SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Predavanje 4

Prostor stanja: jednačine kretanja i kanonične forme

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu fundamentalnu matricu sistema
- Odrede analitički izraz promjenljivih u prostoru stanja za zadatu pobudu i početne uslove
- Odrede funkciju prenosa sistema na osnovu poznatog SS modela
- Odrede SS model na osnovu poznate funkcije prenosa

Kretanje sistema u prostoru stanja

Generalno, u prostoru stanja ponašanje sistema se modeluje na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Za promjenljive stanja treba usvjiti minimilana skup lienarno nezavsnih promjenljivih, pri čemu one ne moraju da imaju fizički smisao.

Specijalno za LTI sisteme važi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Nas zanima kako analitičkim putem da odredimo vremenske oblike promjenljivih stanja $\mathbf{x}(t)$ i izlaza sistema $\mathbf{y}(t)$, za zadate početne uslove $\mathbf{x}_0$ i pobudu sistema $\mathbf{u}(t)$.

Odziv na početne uslove

Za početak posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu, odnosno slučaj kada je ulazni signal jednak nuli:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Za rješenje gornjeg sistema se može pretpostaviti da je u obliku reda:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \ldots$$

Uvrštavanjem prethodne jednačine u polaznu jednačinu i izjednačavanjem koeficijenata sa lijeve i desne strane, dobija se:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \ldots \right)\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

Funkcija označena sa $e^{\mathbf{A}t}$ se zove matrična ekponencijalna funkcija, zbog analogije sa skalarnom eksponencijalnom funkcijom:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2 t^2 + \frac{1}{3!}a^3 t^3 + \ldots$$

Odziv na početne uslove

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$$

Funkcija $e^{\mathbf{A}t}$ se zove i fundamentalna matrica sistema ili matrica tranzicije, pri se obično označava sa $\mathbf{\Phi}(t)$. Matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ sadrži sve informacije o dinamici sistema, odnosno njome je definisano kretanje sistema u prostoru stanja.

Fundamentalna matrica se može definisati i u Laplasovom domenu. Prebacivanjem homogene diferencijalne jednačine u s-domen dobija se:

$$\mathbf{s}\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}(s) = \overbrace{\boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}}^{\mathbf{\Phi}(s)}\mathbf{x}_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)}$$

Ukoliko se početni uslovi poznati u nekom proizvoljnom trenutku ti, onda je odziv na početnje uslove jednak (osobina vremenske invarijantnosti):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}(t_0).$$

Primjer - odziv na početne uslove

Odrediti izraze za promjenljive stanja zadatog sistema, za zadate početne uslove:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x},\ \ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right)$$

Promjenljiva stanja x_1

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t}-e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Promjenljiva stanja x_2

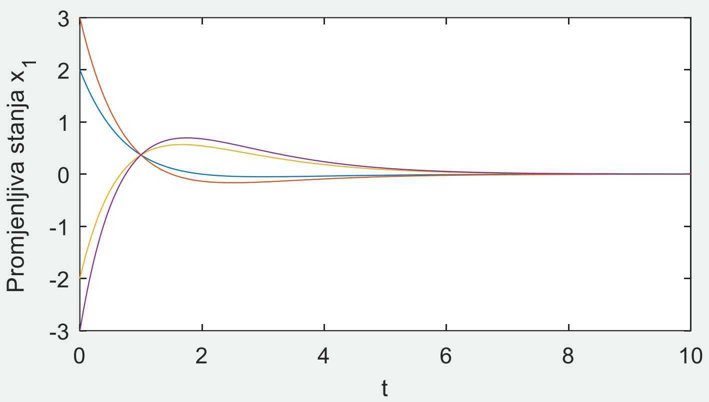
Primjer - odziv na početne uslove

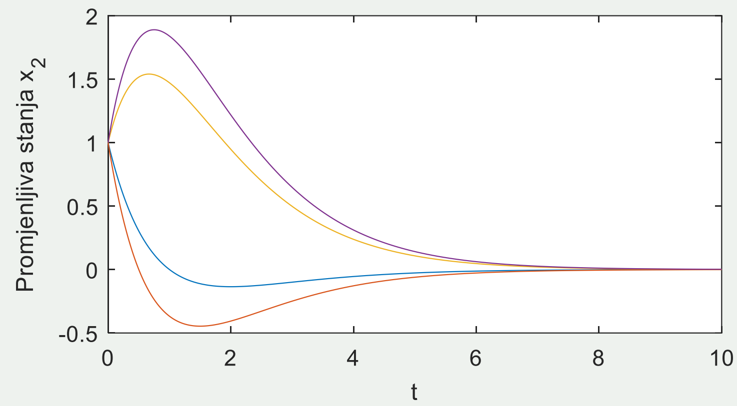
Promjenljive stanja se jednostavno mogu izračunati u Matlab-u:

