanja energije).

RK16 Pošto su Q, T_3 i B aditivni kvantni brojevi najprostija veza između njih je linearna:

$$Q=c_1T_3+c_2B.$$

Izospinski dublet (p, n) sa osobinama datim u tablici može da posluži za određivanje konstanti c_1 i c_2. Smenom datih kvantnih brojeva dobija se sledeći sistem linearnih jednačina:

	Q	T_3	B
p	1	+1/2	1
n	0	−1/2	1

$$1=\frac{1}{2}c_1+c_2$$

$$0=-\frac{1}{2}c_1+c_2$$

sa rešenjima $c_1=1$ i $c_2=1/2$, odnosno:

$$Q=T_3+\frac{1}{2}B.$$

Ako se ovaj izraz primeni na izospinski triplet π-mezona sa $B=0$ dobijaju se njihovi tačni kvantni brojevi. Međutim, u slučaju izosingleta (Λ°) sa $B=1$ i $T_3=0$ biće $Q_\Lambda=1/2\neq 0$! Dakle, da bi se za sve članove izospinskog multipleta dobila korektna veza između ovih kvantnih brojeva potrebno je uvesti i jedan novi kvantni broj, nazovimo ga S, i uslovimo da ima celobrojne vrednosti. Tada je, za Λ°:

$$Q=T_3+\frac{1}{2}(B+S)$$

sa vrednošću $S=-1$. Ostali članovi multipleta, očigledno, moraju da imaju $S=0$. Vidimo da S predstavlja kvantni broj stranosti. Zbir $B+S=Y$ predstavlja kvantni broj koji nazivamo hipernabojem.

RK17 Količina elektriciteta je

$$Q=CV=10^{-12}\text{ C}$$

Ako je N=broj jona/cm³ s onda se ova količina elektriciteta neutrališe jonima stvo renim za vreme t:

$$Q=NeZt, \text{ gde je } Z\text{-zapremina komore, tj. } N=Q/eZt$$

$$N\cong 2{,}75 \text{ jonskih parova/cm}^3\text{s}$$

RK18 Neka mion prelazi put L. Krećući se brzinom $v=\beta c$ za to mu je potrebno vreme $t=L/\beta c$ i verovatnoća da se na tom putu ne raspadne iznosi:

$$W(L)=e^{-t/\tau}=e^{-L/\beta c\tau}=e^{-L/L_{\text{rasp}}}$$

gde je put na kome je najverovatnije da će se mion raspasti (»decay length«) jednak

$$L_{\text{rasp}}=\beta c\tau=\frac{\beta c\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\beta c\tau_0 E_\mu}{m_\mu c^2} \quad \left(\text{uz } E_\mu=\frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Dakle, da raspad ne bi uticao na apsorpciju miona potrebno je da bude ispunjen uslov:

$$L_{\text{rasp.}}\gg L$$

Put L određuje se jonizacionim gubicima: $L=R_0/\rho$ gde je R_0 domet miona u sredini jedinične gustine a ρ gustina date sredine. Tako dobijamo uslove:

$$\frac{R_0/\rho}{\beta c\tau_0 E_\mu/m_\mu c^2}\ll 1 \quad \text{tj.} \quad \rho\gg\frac{R_0 m_\mu c^2}{E_\mu \beta c\tau_0}$$

Ako je $\beta c\cong c$, tj. $E_\mu\gg m_\mu c^2$, tada je E_μ/R_0=gubitak energije po jed. puta = 2 MeV/ /g/cm², $\tau_0=2{,}15\times 10^{-6}$s a $m_\mu c^2=105{,}6$ MeV. Konačno za traženi uslov dobijamo:

$$\rho\gg 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

što je uslov da raspad miona ne utiče bitno na apsorpciju pri prolasku kroz sredinu gustine ρ. Sva tečna i čvrsta tela zadovoljavaju ovaj uslov ali gasovi pod normalnim uslovima, konkretno vazduh, ne!

RK19 Broj miona koji se raspadnu u intervalu vremena od 0 do t jednak je:

$$N_t=N_0-N=N_0(1-e^{-t/\tau})$$

Imamo dakle:

$$\frac{N_2}{N_6}=\frac{1-e^{-2/\tau}}{1-e^{-6/\tau}}=\frac{200}{310}=0{,}645$$

odakle smenom $e^{-2/\tau}=x$ dobijamo

$$\tau=2{,}15\ \mu\text{s}$$

RK20 Sa slike se nalazi veza:

$$x=r\cos\lambda\sin\varphi$$

$$y=r\cos\lambda\cos\varphi$$

$$z=r\sin\lambda$$

a odavde dx, dy i dz i, uz malo računa, kvadrat elementarnog pomeranja

$$(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=$$

$$=(dr)^2+r^2(d\lambda)^2+r^2\cos^2\lambda(d\varphi)^2=$$

$$=\vec{dl}\cdot\vec{dl} \text{ odakle konačno dobijamo:}$$

$$\vec{dl}=dr\,\vec{e}_r+r\,d\lambda\,\vec{e}_\lambda+r\cos\lambda\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Potražimo, zatim, oblik operatora nabla u geomagnetskim koordinatama (∇_g). Uradimo ovo preko gradijenta skalarne funkcije. Totatlni diferencijal funkcije U je

$$dU=\frac{\partial U}{\partial r}dr+\frac{\partial U}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial U}{\partial\varphi}d\varphi=\nabla_g U\cdot\vec{dl}=A_r\,dr+A_\lambda\,r\,d\lambda+A_\varphi\,r\cos\lambda\,d\varphi$$

gde smo gradijent označili kao $\nabla_g U=A_r\vec{e}_r+A_\lambda\vec{e}_\lambda+A_\varphi\vec{e}_\varphi$

Upoređivanjem odavde nalazimo:

$$\nabla_g=\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{e}_\lambda+\frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Sada možemo naći konkretan oblik vektor-potencijala:

$$\vec{A}=-\vec{\mu}\times\nabla\frac{1}{r}=-\mu\vec{k}\times\nabla_g\frac{1}{r}=-\mu(\sin\lambda\,\vec{e}_r+\cos\lambda\,\vec{e}_\lambda)\times\left(-\frac{1}{r^2}\vec{e}_r\right)=\frac{\mu\cos\lambda}{r^2}\vec{e}_\varphi$$

Zatim nalazimo vektor magnetnog polja (u vakuumu); Zamenom u izraz za *rot* u sfernim koordinatama $\lambda=\pi/2-\vartheta$:

$$\vec{H}=\nabla_g\times\vec{A}=\text{rot}\,\vec{A}=\frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\cos\lambda A_\varphi)\vec{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\vec{e}_\lambda=$$

$$=\frac{\mu}{r^3}(\cos\lambda\,\vec{e}_\lambda-2\sin\lambda\,\vec{e}_r).$$

Vidimo da polje opada sa kubom rastojanja, dakle, veoma brzo. Na ekvatoru ($\lambda=0$) ovo polje ima vrednost $\vec{H}_e\cong 0{,}3$ gauss, leži u meridijanskoj ravni tangencijalno na meridijanski krug (magnetni) a usmereno je prema severu. Isto tako lako nalazimo da na polovima ($\lambda=\pm\pi/2$) ono iznosi $H_p\cong 0{,}6$ gaussa (duplo jače no na ekvatoru) i da je normalno na površinu Zemlje.

