# SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

# Predavanje 2

# Modelovanje SAU-a

**Ishodi učenja:**

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

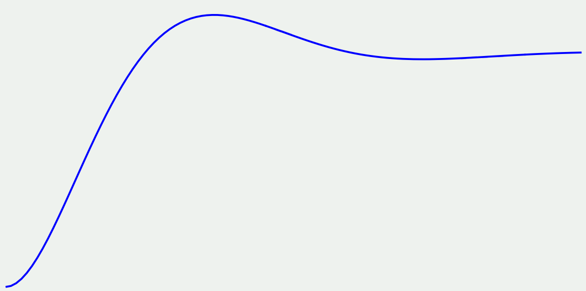
- Klasifikuju signale i sisteme prema različitim kriterijumima.
- Prepoznaju da diferencijalne jednačine mogu da modeluju dinamiku fizičkih sistema.
- Linearizuju nelinearni sistem razvojem u Tejlorov red.
- Razumiju primjenu Laplasove transformacije i njenu ulogu kod linearnih sistema.
- Razumiju ulogu blokova dijagrama ili dijagrama tokova signala u analizi sistema.
- Shvate značaj modelovanja u procesu dizajna SAU-a.

# Klasifikacija signala

## Signali u SAU:

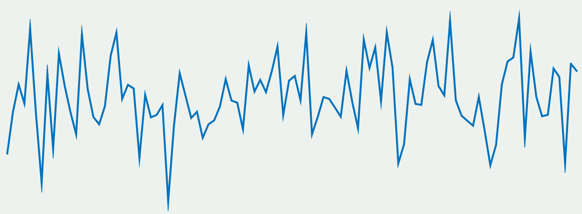
- Prenose informacije sa jednog sistema na drugi
- Vremenski promjenljiva fizička veličina koja nosi neku informaciju

**Deterministički signali**



Opisuju se nekom matematičkom funkcijom. Napon, pozicija, brzina, temperatura su primjeri deterministickih signala.

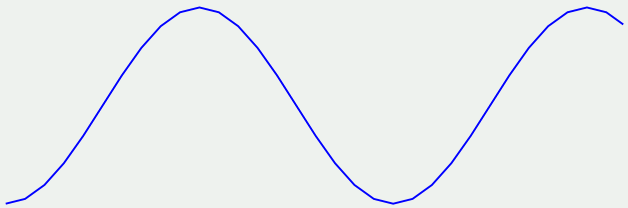
**Slučajni (stohastički) signali**



Opisuju se funkcijom raspodjele vjerovatnoće. Šumovi i neke vrste poremećaja predstavljaju slučajne signale.

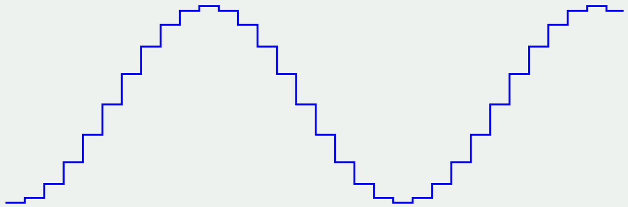
# Klasifikacija signala

## Kontinualni



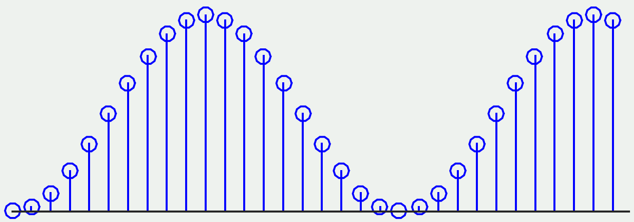
Definisan u svakom trenutku vremena i može imati bilo koju vrijednost amlitude.

## Diskretan po amplitudi



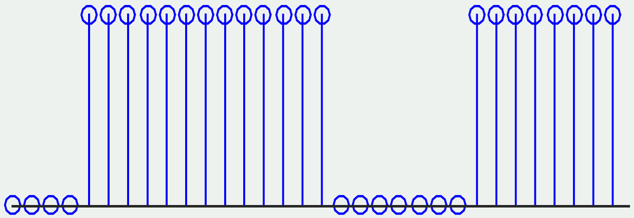
Definisan u svakom trenutku vremena i može imati određene vrijednosti amlitude.

## Diskretan po vremenu



Definisan u određenim trenucima vremena i može imati bilo koju vrijednost amlitude.

## Diskretan po amplitudi i vremenu



Definisan u određenim trenucima vremena i može imati određene vrijednost amlitude.

# Klasifikacija sistema

| **KRITERIJUM** | **VRSTA SISTEMA** | |
|---|---|---|
| Broj ulaznih i izlaznih promjenljivih | SISO | MIMO |
| Vremenska zavisnost promjenljivih | Statički | Dinamički |
| Prostorna zavisnost promjenljivih | Sa koncentrisanim parametrima | Sa distribuiranim parametrima |
| Neprekidnost promjenljivih | Kontinualni | Diskretni |
| Veze između promjenljivih | Linearni | Nelinearni |
| Vremenska zavisnost parametara | Stacionarni | Nestacionarni |
| Vremenska uzročnost promjenljivih | Kauzalni | Nekauzalni |

# Klasifikacija sistema

SISO

- Sa jednim ulazom i jednim izlazom (Single-Input and Single-Output)

MIMO

- Sa više ulaza i izlaza (Multiple-Input and Multiple-Output)

Statički (bez memorije):

- izlaz u trenutku *t* zavisi samo od ulaza u trenutku *t*
- opisuju se običnim jednačinama
- Primjer: kolo sa otpornicima

Dinamički (sa memorijom):

- izlaz u trenutku *t* zavisi od prošlih vrijednosti izlaza.
- Opisuju se diferencijalnim jednačinama.
- Primjer: RLC kolo

# Klasifikacija sistema

## Stacionarni (vremenski invarijantni)

- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima

## Nestacionarni (promjenljivi u vremenu)

- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama sa promjenljivim koeficijentima
- Primjer: avion čija se masa mijenja usljed potrošnje goriva

## Kauzalni:

- izlaz u trenutku *t* zavisi samo ulaza u trenutku *t*, kao i od ulaza u prethodnim trenucima
- Svi sistemi u realnom vremenu su kauzalni

## Nekauzalni:

- Ne mogu se hardverski realizovati
- Moguće je obrađivati buduće podatke ako su sačuvani u memoriji

# Klasifikacija sistema

## Sistemi sa koncentrisanim parametrima:

- Matematički se opisuju običnim diferencijalnim ili diferencnim jednačinama
- Promjenljive sistema zavise samo od vremena. Drugim riječima, u svim tačkama sistema ulaz djeluje istovremeno
- Primjer: RLC kolo

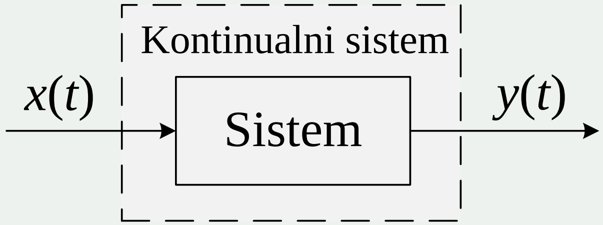
## Sistemi sa distribuiranim parametrima:

- Matematički se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama
- Promjenljive sistema zavise od vremena i prostornih koordinata
- Primjer: zvučni ili elektromagnetni talasi

