U nastavku dajemo dokaz teoreme koja daje dovoljne uslove za postojanje lokalnog ekstremuma funkcije više promjenljivih.

Teorema 0.1. *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup i* $f \in C^2(\Omega)$ *i* $a \in \Omega$ *je stacionarna tačka. Neka je dalje* F *kvadratna forma čija je matrica* $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j=1}^{n}$. *Tada važi:*

a) Ako je kvadratna forma F *pozitivno (negativno) definita, onda funkcija* f *ima strogi lokalni minimum (maksimum) u tački* a*;*

b)Ako je kvadratna forma F *promjenljivog znaka, tada funkcija* f *nema lokalni ekstremum u tački* a.

Proof. a) Pretpostavićemo da je kvadratna forma F pozitivno definitna i dokazati postojanje strogog lokalnog minimuma u tački a. U slučaju da je kvadratna forma F negativno definitna, dokaz tvrđenja se izvodi na sličan način.

Za h dovoljno malo, $a+h \in \Omega$, uzimajući u obzir da je a stacionarna tačka, Tejlorova formula za funkciju f u Peanovom obliku u okolini tačke a (zaključnom sa drugim redom izvoda u razvoju) izgleda

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2), h \to 0.$$

Odnosno,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(F\left(\frac{h_1}{\|h\|}, ..., \frac{h_n}{\|h\|} \right) + o(1) \right), h \to 0. \tag{0.1}$$

Primijetimo da vektor $\left(\frac{h_1}{\|h\|}, ..., \frac{h_n}{\|h\|}\right) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Sa druge strane, kako je $\mathbb{S}^{n-1}$ kompaktan skup i F neprekidna i pozitivna funkcija na $\mathbb{S}^{n-1}$, to je $m = \min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} F(x) > 0$.

Kako $o(1) \to 0$ za $\|h\| \to 0$, to birajući $\delta > 0$ dovoljno malo iz $\|h\| < \delta$ imamo da je $|o(1)| < m$. Tada za tako izabrane h imamo da je $F\left(\frac{h_1}{\|h\|}, ..., \frac{h_n}{\|h\|}\right) + o(1) > 0$ i posljedično je zbog (0.1) je $f(a+h) > f(a), 0 < \|h\| < \delta$, tj. a je tačka strogog lokalnog minimuma funkcije $f(x)$.

b) Pretpostavimo da je F kvadratna forma promjenljivog znaka, tj. postoje vektori $h, k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ takvi da $F(h) < 0 < F(k)$. Tada $F(\frac{h}{\|h\|}) = m_0 < 0 < M_0 = F(\frac{k}{\|k\|})$. Označimo sa $e_h = \frac{h}{\|h\|}$ i $e_k = \frac{k}{\|k\|}$. U nastavku posmatramo vektore te_h i te_k, $t \in \mathbb{R}$. Dalje, polazeći od (0.1) dobijamo

$$f(a+te_h) - f(a) = \frac{1}{2}t^2(m_0 + o(1)), \quad f(a+te_k) - f(a) = \frac{1}{2}t^2(M_0 + o(1)),$$

za $t \to 0$. Za t dovoljno malo, prva razlika će biti negativna, a druga razlika pozitivna, što povlači da tačka a nije lokalni ekstremum za funkciju $f(x)$. $\square$

Komentar 0.2. Napomenimo da se uslov a) predhodno dokazane teoreme odnosi samo na pozitivno (negativno) definitnu formu F.

U narednim primjerima vidjećemo da teorema ne važi u slučaju da je forma F pozitivno (negativno) poludefinitna.

Primjer 0.3. Odredimo lokalne ekstremume sljedećih funkcija

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 1$,

b) $f(x, y) = x^2 + y^3$.

U primjeru pod a) jasno da $f(x, y) = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geq 1$ i da je tačka $(0, 0)$ zapravo "globalni" minimum funkcije $f(x, y)$. Dokažimo predhodni zaključak koristeći tvrđenja ovog odjeljka.

Kako je funkcija $f(x, y)$ beskonačno diferencijabilna u $\mathbb{R}^2$ to postojanje lokalnog ekstremuma u nekoj tački (x, y) povlači da je ta tačka stacionarna, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

tako

$$2x + y = 0, \ \ 2y + x = 0,$$

i dobijamo da je tačka $(0, 0)$ rješenje predhodnog sistema linearnih jednačina. Daljim računanjem dvostrukih parcijalnih izvoda u tački $(0, 0)$ dobijamo da matrica karakteristične kvadratne forme ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

za koju se lako provjerava primjenom Silvestrovog kriterijuma da je odgovarajuća forma pozitivno definitna, tj. $(0, 0)$ je tačka lokalnog minimuma.

b) Jednostavno se utvrđuje da je tačka $(0, 0)$ stacionarna i da odgovarajuća matrica karakteristične forme ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju, primjena Silvestrovog kriterijuma nije moguća.

Sa druge strane, $f(x, 0) = x^2 > 0$, za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ i $f(0, -y) = -y^3$, za $y > 0$, tj. u proizvoljnoj okolini tačke $(0, 0)$ funkcija $f(x, y)$ mijenja znak zbog čega tačka $(0, 0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

Primijetimo da uprkos činjenici da je kvadratna forma određena matricom A pozitivno poludefinitna,

$$\langle Ah, h \rangle = 2h_1^2 \geq 0, h \in \mathbb{R}^2,$$

funkcija nema lokalni ekstremum u tački $(0, 0)$.