Vektor brzine čestice u geomagnetnim koordinatama nalazimo odmah iz izraza za $\vec{dl}$:

$$\vec{v}=\dot{\vec{dl}}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\lambda}\vec{e}_\lambda+r\cos\lambda\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Sada lako nalazimo lagranžijan u ovim koordinatama:

$$\mathcal{L} = -Mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Ze}{c}\frac{\mu\cos\lambda}{r}\cos\dot{\varphi}$$

Vidimo da je ovo nezavisno od φ pa iz Lagrange-ove jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

zaključujemo da je $p_\varphi = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$ zaista konstanta kretanja. Nađimo vrednost komponente p_φ:

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = -Mc\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{c^2-v^2}\,\frac{\partial v}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{Ze}{c}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r}$$

$$= M\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\partial v}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{Ze}{c}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r}$$

uz $v=(\dot{r}^2+r^2\dot{\lambda}^2+r^2\cos^2\lambda\,\dot{\varphi}^2)^{1/2}$ ovo je dalje

$$p_\varphi = M\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{r^2\cos^2\lambda\,\dot{\varphi}}{v} + \frac{Ze}{c}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r}$$

a kako je $p = \dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ to je konačno:

$$p_\varphi = p\left\{\frac{r^2\cos^2\lambda}{v}\cdot\dot{\varphi} + \frac{Ze}{pc}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r}\right\}$$

i

$$b = \frac{p_\varphi}{p} = \frac{r^2\cos^2\lambda}{v}\cdot\dot{\varphi} + \frac{Ze}{pc}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r} = \text{const.}$$

što je traženi izraz za ovu konstantu kretanja. Ako sada uvedemo ugao $\gamma = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{e}_\varphi)$ tj.

$$\cos\gamma = \frac{v_\varphi}{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_\varphi}{v} = \frac{r\cos\lambda}{v}\cdot\dot{\varphi}$$

imaćemo konačno:

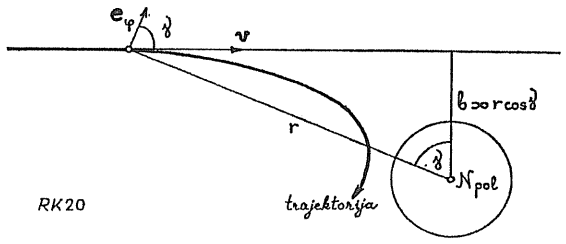
$$b = \frac{p_\varphi}{p} = r\cos\lambda\cos\gamma + \frac{Ze}{pc}\mu\frac{\cos^2\lambda}{r} = \text{const}\ \ [\text{cm}].$$

što i predstavlja Störmerovu teoremu. Veličina b očigledno ima dimenzije dužine. Ova teorema, malo modifikovana (videti sledeći zadatak) glavno je oruđe u ispitivanju ponašanja kosmičkih zračenja u okolini Zemlje. Prvi član u ovom izrazu naziva se kinematičkim a drugi magnetnim.

Značenje veličine b vidi se jasno ako posmatramo kretanje čestice u ekvatorijalnoj ravni ($\lambda=0$) dok je na tako velikom rastojanju r da je magnetni član u Störmerovoj teoremi zanemarljiv. Iz teoreme je tada

$$b \approx r\cos\gamma$$

tj. b je »parametar sudara« čestice sa Zemljom što se vidi i na slici



RK20

RK21 Veličina $\mathfrak{M}$ ima dimenzije energija/naelektrisanje ili gauss × cm a magnetni moment μ, erg/gauss, tako da izraz $(\mu/\mathfrak{M})^{1/2}$ ima dimenzije dužine. Sva rastojanja, i r i b, biće, dakle, u ovim jedinicama bez dimenzija. Konkretno, Störmerova teorema sada glasi:

$$b = r\cos\lambda\cos\gamma + \frac{\mu}{\mathfrak{M}}\frac{\cos^2\lambda}{r}\Big/:\sqrt{\frac{\mu}{\mathfrak{M}}} \Rightarrow B = R\cos\lambda\cos\gamma + \frac{\cos^2\lambda}{R} = \text{const}$$

gde je

$$R = r/\sqrt{\mu/|\mathfrak{M}|}$$

rastojanje u *St* (velikim slovima označavamo veličine izražene u *St*). Znak + ili — odgovara pozitivnim odnosno negativnim česticama.

RK22 Izrazimo $\cos\gamma$ iz Störmerove teoreme:

$$\cos\gamma = \frac{B \mp \dfrac{\cos^2\lambda}{R}}{R\cos\lambda} = \frac{B}{R\cos\lambda} \mp \frac{\cos\lambda}{R^2} = \pm 1$$

što daje traženi uslov za granicu između dozvoljenih i zabranjenih oblasti. Rešimo ovu jednačinu po R:

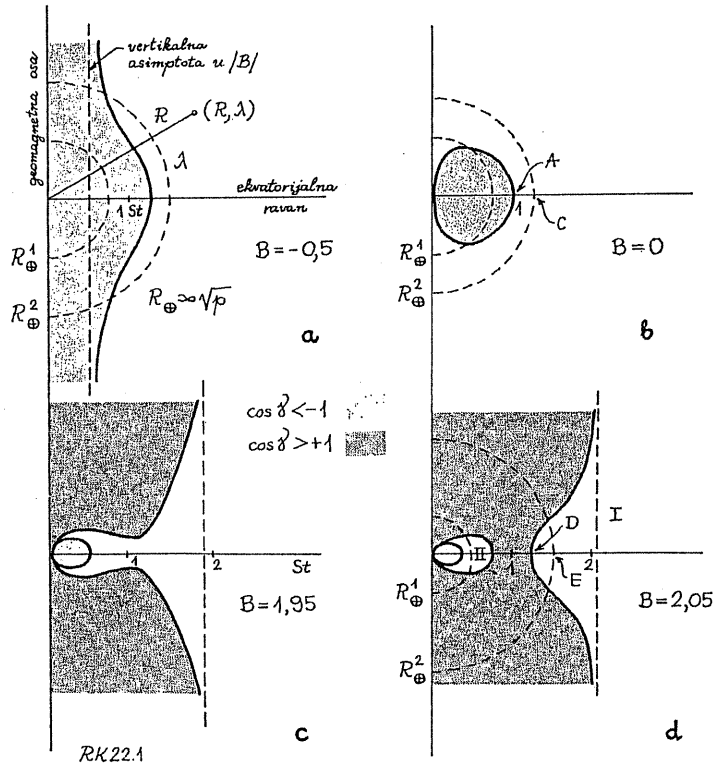
$$R_{12}^{\text{gran}} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4\,\delta\cos^3\lambda}}{\pm 2\cos\lambda}$$

ako je $z>0$, $\delta = \mp 1$, a ako je $z<0$ $\delta = \pm 1$, gde gornji znaci odgovaraju $\cos\gamma = +1$ a donji $\cos\gamma = -1$.

Pošto posmatramo samo pozitivne čestice (primarni zraci su uglavnom protoni, alfa ili laka jezgra) konačno:

$$R_{12}^{\text{gran}} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 \mp 4\cos^3\lambda}}{\pm 2\cos\lambda}$$

Prostim traženjem vrednosti R^{gran} menjajući λ u koracima po, recimo, 10°, dobijamo u polarnom R, λ dijagramu, za dato B, granice između zabranjenih i dozvoljenih oblasti. Sa potrebnim definicijama i oznakama ove su prikazane na slici RK22.1.