# Klasifikacija sistema

## Kontinualni sistemi:

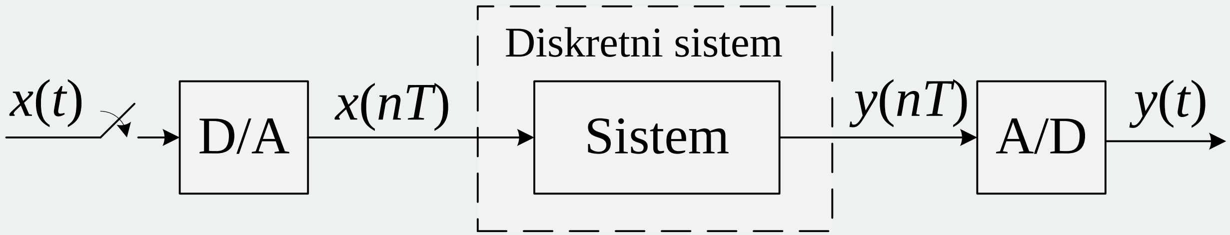
- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama




$$\dot{y}(t) = -y(t) + x(t)$$

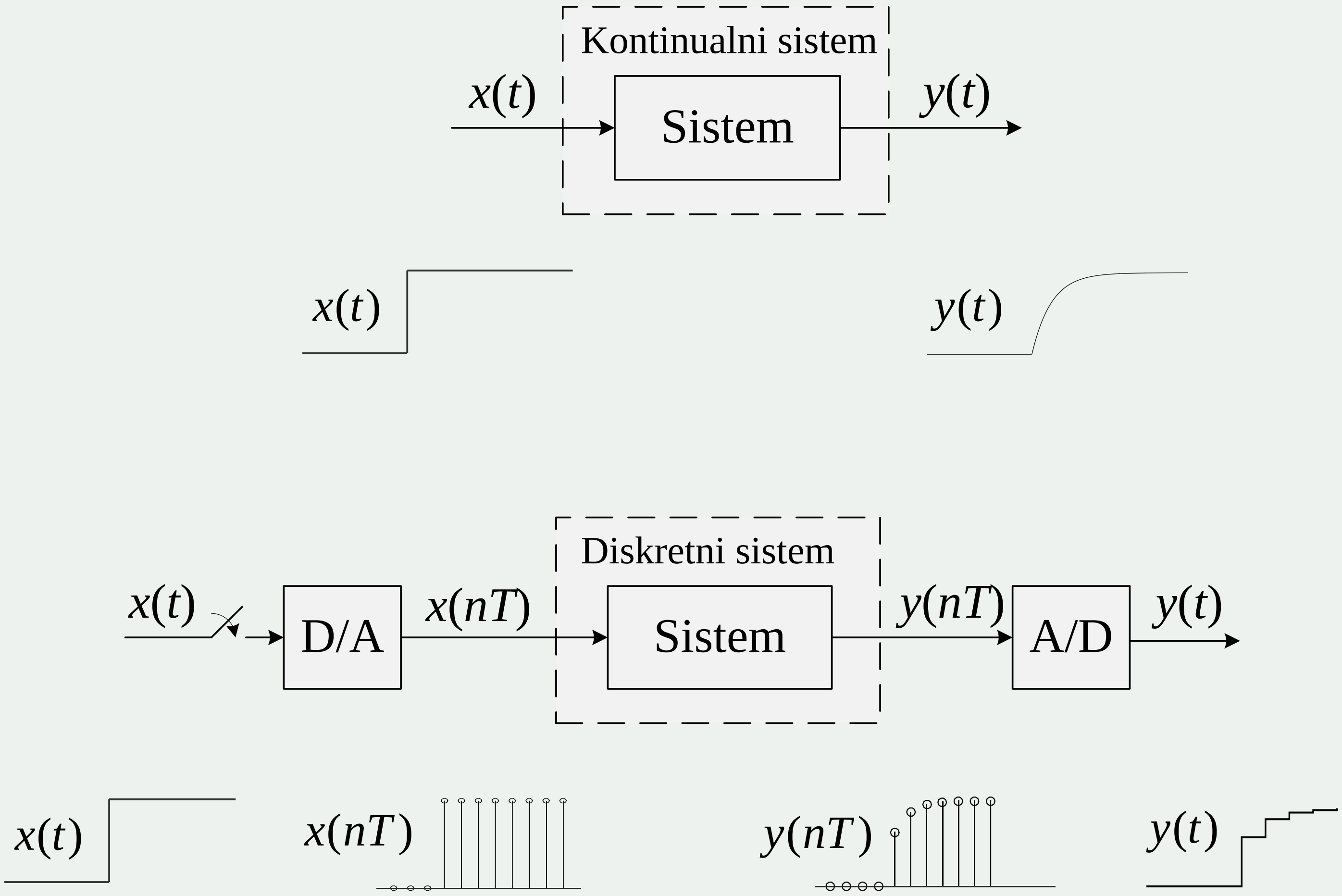
## Diskretni sistemi:

- Matematički se opisuju diferencnim jednačinama




$$y((n+1)T) = (1-T)y(nT) + Tx(nT)$$

# Klasifikacija sistema



# Kontinualni LTI sistemi

U ovom kursu se bavimo:

- Kontinualnim
- Linearnim
  - *jer su jednostavni*
  - *za njih je razvijena opšta teorija*
  - *postoje metode za linearizaciju nelinearnih sistema*
- Vremenski invarijantim → *Kod većine sistema se može smatrati da su parametri nepromjenljivi*
- Kauzalnim sistemima → *SAU su real-time sistemi*
- Sa koncentrisanim parametrima → *SAU najčešće ima koncentrisane parametre*

# Klasifikacija sistema

## Linearni sistemi:

- Opisuju se homogenim diferencijalnim jednačinama
- Važe principi superpozicije i homogenosti

Sistem je linearan ako je:

- odziv sistema na $ax(t)$ jednak $ay(t)$, pri čemu je $y(t)$ odziv sistema na $x(t)$ (homogenost).
- odziv sistema na $x_1(t)+x_2(t)$ jednak $y_1(t)+ y_2(t)$, pri čemu su $y_1(t)$ i $y_2(t)$ odzivi sistema na $x_1(t)$ i $x_2(t)$, respektivno (superpozicija).

## Nelinearni sistemi:

- Ne važe principi superpozicije i homogenosti
- U praksi sistemi najčešće postaju nelinearni za velike vrijednosti ulaznih signala

# Klasifikacija sistema

Klasifikovati kontunualne sisteme opisane sljedećim jednačinama:

a) $y(t) = u^2(t)$

b) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

c) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u^2(t)$

d) $\dot{y}(t) - y(t) = u(t) + 1$

e) $\ddot{y}(t) + 2t\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

f) $\ddot{y}(t) + 2\sin(t)y(t) = u(t)$

g) $y(t) = u(t) + 2$

# Klasifikacija sistema

Rješenje stavke a) $y(t) = au^2(t)$

1. Odziv sistema na signal $au(t)$ je jednak $a^2u^2(t)$, odnosno različit od $au^2(t)$. Kako nije ispunjen sulov homogenosti, zaključujemo da je sistem je nelinaran.