Primjer 0.4. Odredimo lokalne ekstremume funkcije $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

Na početku standardno određujemo stacionarne tačke funckije $f(x,y,z)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 0 \\ 3y^2 - x - 1 &= 0 \\ 2z + 2x &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobijamo kao rješenja dvije tačke $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ i $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. U nastavku ispitujemo definitnost matrice karakteristične kvadratne forme koja u tački $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ je jasno simetrična i ima oblik

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} (M_1) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se utvrđuje Silvestrovim kriterijumom da je kvadratna forma određena matricom A_1 pozitivno definitna i prema tome $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ je tačka lokalnog minimuma.

Kada je u pitanju tačka $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, matrica odgovarajuće karakteristične forme data je sa

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je glavni minor reda dva $A_2 = -11$, pa primjena Silvestrovog kriterijuma nije moguća u ovom slučaju.

Sa druge strane, dejstvo kvadratne forme određene matricom A_2 na nenultim vektorima $h = (h_1, 0, 0)$ i $\bar{h} = (0, h_2, 0)$ respektivno je dato sljedećim formulama

$$\langle A_2 h, h \rangle = 4h_1^2 > 0,\ \left\langle A_2 \bar{h}, \bar{h} \right\rangle = -3h_2^2 < 0,$$

odakle zaključujemo da je kvadratna forma određena matricom A_2 promjenljivog znaka, pa $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ nije tačka lokalnog ekstremuma.

Primjer 0.5. Za funkciju $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ ispitaćemo postojanje lokalnih ekstremuma u domenu definisanosti funkcije $f(x,y)$.

Iz sistema jednačina

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

poslije odgovarajućih skraćivanja zaključujemo da je $x^2 = y^2 = t$, odnosno $\ln(2t)+1 = 0$, tj. $t = \frac{1}{2e}$, i posljedično imamo četiri stacionarne tačke $M_1(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, $M_4(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$.

Računanjem parcijalnih izvoda reda dva funkcije f za tačke M_1 i M_2 dobijamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

tj. drugi diferencijal funkcije f u datim tačkama poprima oblik

$$d^2 f(M_{1,2}) = 2(dx^2 + dy^2) > 0,$$

pa u tačkama $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ i $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ funkcija ima lokalni minimum.

Slično se pokazuje da

$$d^2 f(M_{3,4}) = -2(dx^2 + dy^2) < 0,$$

tj. u tačkama $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ i $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ funkcija ima lokalni maksimum.

Primjer 0.6. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$, gdje je $\Omega = \{(x,y) | x + y \leq 2, -x + y \leq 2, y \geq 0\}$ i $f(x,y) = x^3 - x(y-1)^3$. Odredićemo tačke u kojima funkcija $f(x,y)$ dostiže maksimalnu i minimalnu vrijednost.

Na početku primijetimo da budući da je skup Ω kompaktan (zatvoren i ograničen) i funkcija $f(x,y)$ neprekidna na njemu, to ona dostiže minimalnu i maksimalnu vrijednost na Ω.

Jasno da ukoliko funkcija f dostiže minimalnu (maksimalnu) vrijednost u nekoj unutrašnjoj tački, takva tačka je i lokalni ekstremum funkcije f.

Određujemo stacionarne tačke iz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - (y-1)^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x(y-1) = 0,$$

i dobijamo jednu tačku kao rješenje $M(0,1)$. Dalje je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno da ne možemo da primijenimo ustaljeni postupak za ispitivanje prirode stacionarne tačke M.

Nije teško primijetiti da za $x > 0$ dovoljno malo tačke $(-x,1)$ i $(x,1)$ pripadaju Ω i $f(-x,1) < 0$ i $f(x,1) > 0$, tj. tačka $(0,1)$ nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije $f(x,y)$.

Teorema 0.1 daje dovoljno uslove o postojanju lokalnog ekstremuma za unutrašnje tačke domena funkcije.

Zaključujemo da pošto funkcija f nema lokalnih ekstremuma unutar skupa Ω, tačke maksimuma i minimuma se nalaze na granici skupa Ω ("stranama" trougla).

U nastavku posmatramo restrikcije funkcije $f(x,y)$ na granicama oblasti Ω njihove ekstremne vrijednosti kao i vrijednosti u tjemenima trougla.

Označimo sa $\varphi(x) = f(x,0) = x^3 - 2, x \in [-2,2]$. Iz $\varphi'(x) = 0$ dobijamo dvije stacionarne tačke $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ i vrijednosti funkcije u njima $\varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ i $\varphi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Specijalno, $\varphi(-2) = -6, \varphi(2) = 6$, tj. $\varphi_{min} = -6, \varphi_{max} = 6$.

Dalje, $\varphi_1(x) = f(x, x+2) = -2x^2 - x$, iz $\varphi'(x) = 0$ imamo jednu stacionarnu tačku $-\frac{1}{4}$ i $\varphi_1(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$. Specijalno $\varphi_1(0) = 0, \varphi_1(-2) = 6$, tj. $\varphi_{1min} = -6$, $\varphi_{1max} = \frac{1}{8}$.

Na kraju, $\varphi_2(x) = f(x, 2-x) = 2x^2 - x$, iz $\varphi_2'(x) = 0$, dobijamo jednu stacionarnu tačku $\frac{1}{4}$, i $\varphi_2(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8}$ i $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(2) = 6$, tj. $\varphi_{2min} = -\frac{1}{8}$, $\varphi_{2max} = 6$.

Konačno zaključujemo da $f_{min} = f(2,0) = -6$ i $f_{max} = f(2,0) = 6$.