RK22.1

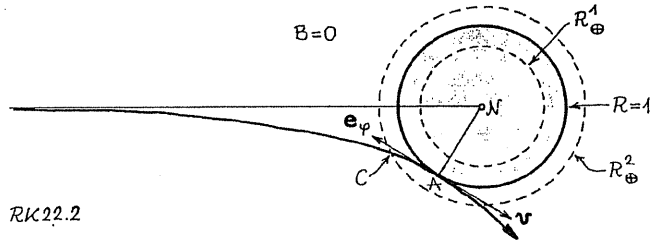
Zbog višeznačnosti funkcije treba paziti da se ne propusti neko od rešenja. Analizirajmo sada slučajeve kretanja pozitivnih čestica u ekvatorijalnoj ravni ($\lambda=0$) za vrednosti $B=0$ i $B=2{,}05$. Za $\lambda=0$ i $Z>0$ Störmerov integral poprima prost oblik:

$$R\cos\gamma+\frac{1}{R}=B$$

U slučaju da je $B=0$, »sudar« je centralni, i magnetno polje Zemlje skreće česticu na istok jer u perihelu (najbližoj tački centru Zemlje, na slici RK22.2 to je tačka A) ona dodiruje zabranjenu oblast na granici u kojoj je $\cos\gamma=-1$. Gornja jednačina

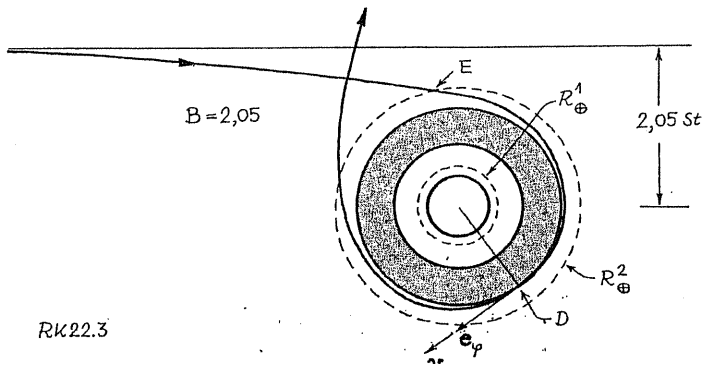
nam potvrđuje da je za ovu tačku $R=1$ što se slaže sa sl. RK22.1b. Ako je energija čestice tolika da je za nju $R_\oplus=R^1_\oplus$ (videti i sl. RK22.1b) tada čestica ni ne može da dostigne površinu Zemlje;

(Isto je i za negativne čestice ako B promeni znak i šrafirane oblasti zamene mesta) Vidimo, dakle, dve vrste dozvoljenih oblasti; I i II, i to samo za vrednosti $B\geqslant 2$ Kosmička čestica ne može da prodre u oblast II; u nju može da dospe samo čestica koja je na neki način tamo ubačena sa Zemlje (recimo visinska nuklearna eksplozija); čestica će opisati celu trajektoriju prikazanu na sl. RK22.2. Ako čestica pak »vidi« Zemlju radijusa $R^2_\oplus$ (ima znači veću energiju jer je $R_\oplus\infty 1/\sqrt{p}$) tada će trajektorija preseći površinu Zemlje u tački C; u drugoj tački preseka čestica nije observabilna. Ovaj se efekat naziva »efektom senke«. (Upadni ugao čestice na površinu Zemlje očigledno je funkcija njene energije i on se lako nalazi).



RK22.2

Sa slike RK22.1 vidimo da za slučaj $B=2{,}05$ postoje dve zabranjene (i dve dozvoljene) oblasti šrafirane i na sl. RK22.3 u ekvatorijalnoj ravni. Čestica koja iz beskonačnosti dolazi sa ovolikim parametrom sudara mora da ostane u spoljašnjoj dozvoljenoj oblasti. Na granici ove oblasti je, međutim, $\cos\gamma=1$ pa čestica skreće na zapad dodirujući zabranjenu oblast u tački D (perihel). Ako je energija čestice



RK22.3

tolika da je za nju $R_\oplus = R_\oplus^2$ tada će ona udariti u površinu Zemlje u tački E. Ako joj je, pak, $R_\oplus = R_\oplus^1$ (koji takođe leži u dozvoljenoj oblasti, ali ovaj put unutrašnjoj) čestica neće dostići površinu Zemlje već će opisati celu prikazanu trajektoriju.

RK23 Ako je, dakle, $R_\oplus < 1$ tada prvo moramo da nađemo B da bismo doneli definitivan zaključak o opservabilnosti čestice. Ako je naš izbor za γ dao $B<2$ »čeljusti« zabranjene oblasti neće se zatvoriti (kao na sl. RK22.1c gde postoji samo jedna dozvoljena oblast) i čestica će ipak biti opservabilna. Ako je, pak, γ suviše malo dobićemo, ispod neke granične vrednosti za γ, da je $B>2$ i, kako je $R_\oplus<1$, čestica neće biti opservabilna. Potreban uslov opservabilnosti je dakle da bude: $B<2$ za pozitivne i $B>-2$ za negativne čestice, tj., da je:

$$\cos\gamma < \frac{2}{R_\oplus \cos\lambda} - \frac{\cos\lambda}{R_\oplus^2} \quad (Z>0) \qquad \Big| \qquad \cos\gamma > \frac{-2}{R_\oplus \cos\lambda} + \frac{\cos\lambda}{R_\oplus^2} \quad (Z<0)$$

Pošto je, za $0<\gamma<\pi$, $\cos\gamma$ opadajuća funkcija vidimo da je minimalni ugao koji brzina sme da zaklapa sa pravcem zapada da bi pozitivna čestica bila opservabilna (maksimalni za negativne čestice) jednak:

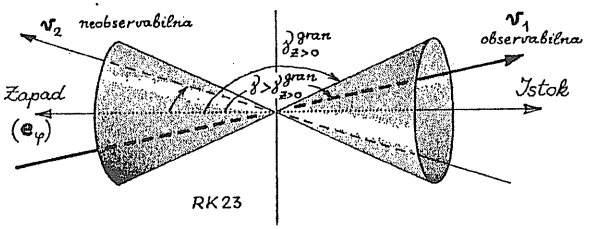
$$\cos\gamma_{z>0}^{\text{gran}} = \frac{2}{R_\oplus \cos\lambda} - \frac{\cos\lambda}{R_\oplus^2} \qquad \Big| \qquad \cos\gamma_{z<0}^{\text{gran}} = \frac{-2}{R_\oplus \cos\lambda} + \frac{\cos\lambda}{R_\oplus^2}$$

Ovaj uslov definiše za česticu date energije (impulsa) i dato mesto na Zemlji (dato λ) takozvani konus opservabilnih trajektorija. Nađimo kako izgleda ovaj snop opservabilnih trajektorija za dati slučaj.

Iz K22 imamo da je:

$$R_\oplus = 0{,}13\sqrt{\frac{pc\,(\text{GeV})}{|Z|}} \simeq 0{,}235\ \text{St} \qquad (<1\,!)$$

pa zamenom u gornju jednačinu dobijamo $\gamma_{z>0}^{\text{gran}} \simeq 145°$. Ova je situacija prikazana na sl. RK23 gde je prikazan konus opservabilnih trajektorija kao i dve trajektorije za primer. Trajektorija $\vec{v}_1$, čestica koja dolazi sa zapada, biće opservabilna, a trajektorija $\vec{v}_2$, čestica koja dolazi sa istoka, neće dovesti proton ovog impulsa na datu geografsku širinu. Iako je, dakle, distribucija protona i ovog impulsa (kao i svih ostalih) izotropna u prostoru, na Zemlji će se opaziti izvesna asimetrija; intenzitet



zračenja sa zapada prevazilazi intenzitet zračenja sa istoka. To je tzv. pojava zapad-no-istočne asimetrije, jedne od najizrazitijih pojava u vezi sa kosmičkim zracima u blizini Zemlje, koju smo, evo, uspešno objasnili primenom Störmerove teoreme.