2. Sistem je vremenski invarijantan, jer su koeficijenti koji množe promjenljive konstantni (ne zavise od vremena).

3. Sistem je statički jer izlaz u trenutku $t$ zavisi samo od trenutne vrijednosti ulaza.

4. Sistem je kauzalan jer odziv u tekućem trentuku vremena ne zavisi od budućih vrijednosti ulaznog signala.

5. Sistem ima koncentrisane parametre, jer oni ne zavisi od prostornih koordinata (koficijenti koji promjenljive).

# Modeli sistema

**Modelovanje** komponenti sistema je prvi korak u analizi i dizajnu SAU-a. Modele sistema možemo podijeliti u više kategorija:

Vrste modela

1. Matematički modeli
2. Softverski model
3. Grafički modeli
4. Mentalni modeli

Kreiranje matematičkih modela

1. Fizičko modelovanje
2. Identifikacija
3. Kombinovano

Fizičko modelovanje podrazmijeva direktnu primjenu fizičkih zakona na posmatrani sistem ili komponente sistema. Kod ovog tipa modelovanja nije potrebno raditi eksperimente na sistemu, ali je potrebno poznavati parametre sistema (otpornost, masa, itd).

Identifikacija podrazumijeva pretpostavku, odnosno usvajanje nekog matematičkog modela sistema. Najčšeće se snimaju ulazi i izlazi realnog sistema, na osnovu kojih se identifikaju parametri usvojenog modela.

# Različite reprezentacije sistema

Linearni vremenski invarijanti sistemi se mogu modelovati na više načina:

- Obične diferencijalne jednačine višeg reda (ODE)
- Model u prostoru stanja (SS model)
- Prenosna funkcija (TF model)
- Strukturni blok dijagram (SBD model)

U vremenskom domenu LTI sistemi se opisuju diferencijalnim jednačinama sa konstantim koeficijentima, direktnom primjenom fizičkih zakona na posmatrani sistem. Uvođenjem odgovarajućih smjena, diferencijalne jednačine višeg reda se mogu zapisati u vidu sistema jednačina prvog reda, na taj način dobijajući model sistema u prostoru stanja. Pored vremenskog domena, LTI sistemi se mogu modelovati u *s*-domenu, pomoću funckcije prenosa, ili strukturnog blok dijagrama, kod kojeg se sistem i tokovi signala u njemu detaljnije prikazuju odgovarajućim blokovima.

# Diferencijalne jednačine višeg reda

U opštem slučaju LTI sistem se može modelovati običnom diferencijalnom jednačinom $n$-tog reda sa konstantnim koeficijentima:

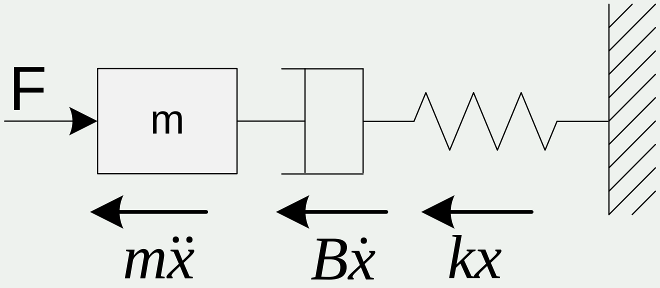
$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

ODE model

U gornjoj jednačini $y(t)$ predstavlja izlaz, a $u(t)$ ulaz sistema. Sa desne strane jednačine mogu figurisati izvodi ulaznog signala do $m$-tog reda, pri čemu, za kauzalan sistem važi da je $m \leq n$. Ovakav način modelovanja nije praktičan za opštu analizu sistema, pa se iz toga razloga uvodi kocept modelovanja u prostoru stanja.

# Primjer 1 - ODE

Translatorni mehanički sistem




Model sistem se dobija primjenom Njutnovih zakona dinamike.

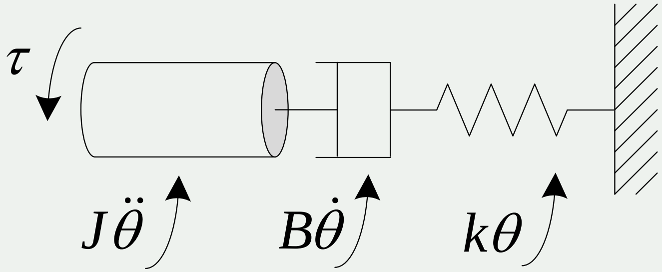
Inercijalna sila, sila trenja i sila elastičnosti se opiru kretanju tijela.

$$\boxed{m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = F}$$

ODE model

# Primjer 2 - ODE

Rotacioni mehanički sistem




Model sistem se dobija primjenom Njutnovih zakona dinamike.

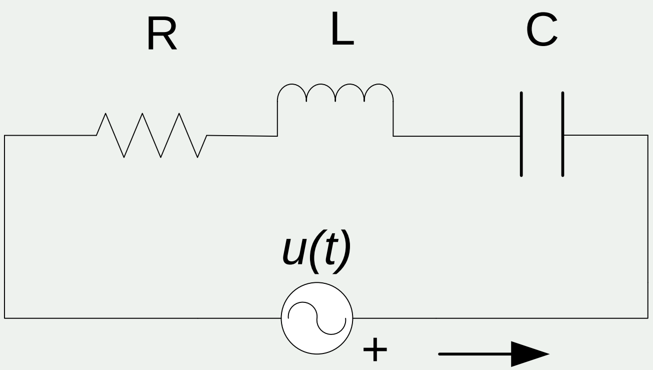
Inercijalna sila, sila trenja i sila elastičnosti se opiru kretanju tijela.

$$\boxed{J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta = \tau}$$

ODE model

# Primjer 3 - ODE

Električni sistem




Model električnog sistema se dobija primjenom Kirhofovih zakona.

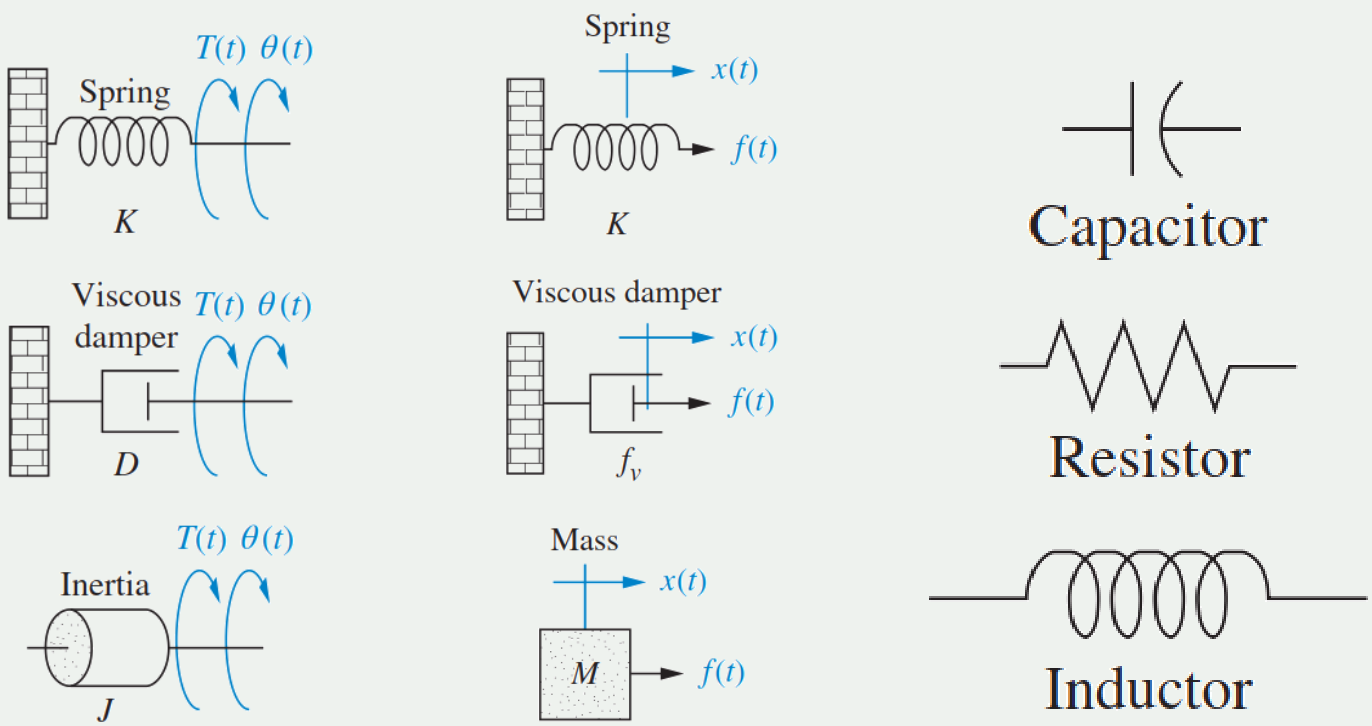
Red diferencijalne jednačine zavisi od broja kondenzatora i kalemova.

