Анализа 1

08.10.2020.

Апсолутне вриједности

1. Доказати да важи:

а) $|x|=0 \iff x=0$

б) $|x \pm y| \leq |x|+|y|$

в) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

г) $|x \cdot y|=|x|\cdot|y|$

2. Доказати да важи:

а) $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$

б) $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

в) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^n + \left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^n = x^n$

Математичка индукција

1. Доказати да за $\forall n \in \mathbb{N}$ важи:

а) $1+2+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

б) $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

в) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

2. Доказати да за $\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}$$

3. Доказати да за $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

а) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$

4. Доказати да за $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ важи:

а) $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

б) $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geq |x_1| - (|x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|)$

5. Доказати да за $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

гдје је $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$.