RK24 Iz relacije $R_\oplus = 0{,}13\sqrt{pc\,(\text{GeV})/|Z|}$ nalazimo da je:

$$pc\,(\text{GeV}) \cong 60\,Z\,R_\oplus^2$$

pa uslove date u zadatku odmah možemo pisati kao:

$$p_{z>0} > 60Z\left\{\frac{1-\sqrt{1\cos\gamma\cos^3\lambda}}{\cos\gamma\cos\lambda}\right\}^2\left(\frac{\text{GeV}}{c}\right) \qquad \Big| \qquad p_{z<0} > -60Z\left\{\frac{1-\sqrt{1-\cos(\pi-\gamma)\cos^3\lambda}}{\cos(\pi-\gamma)\cos\lambda}\right\}^2.$$

Ovo su dakle uslovi koje impuls čestice mora da zadovolji da bi čestica dostigla površinu Zemlje na širini λ ako u odnosu na pravac zapada trajektorija čini ugao γ. U specijalnom slučaju kretanja u meridijanskoj ravni ($\cos\gamma=0$) ovo se pojednostavljuje:

Za male vrednosti $\cos\gamma$ biće

$$\{1-(1-\cos\gamma\cos^3\lambda)^{1/2}\}^2 \simeq \frac{1}{4}\cos^2\gamma\cos^6\lambda$$

tj.

$$p > 15\,|Z|\cos^4\lambda\ (\text{GeV}/c)$$

Nađimo sada granične vrednosti impulsa po ovim izrazima za čestice koje dolaze sa zapada ($\cos\gamma=-1$), iz zenita ($\cos\gamma=0$) i sa istoka ($\cos\gamma=1$) za tačke na geomagnetnim širinama $\lambda=0°$ (ekvator), 30°, 45°, 60° i 90° (na magnetnim polovima).

Čestica dolazi iz pravca	Granični impuls (GeV/c)				
ZAPADA	10	6,4	3,1	0,9	0
ZENITA	15	8,5	3,7	0,93	0
ISTOKA	60	13,4	4,6	1,0	0
Geomagnetna širina λ	0°	30°	45°	60°	90°

Ovim već u potpunosti možemo da objasnimo »efekt širine«; na polovima je granični impuls jednak nuli, svaka čestica dostiže površinu Zemlje. Na ekvatoru, pak, ova je granica znatno viša i, ma kakav bio spektar primarnog zračenja, u delu sa energijama do ~60 GeV primetiće se razlika u intenzitetu zračenja na polovima i na ekvatoru. Posmatrajući totalne intenzitete efekat je na nivou mora relativno mali, reda procenta.

Posmatramo li sada uslove opservabilnosti čestice za $\cos\gamma$ iz prošlog zadatka vidimo da ovi poprimaju identičnu formu ako se u uslovu za negativne čestice γ zameni sa $\pi-\gamma$ ($\cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$). Znači da konus opservabilnih trajektorija za negativne čestice izgleda potpuno isto kao onaj za pozitivne (sl. RK23) samo što je zapad zamenjen istokom. Ako, dakle, merimo veći intenzitet primarnog zračenja iz pravca zapada tada je ono sastavljeno pretežno od pozitivnih čestica a ako je obratno onda su glavna komponenta negativne čestice. Ovo prvo je, kao što je već rečeno, realna situacija.

Tako smo, konačno, prostom primenom Störmerove teoreme uspeli da objasnimo dva najizrazitija efekta u vezi sa kosmičkim zračenjem u blizini površine Zemlje — efekt širine i pojavu zapadno-istočne asimetrije; dve pojave koje lokalno narušavaju verovatnu izotropiju kosmičkog zračenja u velikim oblastima svemira. Pokazalo se da i u većim razmerama, recimo galaktičkim, magnetna polja imaju bitnu ulogu u formiranju prostornog rasporeda materije i da su odgovorna za mnoge astrofizičke pojave, od kojih je možda najvažnija baš akceleracija naelektrisanih čestica kosmičkog zračenja do ovako visokih energija koje opserviramo.

RK25 U ovakvoj situaciji energija dodata sistemu ide samo na povećanje unutrašnje energije sistema, $U\,(p\,dV=0)$ pa konstantnost

$$C_V=\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V=\text{const.}}$$

znači da se sa porastom temperature povećava kinetička energija čestica sistema. Porast C_V sa temperaturom, pak, znači da se dodata energija koristi i u druge svrhe — za povećanje broja čestica (disocijacija, jonizacija i konačno kreacija novih čestica kao najefikasniji način za gubitak, odnosno transformaciju, energije u masu). Promena C_V sa $(5/2)\,R$ na $3\,R$ uzrokovana je disocijacijom 1 mola molekula sa po 5 stepeni slobode u dva mola atomskog gasa sa po 3 stepena slobode po atomu (pošto na stepen slobode po molu dolazi $(1/2)\,R$). Jonizacija dalje udvostručava broj čestica i C_V postaje jednako $6\,R$. Procesi koji na ovaj način povećavaju broj čestica, dakle, služe kao termostati koji sprečavaju povećanje temperature. Ako grubo uzmemo da se svaki od ovih procesa počinje da odvija kada temperatura postane jednaka

$$T=\frac{E}{k}$$

gde je E energija praga karakteristična za dati proces koji povećava broj čestica, odnosno ako zanemarimo Maxwell-Boltzmannovsku distribuciju po energijama i gledamo samo srednje vrednosti (videti zadatak E33), tada u procesima tipa

$$p+p\longrightarrow p+n+\pi^+ \qquad \text{i}$$

$$p+p\longrightarrow p+p+\pi^\circ$$

kreacija piona počinje na temperaturi reda

$$T\simeq\frac{m_\pi c^2}{k}\simeq 1{,}5\times 10^{12}\,\text{K}.$$

Tako zaključujemo da se srednja kinetička energija ne može dići iznad $m_\pi c^2\simeq$ $\simeq 135$ MeV, tj. temperatura iznad gornje vrednosti, i da dalje dodavana energija biva transformisana u masu novih čestica. To je konačni termostat u kome se na ovoj maksimalnoj temperaturi u skladu sa boltzmanovskom ekviparticijom energije (i mase) nalaze zastupljene sve moguće elementarne čestice (eksponencijalni pad obilnosti čestica težih masa). Novo dodavanje energije samo dovodi do porasta njihovog broja — do kreacije celog novog univerzuma!

Dodatak

TABLICA FIZIČKIH KONSTANTI

	SIMBOL	TAČNA VREDNOST	PRIBLIŽNA VREDNOST
Brzina svetlosti	c	299792458 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ (tačno)	3×10^{8} CGS
Planckova konstanta	h	$6{,}626176(36)\times10^{-34}\mathrm{JHz^{-1}}$	$6{,}6\times10^{-27}$ CGS
	$\hbar$	$1{,}0545887(57)\times10^{-34}$ Js	$6{,}6\cdot10^{-22}\mathrm{MeV\cdot s}$
	$\hbar c$		2×10^{-11} MeV cm
Konstanta fine strukture	$\alpha=e^2/\hbar c$	0,0072973506(60)	1/137
	α^{-1}	137,03604(11)	137
Elementarno naelektrisanje	e	$1{,}6021892(46)\times10^{-19}$ C	$4{,}8\times10^{-10}$ CGS
	e^2	$\alpha\hbar c$	$\alpha\hbar c$
Gravitaciona konstanta	γ	$6{,}6720(41)\times10^{-11}\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}}$	$6{,}7\times10^{-11}$ SI
Masa elektrona	m_e	$9{,}109534(47)\times10^{-31}$ kg	9×10^{-28} CGS
	m_ec^2		0,511 MeV
Masa protona	m_p	$1{,}6726485(86)\times10^{-27}$ kg	938 MeV
Bohrov magneton	$\mu_B=e\hbar/2\,m_e$	$9{,}274078(36)\times10^{-24}\mathrm{JT^{-1}}$ $5{,}788378(9)\times10^{-9}$ eV $\mathrm{G^{-1}}$	$5{,}8\times10^{-9}$ eV $\mathrm{G^{-1}}$
Nuklearni magneton	$\mu_N=e\hbar/2\,m_p$	$5{,}050824(20)\times10^{-27}\mathrm{JT^{-1}}$ $3{,}1524515(53)\times10^{-12}\mathrm{eVG^{-1}}$	$3{,}1\times10^{-12}$ eV $\mathrm{G^{-1}}$