$$u - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t) = 0$$

$$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u}$$

ODE model

# Analogije između električnih i mehaničkih veličina



# Model u prostoru stanja (State Space, SS)

Model u prostoru stanja predstavlja sistem diferencijalnih jednačina prvog reda kojima se opisuje dinamika sistema.

Za kontinualne sisteme:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

SS model

U opšem obliku sistemi su nelinearni sa vremenski promjenljivim koeficijentima.

Za kontinualne linearne vremenski invarijante sisteme (LTI):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

SS model

Kod LTI sistema se može koristiti jednostavniji zapis.

Koncept prostora stanja se odnosi na opisivanje dinamike sistema minimalnim brojem varijabli koje se zovu *promjenljive stanja*, na takav način da odziv sistema u poptunosti definisan za bilo koji ulazni signal. Za razliku od funkcije prenosa, ovaj način modelovanja daje mogućnost uvid u sve promjenljive sistema, a ne samo u izlaz sistema.

# Model u prostoru stanja

Generalna forma LTI sistema u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \longrightarrow \text{jednačine stanja}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \longrightarrow \text{izlazne jednačine}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{np} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}$$

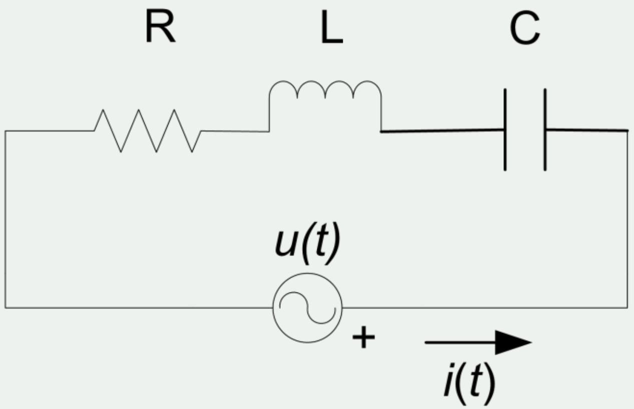
SS model

Jednačine stanja i izlazne jednačine se zapisuju u matričnom obliku. Ovakav zapis je pogodiniji za matematičku analizu i simulaciju sistema. Promjenljive stanja nekad mogu imati samo matematički smisao.

# Primjer – redno RLC kolo (I)

ODE jednačina koja opisuje RLC kolo:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=u$$




Svaka diferencijalna jednačina *n*-tog reda se može svesti na *n* dif. jednačina prvog reda, uvođenjem odgovarajućih smjena:

$$x_1=q \longrightarrow \dot{x}_1=\dot{q}=x_2$$

$$x_2=\dot{q} \longrightarrow \dot{x}_2=\ddot{q}$$

Uvrštavanjem uvedenih promjenljivih u polaznu jednačinu dobija se model sistema u prostoru stanja.

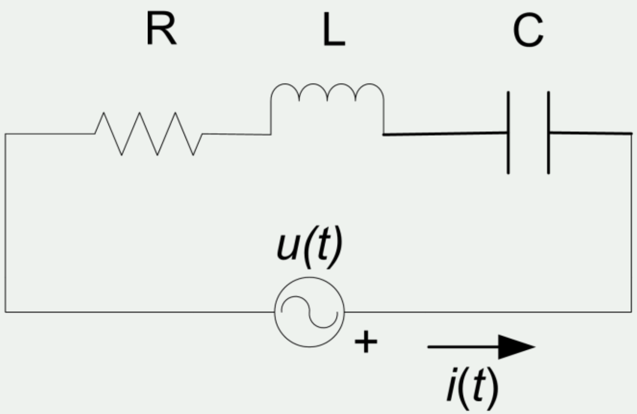
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}[u]$$

$$y=[0 \quad R]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0][u]$$

SS model

# Primjer – redno RLC kolo (II)

Kod elektičnih sistema postoji konvencija da se za promjenljive stanja usvajaju naponi na kondenzatorima i struje kroz kalemove. Ovo vodi ka jednostavnijem definisanju modela u prostoru stanja.




Za promjenljive stanja ćemo usvojiti struju $i_L$ i napon $u_c$. Treba pronaći:

$$\dot{i}_L = f(i_L, u_c, u)$$
$$\dot{u}_c = f(i_L, u_c, u)$$
$$y = f(i_L, u_c, u)$$

$$u - Ri_L - L\dot{i}_L - u_c = 0$$
$$i_C = i_L = C\dot{u}_c$$
$$y = Ri_L$$

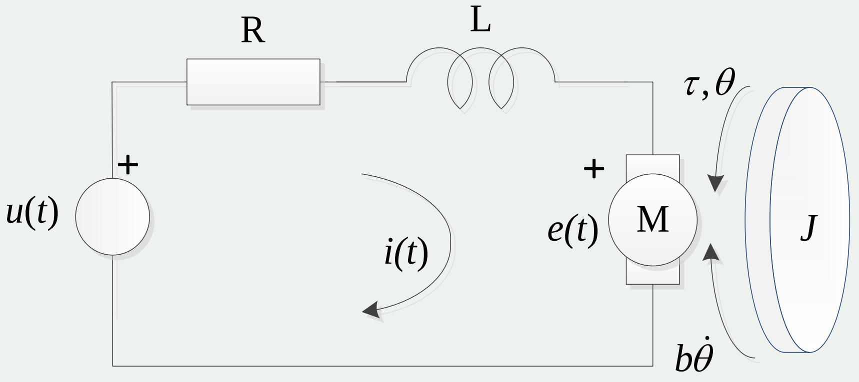
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [0][u]$$

SS model

# Primjer – DC motor

Model DC motora je prikazan na slici. Namotaji motora imaju otpornost $R$ i induktivnost $L$. Moment inercije vratila je $J$, dok je koeficijent trenja $b$. Usljed okretanja motora na namotajima se indukuje kontra elektromotorna sila $e$ koja je proporcionalna brzini okretanja vratila ($e = k_e\omega$). Obrtni moment koji rotira vratilo je proporcionalan struji kroz namotaje ($\tau=k_t i$).