	SIMBOL	TAČNA VREDNOST	PRIBLIŽNA VREDNOST
Spinski g-faktor elektrona	g_e	$2\times1{,}0011596567(35)$	2
Spinski g-faktor miona	g_μ	$2\times1{,}00116616(31)$	2
Odnos μ_e/μ_p	μ_e/μ_p	658,2106880(66)	658
Permeabilnost vakuuma	$\mu_0=1/\varepsilon_0c^2$	4×10^{-7} Hm^{-1}	
Boltzmannova konstanta	k	$1{,}380662(44)\times10^{-23}$ JK^{-1}	
		$0{,}861735(28)\times10^{-4}$ eVK^{-1}	$0{,}86\times10^{-4}$ eVK^{-1}
Stefan-Boltzmannova konstanta	σ	$5{,}67032(71)\times10^{-8}$ Wm^2 K^{-4}	$5{,}67\times10^{-8}$ SI
Avogadrov broj	N_{AV}	$6{,}022045(31)\times10^{23}$ mol^{-1}	6×10^{23} mol^{-1}
Atomska jedinica mase			
(10^{-3} kg mol^{-1}) N_{AV}	ajm	$1{,}6605655(86)\times10^{-27}$ kg	$1{,}66\times10^{-24}$ CGS
		931,5016(26) MeV	931,5 MeV
Normalna zapremina idealnog gasa	V_N	$22{,}41383(70)\times10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	$22{,}4\times10^{-3}$ SI
Bohrov radijus	$a_0=\hbar/m_ec\alpha$	$0{,}52917706(44)\times10^{-10}$ m	$0{,}53\times10^{-8}$ CGS
Comptonova talasna dužina elektrona	$\lambda_e^*=\alpha\, a_0$	$0{,}38615905(64)\times10^{-12}$ m	$3{,}9\times10^{-10}$ CGS
Klasični radijus elektrona	$r_e=\alpha^2\, a_0$	$2{,}8179380(70)\times10^{-15}$ m	$2{,}8\times10^{-13}$ CGS

	SIMBOL	TAČNA VREDNOST	PRIBLIŽNA VREDNOST
Thomsonov presek	$\frac{8\pi}{3}r_e^2$	0,6652448(33) b	0,66 b
elektron-volt	eV	$1{,}6021892(46)\times10^{-19}$ J	$1{,}6\times10^{-12}$ CGS
barn	b	10^{-24} cm^2	10^{-24} cm^2
1 čas	h	3600 s	
1 dan	d	86400 s	
1 godina	g	$3{,}156\times10^7$ s	$\pi\times10^7$ s
1 eon		10^9 godina	
Srednji radijus Zemlje	$r_\oplus$	$6{,}371\times10^6$ m	$6{,}4\times10^6$ m
Astronomska jedinica	AJ		$1{,}5\times10^{13}$ cm
Masa Sunca	$M_\odot$	$1{,}99\times10^{33}$ g	2×10^{33} g
Radijus Sunca	$R_\odot$	$6{,}96\times10^{10}$ cm	7×10^{10} cm
Luminoznost Sunca	$L_\odot$	$3{,}9\times10^{33}$ erg s^{-1}	4×10^{33} erg s^{-1}

NAPOMENE: 1) Proizvod konstanti $\hbar c\simeq2\times10^{-11}$ MeV cm i $e^2=\alpha\,\hbar c$ veoma je pogodan za nalaženje konkretnih brojnih vrednosti.
2) Brojevi u zagradama u koloni »tačnih vrednosti« označavaju grešku date konstante na onoliko zadnjih mesta vrednosti konstante koliko cifara greška sadrži.

TABLICA

Redni broj Z — Simbol — (opseg A izotopa datog elementa) — A najobilnijeg stabilnog izotopa

1	H(1—3)1	35	Br(74—90)79	71	Lu(155—180)175
2	He(3—7)4	36	Kr(74—95)84	72	Hf(157—183)180
3	Li(6—9)7	37	Rb(79—95)85	73	Ta(172—186)181
4	Be(7—11)9	38	Sr(80—95)88	74	W(175—189)184
5	B(8—13)11	39	Y(82—96)89	75	Re(177—191)187
6	C(10—16)12	40	Zr(85—99)90	76	Os(181—195)192
7	N(12—17)14	41	Nb(89—101)93	77	Ir(182—198)193
8	O(14—20)16	42	Mo(90—105)98	78	Pt(184—201)195
9	F(17—21)19	43	Tc(92—105)nema	79	Au(186—203)197
10	Ne(17—24)20	44	Ru(93—108)102	80	Hg(187—206)202
11	Na(20—26)23	45	Rh(96—110)103	81	Tl(191—210)205
12	Mg(22—28)24	46	Pd(98—115)106	82	Pb(194—214)208
13	Al(24—30)27	47	Ag(102—117)107	83	Bi(196—215)209
14	Si(26—32)28	48	Cd(103—119)114	84	Po(192—218)nema
15	P(28—34)31	49	In(106—124)115	85	At(201—219)nema
16	S(30—38)32	50	Sn(108—132)120	86	Rn(204—224)nema
17	Cl(32—40)35	51	Sb(112—135)121	87	Fr(204—224)nema
18	Ar(35—42)40	52	Te(114—135)130	88	Ra(213—230)nema
19	K(37—47)39	53	I(117—139)127	89	Ac(221—231)nema
20	Ca(38—49)40	54	Xe(121—144)132	90	Th(223—235)nema
21	Sc(40—50)45	55	Cs(123—144)133	91	Pa(225—237)nema
22	Ti(43—51)48	56	Ba(125—144)138	92	U(227—240)nema
23	V(45—54)51	57	La(124—144)139	93	Np(231—241)nema
24	Cr(46—56)52	58	Ce(131—148)140	94	Pu(232—246)nema
25	Mn(50—58)55	59	Pr(134—147)141	95	Am(237—246)nema
26	Fe(52—61)56	60	Nd(138—151)142	96	Cm(238—250)nema
27	Co(54—64)59	61	Pm(141—154)nema	97	Bk(234—250)nema
28	Ni(56—66)58	62	Sm(141—157)152	98	Cf(244—254)nema
29	Cu(58—68)63	63	Eu(144—160)153	99	Es(245—256)nema
30	Zn(60—72)64	64	Gd(145—162)158	100	Fm(248—257)nema
31	Ga(63—76)69	65	Tb(147—164)159	101	Md(255—256)nema
32	Ge(65—78)74	66	Dy(149—167)164	102	No(254—256)nema
33	As(68—85)75	67	Ho(151—170)165	103	Lw(257) nema
34	Se(70—85)80	68	Er(152—172)166	104	Ku(260) nema
		69	Tm(153—176)169		
		70	Yb(154—177)174		

Neke atomske mase: (u ajm)

e	0,0005486	^{7}Be	7,016929
n	1,008665	^{8}Be	8,005308
p	1,007276	^{12}C	12,000000
^{1}H	1,007825	^{13}C	13,003354
^{2}H	2,014102	^{13}N	13,005738
^{3}H	3,016050	^{14}N	14,003074
^{3}He	3,016030	^{15}N	15,000108
^{4}He	4,002603	^{15}O	15,003071
^{7}Li	7,016004	^{28}Al	27,981907

Semiempirijska formula za energiju veze jezgra je:

$$B(Z, A)\,(\mathrm{MeV}) = 14{,}0\,A - 13{,}0\,A^{2/3} - 0{,}584\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 19{,}3\,\frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{33{,}5}{A^{3/4}}\,\delta;$$

$$\text{gde je } \delta = \begin{cases} +1 \text{ za parno } A \text{ i } Z \\ 0 \text{ za neparno } A \\ -1 \text{ za parno } A, \text{ neparno } Z \end{cases}$$

Semiempirijska formula za masu jezgra je:

$$M(Z, A) = Zm_p + (A-Z)\,m_n - \frac{1}{c^2}\,B(Z, A)$$

$$\equiv Zm_p + (A-Z)\,m_n - \frac{1}{c^2}\left\{a_v\,A - a_s\,A^{2/3} - a_c\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a\,\frac{(A-2Z)^2}{A} + \Delta\right\}.$$

Neke potrebne gustine:

ρ vazduha $= 1{,}29 \times 10^{-3}$ gcm^{-3} (22% O_2 i 78% N_2)

$\rho_{Fe} = 7{,}8$ g cm^{-3}

$\rho_{Al} = 2{,}7$ g cm^{-3}

$\rho_{Ag} = 10{,}5$ g cm^{-3}

$\rho_{Cu} = 8{,}9$ g cm^{-3}

$\rho_{Pb} = 11{,}3$ g cm^{-3}

$\rho_{Cd} = 8{,}65$ g cm^{-3}

TABLICA NAJSTABILNIJIH ELEMENTARNIH ČESTICA

Čestica		Simbol čest. | antič	Masa MeV	Masa m_e	Srednji život (s)	Spin ($\hbar$)	Naboji elektr. e	Naboji lept. L	Naboji barionski B	Izospin T	Izospin Tz	Stranost S	Glavni način raspada (%)	Kinetička Energija raspada: Q (MeV)
Leptoni	Foton	γ	0	0	∞	1	0	0	0					
	e-neutrino	ν_e $\tilde{\nu}_e$	$<2\times10^{-4}$		∞	1/2	0	+1	0					
	μ-neutrino	ν_μ $\tilde{\nu}_\mu$	<2		∞	1/2	0	+1	0					
	elektron	e^- e^+	0,511	1	∞	1/2	−1	+1	0					
	Mion	μ^- μ^+	105,66	206,77	$2{,}2\times10^{-6}$	1/2	−1	+1	0				$e^-\tilde{\nu}_\mu\,\nu_e$ (100)	105
Hadroni	Pioni	π^+ π^-	139,6	273,2	$2{,}6\times10^{-8}$	0	+1	0	0	1	+1	0	$\mu^+\nu_\mu$ (100)	34
		π^0	135,0	264,2	10^{-16}	0	0	0	0	1	0	0	$\gamma\gamma$ (99)	135
	Kaoni	K^+ K^-	493,8	966,3	$1{,}23\times10^{-8}$	0	+1	0	0	1/2	+1/2	+1	$\mu^+\nu_\mu$ (64)	388
		K^0 $\tilde{K}^0$	498,0	974,5	$K_1^0\sim10^{-10}$	0	0	0	0	1/2	−1/2	+1	$\pi^+\pi^-$ (69)	219
					$K_2^0\sim6\times10^{-8}$								$\pi^0\pi^0\pi^0$ (25)	93
Barioni	proton	p $\tilde{p}$	938,28	1836,15	∞	1/2	+1	0	+1	1/2	+1/2	0		
	neutron	n $\tilde{n}$	939,57	1838,6	$\sim10^3$	1/2	0	0	+1	1/2	−1/2	0	$pe^-\tilde{\nu}_e$ (100)	0.78
Hiperoni	lambda	Λ $\tilde{\Lambda}$	1115,5	2183	$2{,}5\times10^{-10}$	1/2	0	0	+1	0	0	−1	$p\pi^-$ (66)	30
	sigma	Σ^+ $\tilde{\Sigma}^-$	1189,5	2328	$0{,}8\times10^{-10}$	1/2	+1	0	+1	1	+1	−1	$p\pi^0$ (53)	116
		Σ^- $\tilde{\Sigma}^+$	1197,4	2342	$1{,}6\times10^{-10}$	1/2	−1	0	+1	1	−1	−1	$n\pi^-$ (100)	118
		Σ^0 $\tilde{\Sigma}^0$	1192,5	2333	$<10^{-14}$	1/2	0	0	+1	1	0	−1	$\Lambda\gamma$ (100)	77
	ksi	Ξ^- $\tilde{\Xi}^+$	1321	2585	$1{,}7\times10^{-10}$	1/2	−1	0	+1	1/2	−1/2	−2	$\Lambda\pi^-$ (100)	5
		Ξ^0 $\tilde{\Xi}^0$	1314	2572	3×10^{-10}	1/2	0	0	+1	1/2	+1/2	−2	$\Lambda\pi^0$ (100)	7
	omega	Ω^- $\tilde{\Omega}^+$	1675	3278	$\sim10^{-10}$	3/2	−1	0	+1	0	0	−3	$\Xi\pi$ (50)	221

MATEMATIČKE DOPUNE

1 radijan $= \dfrac{180°}{\pi}$ $\simeq 57{,}3°\ (57°20')$

$\simeq 3{,}44\times10^3$ lučnih minuta

$\simeq 2{,}06\times10^5$ lučnih sekundi

$1° = \dfrac{\pi}{180°}$ $\simeq 0{,}0174$ radijana

1 lučni minut $\simeq 2{,}91\times10^{-4}$ radijana

1 lučna sekunda $\simeq 4{,}85\times10^{-6}$ radijana

π	3,14159
π^2	9,87
e	2,72
$ln\,\pi$	1,44473
log e	0,43429
ln 10	2,30258

Taylorov red funkcije oko tacke a:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_n$$

Binomni red: ($|x|<a$; $|y|<1$)

$$(a\pm x)^m=a^m\left(1\pm\frac{x}{a}\right)^m=a^m(1\pm y)^m$$

$$=a^m\left\{1\pm my+\frac{m(m-1)}{2}y^2\right.$$

$$\left.\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{6}y^3+\cdots\right\}$$

Legendreovi polinomi:

Legandreovi polinomi $P_l(x)$ su rešenja diferencijalne jednačine:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right]+l(l+1)P_l(x)=0$$

gde je $-1\leqslant x\leqslant+1$ a l prirodan ceo broj. Polinomi i njihovi izvodi zadovoljavaju rekurentne relacije:

$$(1-x^2)P_l'=-xlP_l+lP_{l-1}$$

$$(l+1)P_{l+1}=(2l+1)xP_l-lP_{l-1}.$$

Nekoliko prvih polinoma su:

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$
$$P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$
$$P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$$

a opšti izrazi su:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$
$$P_l(1)=1.$$

Legendreovi polinomi čine potpun skup ortonormiranih funkcija:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)\,P_{l'}(x)\,dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}.$$

Sferne funkcije (harmonici):