Diferencijalne jednačine koje opisuju dati sistem imaju sljedeći oblik:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = k_t i$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_e\dot{\theta}.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/J & k/J\\ 0 & -k/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix}.$$

SS model

# Modelovanje pomoću funkcije prenosa (TF)

U opštem slučaju LTI sistem se opisuje diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+......+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+.....+b_1\frac{du}{dt}+b_0 u$$

Funkcija prenosa se definiše kao odnos izlaznog i ulaznog signala, pri nultim početnim uslovima. Koristeći osobinu izvoda, gornja jednačina se može prebaciti u $s$-domen:

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+......+a_1 s+a_0)Y(s)=(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+.....+b_1 s+b_0)X(s)$$

Funkcija prenosa je jednaka:

$$G(s)=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+.....+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+......+a_1 s+a_0}$$

$\boxed{\text{ODE model} \longleftrightarrow \text{TF model}}$

# Prelazak iz SS u TF domen

Na sličan se može naći veza između modela u prostoru stanja i funkcije prenosa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \cancel{\mathbf{x}(0^-)} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$ Osobina prvog izvoda

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$ Voditi računa da se radi o matričnoj jednačini

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{G}(s)\mathbf{X}(s)\\ \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\end{aligned}}$$

SS model $\longrightarrow$ TF model

# Tabela Laplasovih transformacija

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $h(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$ | $\frac{1}{1-e^{-Ts}}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^2}{2}$ | $\frac{1}{s^3}$ |
| $\frac{t^n}{n!}$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $1-e^{-at}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at}\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s+\omega^2}$ |
| $e^{-at}\cos(\omega t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |

# Osobine Laplasove transformacije

| Osobina | Ilustracija |
|---|---|
| **Definicija** | $f(t) \xleftrightarrow{L} F(s)$ <br> $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ |
| **Linearnost** | $Af_1(t) + Bf_2(t) \xleftrightarrow{L} AF_1(s) + BF_2(s)$ |
| **Prvi izvod** | $\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sF(s) - f(0^-)$ |
| **Drugi izvod** | $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$ |
| **n$^{th}$ izvod** | $\frac{d^n f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(n-i)}(0^-)$ |
| **Integral** | $\int_0^t f(t)dt \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}F(s)$ |
| **Množenje sa vremenom** | $tf(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{dF(s)}{ds}F(s)$ |

| Osobina | Ilustracija |
|---|---|
| **Vremenski pomjeraj** | $f(t-a)h(t-a) \xleftrightarrow{L} e^{-as}F(s)$ |
| **Kompleksni pomjeraj** | $f(t)e^{-at} \xleftrightarrow{L} F(s+a)$ |
| **Vremensko skaliranje** | $f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{L} aF(as)$ |
| **Konvolucija** | $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s)F_2(s)$ |
| **Teorema o početnoj vrijednosti** | $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$ |
| **Teorema o krajnjoj vrijednosti** | $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$ |

# Osobine funkcije prenosa

Nek od osobina funkcije prenosa su pobrojane ispod:

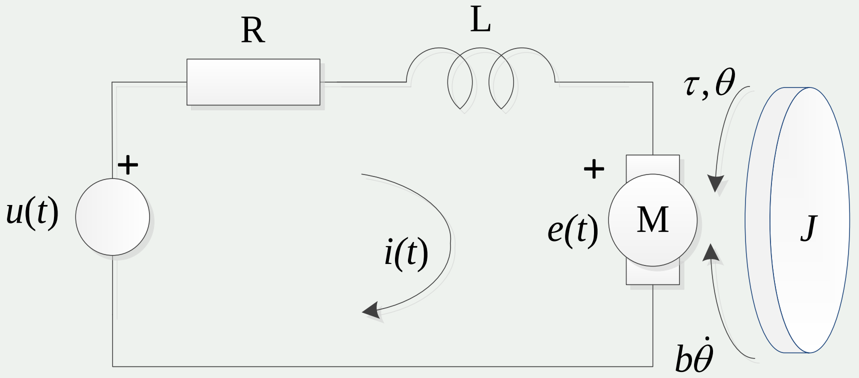
1. Primjenjiva ja samo na linearne vremenski invarijantne sisteme.
2. Izvedena je za nulte početne uslove.
3. Funkcija prenosa se može definisati i kao Laplasova transformacija impulsnog odziva sistema.
4. Prikazuje samo vezu između ulaza i izlaza, pa su neke bitnije informacije unutar sistema nevidljive.
5. Uprošćava matematičku analizu sistema: diferencijalne jednačine se svode na algebarske, konvolucija predstavlja množenje blokova u *s* domenu, itd.

# Primjer – DC motor

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = k_t i$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_e\ddot{\theta}.$$

ODE model




$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/J & k/J\\ 0 & -k/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix}.$$

SS model

Diferencijalne jednačine u $s$-domenu imaju oblik:

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = k_t I(s)$$

$$(Ls + R)I(s) = U - k_e\Theta(s).$$

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_t}{(Ls+R)(Js^2+bs) + k_e k_t}$$

TF model

Funkcija prenosa se dobija rješavajući gornji sistem jednačina ili koristeći vezu između prenosne funkcije i modela u prostoru stanja.

# Strukturni blok dijagram

Jedan način modelovanja je strukturni blok dijagram, pomoću kojeg se prikazuju komponetne sistema i njihove međusobne veze, odnosno tokovi signala među komponentama. Svaka komponenta sistema se modeluje odgovarajućom funkcijom prenosa, koja se određuje na osnovu diferencijlanih jednačina kojima se opisuje dinamičko ponašanje sistema.

Za razliku od funkcije prenosa koja daje informaciju o vezi između ulaza i izlaza, strukturni blok dijagram pruža deteljnije informacije o unutrašnjoj strukturi sistema.

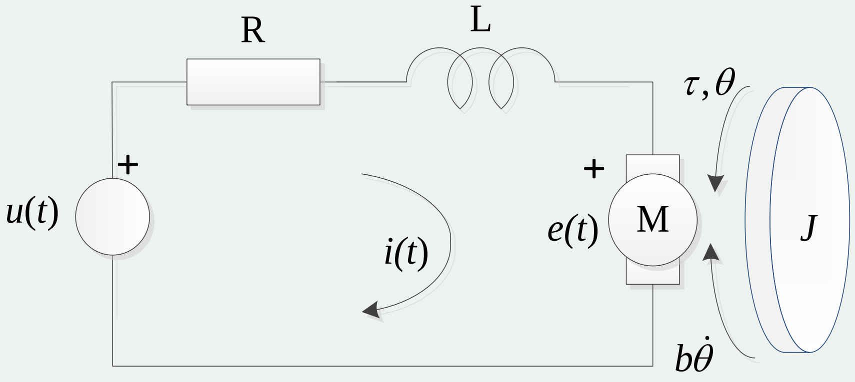
Na narednim predavanjima biće objašnjen postupak svođenja strukturnog blok dijagrama na osnovnu strukturu (funkciju prenosa).