Sferni harmonici $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu:

$$\hat{\mathcal{L}}\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)+l(l+1)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)=0$$

gde je $\hat{\mathcal{L}}$ uglovni deo laplasijana Δ izraženog u sfernim koordinatama (r,ϑ,φ):

$$\hat{\mathcal{L}}=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Ove su funkcije ortonormirane:

$$\int Y^*_{LM}(\vartheta,\varphi)\,Y_{L'M'}(\vartheta,\varphi)\,d\Omega=\delta_{LL'}\delta_{MM'}.$$

Sa Legendreovim polinomima povezani su izrazom:

$$Y_{LM}(\vartheta,\varphi)=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iM\varphi}\right\}\Theta_L^M(\vartheta)$$

gde je, za $M>0$:

$$\Theta_L^M=(-\sin\vartheta)^M\left\{\frac{(2L+1)\,(L-M)!}{2\,(L+M)!}\right\}^{1/2}\frac{d^M}{d(\cos\vartheta)^M}[P_L(\cos\vartheta)]$$

a

$$\Theta_L^{-M}=(-1)^M\,\Theta_L^M.$$

Eksplicitan oblik nekoliko prvih sfernih harmonika je:

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\qquad Y_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$$
$$Y_{1\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,e^{\pm i\varphi}\qquad Y_{20}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta-\frac{1}{2}\right)$$
$$Y_{2\pm1}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,e^{\pm i\varphi}\qquad Y_{2\pm2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\vartheta\,e^{\pm 2i\varphi}.$$

Operatori teorije polja u sfernim koordinatama:

— Gradijent:

$$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

— Divergencija:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\vartheta)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

— Rotor:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,A_\varphi)-\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\vec{e}_\vartheta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta)-\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{e}_\varphi$$

— Laplasijan:

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)$$

i, u sferno simetričnom polju $U(\vec{r})=U(r)$:

$$\Delta U=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU).$$

Sferne Besselove i Neumannove funkcije:

Sferne Besselove i Neumannove funkcije $j_l(\rho)$ i $n_l(\rho)$ predstavljaju rešenja diferencijalne jednačine oblika:

$$\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{df(\rho)}{d\rho}+\left[1-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]f(\rho)=0.$$

Eksplicitni oblik ovih funkcija je:

$$j_0(\rho)=\frac{\sin\rho}{\rho} \qquad n_0(\rho)=-\frac{\cos\rho}{\rho}$$

$$j_1(\rho)=\frac{\sin\rho}{\rho^2}-\frac{\cos\rho}{\rho} \qquad n_1(\rho)=-\frac{\cos\rho}{\rho^2}-\frac{\sin\rho}{\rho}$$

$$j_2(\rho)=\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\sin\rho-\frac{3}{\rho^2}\cos\rho.$$

$$n_2(\rho)=-\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\cos\rho-\frac{3}{\rho^2}\sin\rho.$$

Asimptotsko ponašanje im je:

$$j_l(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}\frac{\rho^l}{(2l+1)!!}$$

$$n_l(\rho)\xrightarrow[\rho\to 0]{}\frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}$$

$$j_l(\rho)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}\frac{1}{\rho}\cos\left[\rho-\frac{1}{2}(l+1)\,\pi\right]$$

$$n_l(\rho)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}\frac{1}{\rho}\sin\left[\rho-\frac{1}{2}(l+1)\,\pi\right].$$

Clebsch-Gordanovi koeficijenti:

Clebsh-Gordanovi koeficijenti $\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle$ (koeficijenti »vektorskog sabiranja«) definisani su izrazom:

$$\psi(JM)=\sum_{m_1 m_2}\langle j_1 j_2 J \mid m_1 m_2 M\rangle\Phi(j_1 m_1)\,\chi(j_2 m_2)$$

koji opisuje prelaz od svojstvenih funkcija Φ i χ operatora momenta impulsa $\vec{j}_1^2$ i j_{1z}, $\vec{j}_2^2$ i j_{2z} na svojstvene funkcije ψ operatora zbirnog (rezultujućeg) momenta impulsa $\vec{J}^2$ i J_z:

$$J^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2 \qquad J_x=j_{1x}+j_{2x} \text{ itd...}$$

CG koeficijent različit je od nule ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

$$M=m_1+m_2 \quad \text{i} \quad |j_1-j_2|\leqslant J\leqslant j_1+j_2 \quad (\&)$$

CG koeficijenti su realni i zadovoljavaju sledeće relacije ortogonalnosti:

$$\sum_{m_1 m_2}\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle\langle j_1 j_2 j_4 \mid m_1 m_2 m_4\rangle=\delta_{j_3 j_4}\delta_{m_3 m_4}$$

$$\sum_{j_3 m_3}\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_4 m_5 m_3\rangle=\delta_{m_1 m_4}\delta_{m_2 m_5}$$

Sa *W*ignerovim 3-*j* simbolima povezani su izrazom:

$$\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle=(2j_3+1)^{1/2}(-1)^{j_1-j_2+m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3\end{pmatrix}$$

Simetrije 3-*j* simbola (preko kojih se lako nalaze simetrije *CG* koeficijenata) su:

1) parna permutacija kolona — nema promene
2) neparne permutacije kolona — faktor $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$
3) promena znaka svih m-ova — faktor $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$

Jedna od mnogih ekvivalentnih notacija je:

$$\langle j_1 j_2 j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle\equiv\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_3 m_3\rangle.$$

Wigner-Eckartova teorema:

Matrični element q-te komponente (od ukupno $2k+1$) ireducibilnog tenzorskog operatora ranga k, po *W*igner-Eckartovoj teoremi, svodi se na:

$$\langle \tau JM \mid T_{kq} \mid \tau' J' M'\rangle=\frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2J+1}}\langle \tau J \| \vec{T}_k \| \tau' J'\rangle\times\langle J' M' kq \mid JM\rangle$$

$$=(-1)^{J-M}\langle \tau J \| \vec{T}_k \| \tau' J'\rangle\begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & q & M'\end{pmatrix}.$$

$\langle \tau J \| \vec{T}_k \| \tau' J'\rangle$ je takozvani redukovani matrični element koji ne zavisi od magnetnih kvantnih brojeva. Celokupna »geometrija« sadržana je u odgovarajućem *CG* koeficijentu i uslov njegove egzistencije (&) daje celokupna izborna pravila za moment impulsa. (Tipični tenzorski operatori su operatori elektromagnetnih momenata $\vec{O}_L$, ranga L, sa $2L+1$ komponenti $\hat{O}_{LM}$).

Tablice za nalaženje vrednosti CG koeficijenata:

1. $\langle j_1\, 1/2\, j_3 \mid m_1 m_2 m_3\rangle$

j_3	$m_2=1/2$	$m_2=-1/2$
$j_1+1/2$	$\sqrt{\frac{j_1+m_3+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1-m_3+1/2}{2j_1+1}}$
$j_1-1/2$	$-\sqrt{\frac{j_1-m_3+1/2}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+m_3+1/2}{2j_1+1}}$

2. $\langle j_1\, 1\, j_3 \mid m_1\, m_2\, m_3 \rangle$

j_3	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
j_1+1	$\sqrt{\frac{(j_1+m_3)(j_1+m_3+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_3+1)(j_1+m_3+1)}{(2j_1+1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_3)(j_1-m_3+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m_3)(j_1-m_3+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m_3}{\sqrt{2j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_3)(j_1+m_3+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
j_1-1	$\sqrt{\frac{(j_1-m_3)(j_1-m_3+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m_3)(j_1+m_3)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m_3)(j_1+m_3+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$

3. $\langle j_1\, 3/2\; j_3 \mid m_1\, m_2\, m_3 \rangle$

j_3	$m_2 = 3/2$	$m_2 = 1/2$
$j_1+3/2$	$\sqrt{\frac{(j_1+m_3-1/2)(j_1+m_3+1/2)(j_1+m_3+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3+1/2)(j_1+m_3+3/2)(j_1-m_3+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1+1/2$	$-\sqrt{\frac{3(j_1+m_3-1/2)(j_1+m_3+1/2)(j_1-m_3+3/2)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$-(j_1-3m_3+3/2)\sqrt{\frac{j_1+m_3+1/2}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1-1/2$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3-1/2)(j_1-m_3+1/2)(j_1-m_3+3/2)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$-(j_1+3m_3-1/2)\sqrt{\frac{j_1-m_3+1/2}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1-3/2$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m_3-1/2)(j_1-m_3+1/2)(j_1-m_3+3/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3-1/2)(j_1-m_3-1/2)(j_1-m_3+1/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

j_3	$m_2 = -1/2$	$m_2 = -3/2$
$j_1+3/2$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3+3/2)(j_1-m_3+1/2)(j_1-m_3+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_3-1/2)(j_1-m_3+1/2)(j_1-m_3+3/2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)}}$
$j_1+1/2$	$(j_1+3m_3+3/2)\sqrt{\frac{j_1-m_3+1/2}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3+3/2)(j_1-m_3-1/2)(j_1-m_3+1/2)}{2j_1(2j_1+1)(2j_1+3)}}$
$j_1-1/2$	$-(j_1-3m_3-1/2)\sqrt{\frac{j_1+m_3+1/2}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{3(j_1+m_3+1/2)(j_1+m_3+3/2)(j_1-m_3-1/2)}{(2j_1-1)(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1-3/2$	$-\sqrt{\frac{3(j_1+m_3-1/2)(j_1+m_3+1/2)(j_1-m_3-1/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m_3-1/2)(j_1+m_3+1/2)(j_1+m_3+3/2)}{2j_1(2j_1-1)(2j_1+1)}}$

LITERATURA

Udžbenici:

1. M. Mlađenović: *Uvod u nuklearnu fiziku* I deo, Vinča 1967.
2. V. Berčam: *Uvod u nuklearnu fiziku*, Naučna knjiga, Beograd 1974.
3. L. Marinkov: *Osnovi nuklearne fizike*, Univerzitet Novi Sad, Novi Sad 1976.
4. M. Rosina: *Jaderska fizika*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov, SRS, Ljubljana 1977.
5. I. Supek: *Teorijska fizika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1964.
6. Я. И. Френкель: *Принципы теории атомных ядер*, ИЗВАНСССР, Москва 1955.
7. В. Гольданский, Е. Лейкин: *Превращения атомных ядер*, ИЗВАНСССР, Москва 1958.
8. А.С. Давыдов: *Теория атомного ядра*, Физматгиз, Москва 1958.
9. К.Н. Мухин: *Введение в ядерную физику*, Госатомиздат, Москва 1983.
10. А. Колпаков: *Основи ядерной физики*, Просвещение, Москва, 1964.
11. Б.Б. Мальаров: *Основы теории атомного ядра*, Наука, Москва 1967.
12. Ю. М. Широков, Н.П. Юдин: *Ядерная физика*, Наука, Москва 1972.
13. А.К. Вальтер, И.И. Залюбовский: *Ядернал физика*, Вища школа, Харьков, 1974.
14. И.В. Ракобольская: *Ядерная физика*, изд МГУ, Москва 1971.
15. H.A. Bethe: *Elementary Nuclear Theory*, Wiley, New York 1947.
16. G.Gamov, C. Critchfield: *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*, Oxford Univ. Press, Oxford 1950.
17. E.Fermi: *Nuclear Physics*, Chicago Univ. Press, Chicago 1951.
18. J. Blatt, V.F. Weisskopf: *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York 1952.
19. R. Sachs: *Nuclear Theory*, Addison-Wesley, Cambridge 1953.
20. A. Green: *Nuelear Physics*, McGraw-Hill, New York 1955.
21. D. Halliday: *Introductory Nuclear Physics*, Wiley, New York 1955.
22. H.A. Bethe, P. Morrison: *Elementary Nuclear Theory*, Wiley, New York 1956.
23. L. Eisenbud, E.P. Winger: *Nuclear Structure*, Princenton Univ. Press, Princeton 1958.
24. L. Elton: *Introductory to Nuclear Theory*, Interscience Publ. New York 1962.
25. B. Harvey: *Introduction to Nuclear Physics and Chemistry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1962.
26. M. A. Preston: *Physics of the Nucleus*, Addison-Wesley, Reading 1962.
27. R. Howard: *Nuclear Physics*, Wadsworth Publ. Co. Belmont 1963.
28. E. Segre: *Nuclei and Particles*, Benjanin, New York 1964.
29. S. DeBenedetti: *Nuclear Interactions*, Wiley, New York 1964.
30. H. Enge: *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley, Reading 1966.
31. C. Smith: *A Textbook to Nucelar Physics*, Pergamon Press, Oxford 1966.
32. A. Arya: *Fundamentals of Nuclear Physics*, Allyn and Bacon, Boston 1966.
33. W.E. Meyerhof: *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York 1967.
34. R. Roy, B. Nigam: *Nuclear Physics*, Wiley, New York 1967.
35. McCarthy: *Introduction to Nuclear Theory*, Wiley, New York 1968,
36. E. Paul: *Nuclear and Particle Physics*, North-Holland, Amsterdam 1969.
37. P. Marmier, E. Sheldon: *Physics of Nuclei and Particles* I, II, Academic Press, New York 1969.
38. B. Cohen: *Concepts in Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New York 1971.
39. M. Bowler: *Nuclear Physics*, Pergamon Press, Oxford 1973.

40. B.M. Brink, G. Bishop, R. Satchler: *An Introduction to Nuclear Physics*, Macmillan, London 1973.
41. H. Buttlar: *Nuclear Physics*, Academic Press, New York 1968.
42. H. Frauenfelder and W. Henley: *Subatomic Physics*, Prentice Hall, 1975.
43. N.A. Jelley: *Fundamentals od Nuclear Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.
44. K.S. Krane: *Introductory Nuclear Physics*, Wiley, New York 1987.
45. B. Povh, K. Tith. C. Scholz, F. Zetsche: *Particles and Nuclei*, Springer, Berlin, 1995.
46. M. Bayet: *Physique Nucléaire*, Masson et Cie, Paris 1960.
47. D. Blanc: *Physique Nucléaire*, Masson et Cie, Paris 1974.

Zbirke zadataka:

1. И.Е. Иродов: *Сборник задач по атомной и ядерной физике*, Атомиздат, Москва 1971.
2. С.В. Скачков, Л.В. Константинов, Р.П. Строганова, Л.Н. Юрова, Э.П. Топоркова: *Сборник задач по ядерной физике*, Физматгиз, Москва 1963.
3. H. Bongrain, B. Perrier, J. Baillard: *Recueil de Problémes de Physiqué Nucléaire*, Masson et Cie, Paris 1962.
4. M. Cotterau, F. Lefebvres: *Recueil de Problémes de Physique Nucléaire et de Physique des Particules*, Masson et Cie, Paris 1971.
5. И.А. Антонова, Н.Г. Гончарова, Ф.А Живописцев: *Задачи по ядерной физике*, МГУ, Москва, 1979.
6. И.М. Ободовский: *Сборник задач по экспериментальним методам ядерной физики*, Энергоатомиздат, Москва, 1987.