# Primjer – DC motor

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = k_t I(s)$$
$$(Ls + R)I(s) = U - k_e\Theta(s).$$

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = k_t i$$
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_e\dot{\theta}.$$

ODE model



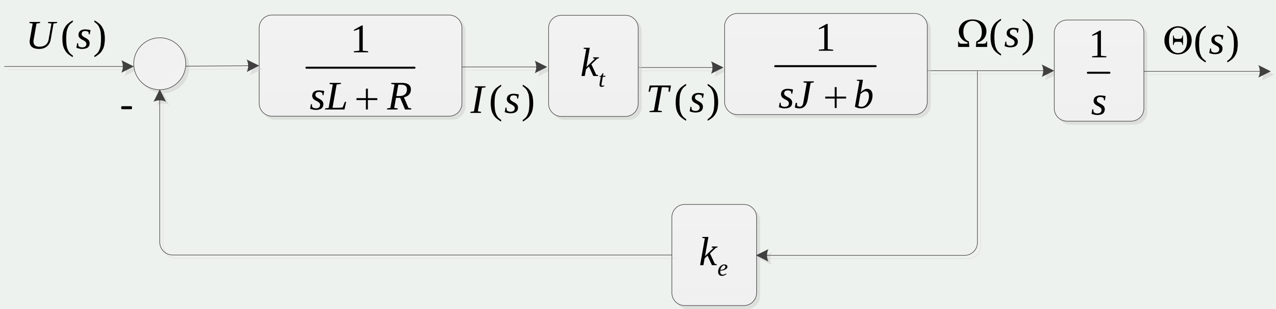

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/J & k/J\\ 0 & -k/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ i\end{bmatrix}.$$

SS model

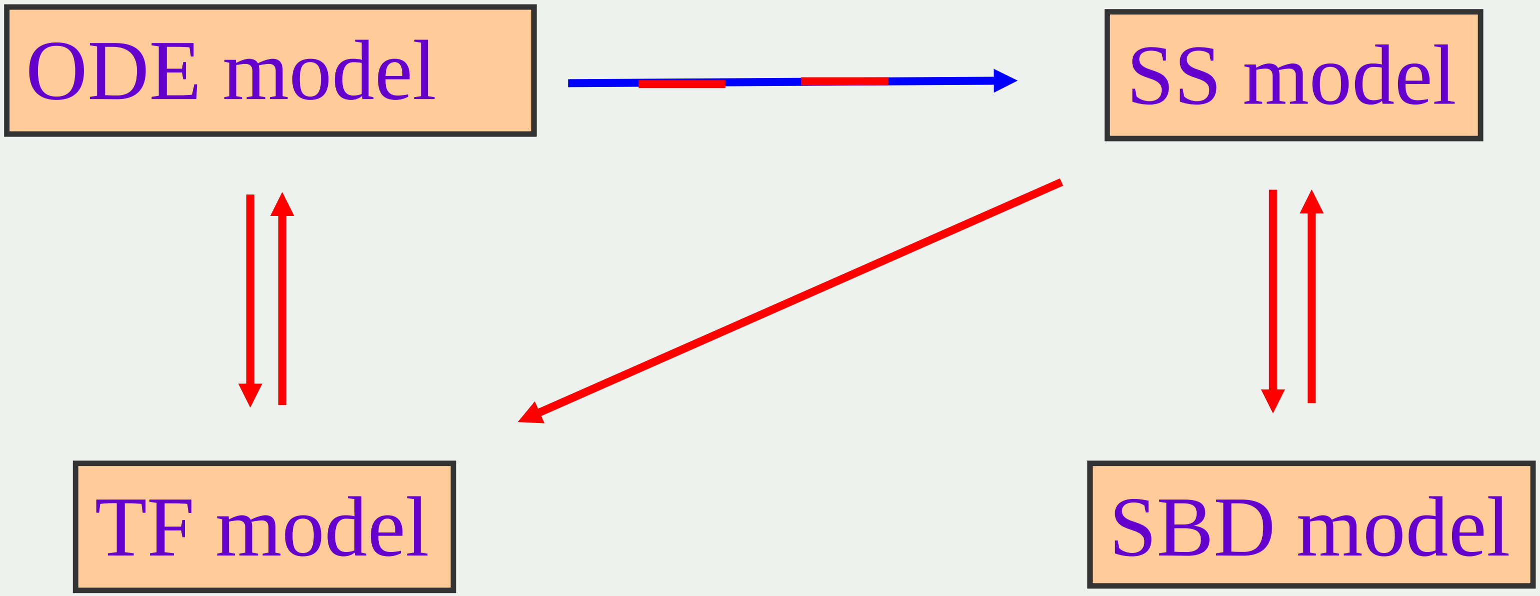
$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k_t}{(Ls+R)(Js^2+bs)+k_e k_t}$$

TF model




SBD model

# Različite reprezentacije sistema




Diskutovano na predavanjima

Na nekom od sljedećih predavanja

# Linearizacija sistema

- Veliki broj fizičkih sistema ima nelinearnu prirodu
- Matematički linearizacija znači pronalaženje linearne aproksimacije funkcije u okolini neke tačke

$$f(x) = f(x_s) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + stariji\ članovi$$

- Kod dinamičkih sistema linearizacije se najčešće vrši u okolini stacionarne tačke (ekvilibrijuma) koja se dobija izjednačavanjem izvoda sa nulom (izvod od konstante je jednak nuli)

# Jednačina sa jednom promjenljivom

$$\dot{x} = f(x), x(0^-) = x_p$$

Funkcija $f(x)$ može biti razvijena u Taylor-ov red u okolini stacionarne tačke $x_s$ (radna tačka):

$$f(x) = f(x_s) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s}(x - x_s) + stariji\ \check{c}lanovi$$

*Vrijednost izvoda funkcije $f(x)$ u tački $x_s$*

Stacionarna tačka $x_s$ se dobija izjednačavanjem izvoda sa nulom:

$$\dot{x} = f(x_s) = 0$$

# Jednačina sa jednom promjenljivom

$$\dot{x} \approx \cancelto{0}{f(x_s)} + \overbrace{\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s}}^{a} (x - x_s)$$

$$\dot{x} \approx a(x - x_s)$$

Kako je izvod od konstante jednak nuli, može se zapisati:

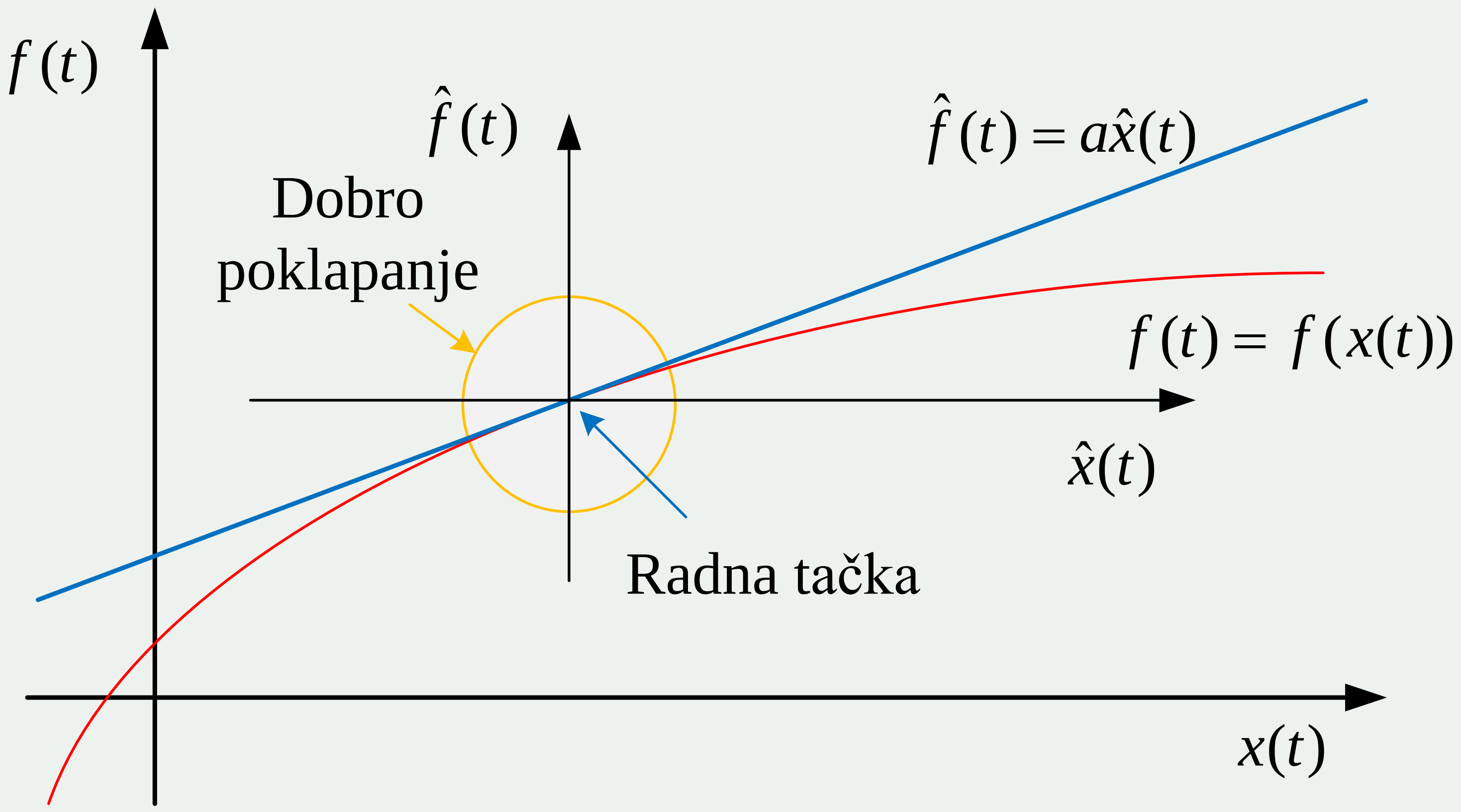
$$\frac{dx(t)}{dt} =$$

$$\frac{d(x - x_s)}{dt} \approx a(x - x_s)$$

Nas najčešće zanima devijacija sistema od stacionarnog stanja:

$$\boxed{\dot{\hat{x}} \approx a\hat{x},\ \hat{x}(0^-) = x_p - x_s,\ a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s}}$$

# Geometrijska interpretacija



# Jednačina sa jednom promjenljivom i izlazom

$$\dot{x} = f(x,u), x(0^-) = x_p$$

*Koristeći razvoj u Taylor-ov u okolini stacionarne tačke ($x_s$, $u_s$):*

$$f(x) = \cancelto{0}{f(x_s,u)} + \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{x_s}(x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s}(u - u_s) + stariji\ članovi$$

$$\dot{x} = f(x_s,u_s) = 0$$

$$\frac{d(x - x_s)}{dt} \approx \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{u_s}(x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s}(u - u_s)$$

$$\boxed{\hat{x} = x - x_s, \hat{u} = u - u_s}$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} \approx a\hat{x} + b\hat{u}, x(0^-) = x_p - x_s} \quad \boxed{a = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{u_s}, b = \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}}$$

# Jednačina sa jednom promjenljivom i izlazom

*Na sličan način se linearizuje izlazna jednačina*

$$y = g(x,u)$$

$$g(x,y) \approx g(x_s,u_s) + \left.\frac{\partial g(x)}{dx}\right|_{x_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}(u - u_s)$$

$$\dot{x} = f(x_s) = 0$$

$$y - y_s = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{u_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}(x - u_s)$$

$$\hat{y} = y - y_s, \hat{x} = x - x_s, \hat{u} = u - u_s$$

$$\boxed{\hat{y} \approx c\hat{x} + d\hat{u}} \qquad \boxed{c = \left.\frac{\partial g(x,u)}{dx}\right|_{u_s}, d = \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}}$$

# Linearizacija sistema u opštem obliku

Model u prostoru stanja nelinearnog sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Neka je $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ set trajektorija (rješenja) koja zadovoljavaju gornji sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)), \text{ za zadato } \mathbf{x}_s(t_0)$$
$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s)$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_Q) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s)$$

# Linearizacija sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_s,\mathbf{u}_s)\approx \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_s)+\left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}(\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_s)$$

$$\mathbf{y}(t)-\mathbf{g}(\mathbf{x}_s,\mathbf{u}_s)\approx \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_s)+\left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}(\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_s)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)&\approx \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(t)\\ \hat{\mathbf{y}}(t)&\approx \hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(t)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}&=\left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} & \mathbf{B}&=\left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}\\ \mathbf{C}&=\left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} & \mathbf{D}&=\left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}\end{aligned}}$$

# Primjer 1

Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) = -\sqrt{x(t)} + \frac{u^2(t)}{3}, x(0^-) = 0.5$$

Linearizovati model pod pretpostavkom da ulazni signal varira u okolini vrijednosti $u$=2.

$$u_s = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\sqrt{x_s} + \frac{2^2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{16}{9}$$

Radna tačka: $\boxed{u_s = 2, x_s = \frac{16}{9}}$

# Primjer 1

Postupak linearizacije:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \approx \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(t)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) \approx \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(t)$$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} \qquad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = -\frac{1}{2\sqrt{x_s}} = -\frac{3}{8}$$

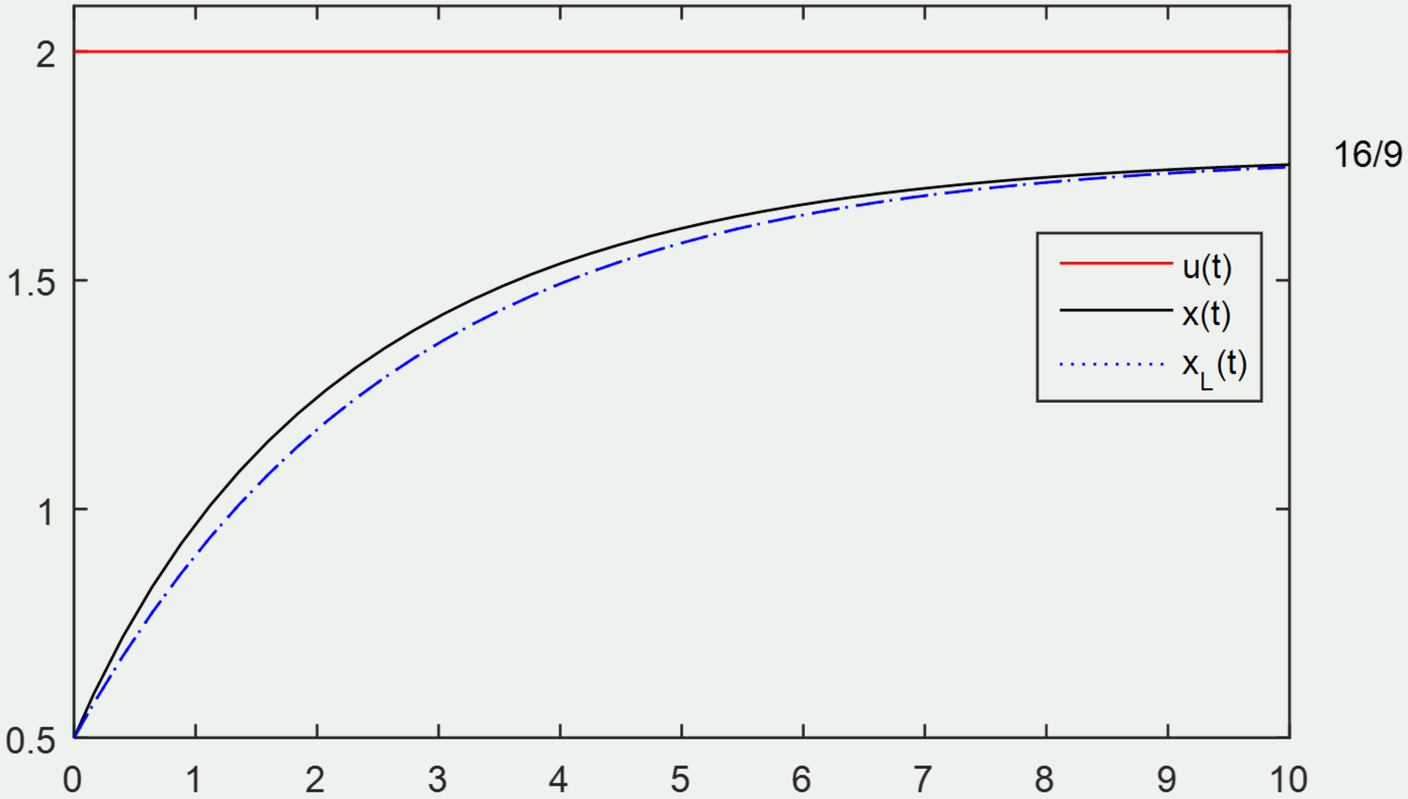
$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = \frac{2}{3}u_s = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = -\frac{3}{8}\hat{x} + \frac{4}{3}\hat{u}}$$

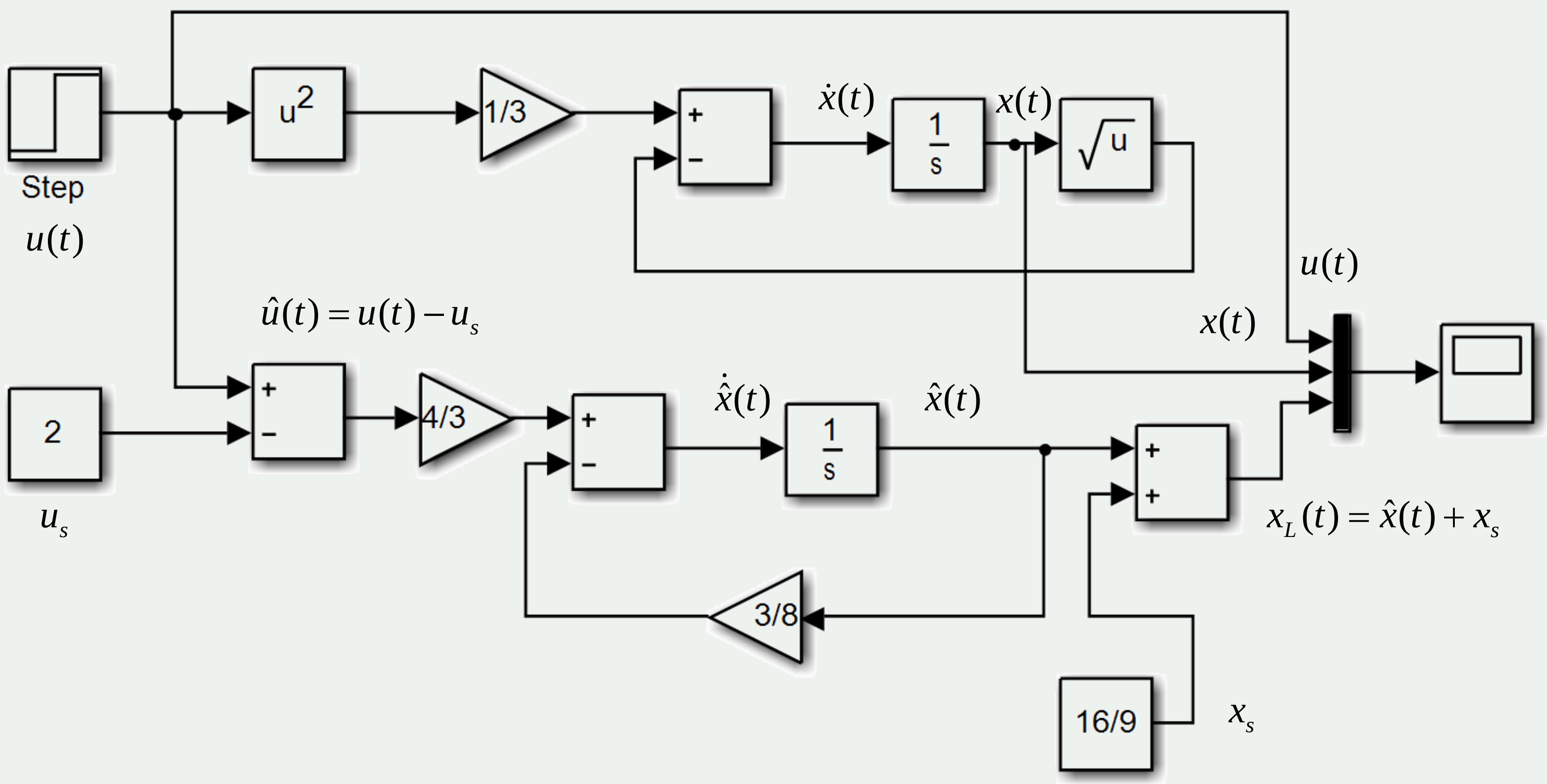
Odstupanje od nominalne vrijednosti $x_s = 16/9$

# Primjer 1

Simulacija diferencijalnih jednačina (u SIMULINK-u):

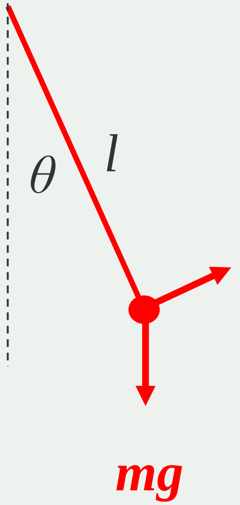


# Simulacioni blok dijagram



# Primjer 2

Modelovati klatno prikazano na slici, a zatim linearizovati dobijeni model u okolini stacionarne tačke.




$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = Fl - mgl\sin\theta, \quad J = ml^2 \qquad x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{ml} - \frac{g}{l}\sin x_1$$

$$x_{1s} = x_{2s} = u_s = 0$$

stacionarna tačka (ravnotežno stanje)

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} \hat{F}$$

*Napomena: Postoji još jedna stacionarna tačka u* $x_2 = u = 0,\ x_1 = \pi$