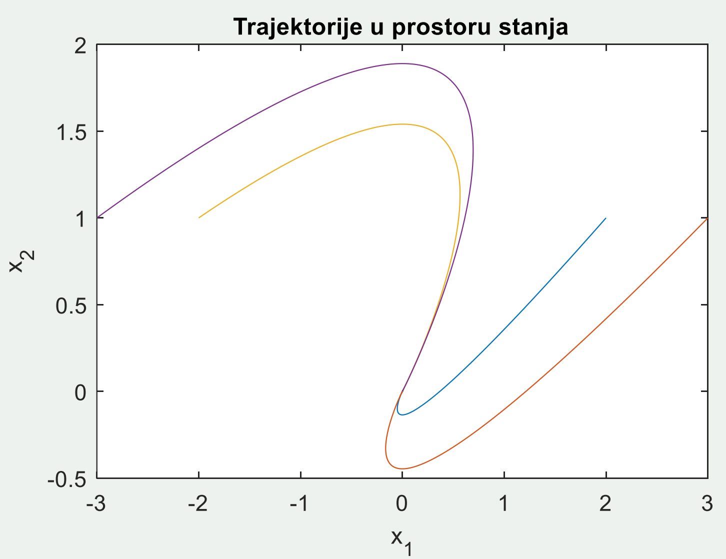
```
A=[-2 1;0 -3]
x0=[2;1];
syms t
Fi=expm(A*t)
x=Fi*x0
Fi =
[ exp(-2*t), exp(-2*t) - exp(-3*t)]
[         0,              exp(-3*t)]
x =

 3*exp(-2*t) - exp(-3*t)
              exp(-3*t)
```

Primjer - odziv na početne uslove







Na slikama iznad su prikazane promjenljive stanja za različite početne uslove. Na slici lijevo su prikazane odgovarajuće trajektorije sistema u prostoru stanju, odnosno zavisnost f(x_1,x_2). Na primjer, sistem se kreće iz tačke (-3, 1) prikazanom putanjom i zaustavlja se u tački (0,0). Sa prve dvije slike se uočava da mu je potrebno oko 7*s* da pređe pomenutu (i svaku ostalu) putanju.

Jednačine stanja za zadatu pobudu

Do analitičkog izraza za promjenljive stanja pobuđenog sistema se takođe može doći posmatranjem jednačine stanja u *s*-domenu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \longrightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s).$$

Iz prethodne jednačine se može izraziti vektor $\mathbf{X}(s)$:

Konvolucija

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{U}(s).$$

Izraz za $\mathbf{x}(t)$ se dobija primjenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

Izlazni signal je jednak:

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathrm{t})}$$

Primjer - jednačine stanja za zadatu pobudu

Odrediti odziv zadatog sistema na step pobudu, za proizvoljne vrijednosti početnih uslova:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Prvo ćemo odrediti fundamentalnu matricu:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Primjer - jednačine stanja za zadatu pobudu

Promjenljive stanja se računaju kosteći izraz:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)x_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Konačno izlaz sistema je jednak:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= x_2(0)e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} d\tau = x_2(0)e^{-3t} + e^{-3t}\left(\frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3}\right) = x_2(0)e^{-3t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Primjer - jednačine stanja za zadatu pobudu

```
A=[-2 1;0 -3];B=[0;1];C=[0 1];
x0=[2;1];
syms t tau
Fi=expm(A*t)
Fi1=subs(Fi,t-tau)
x=Fi*x0+int(Fi1*B*1,tau,0,t)
y=C*x
Fi =
[ exp(-2*t), exp(-2*t) - exp(-3*t)]
[         0,             exp(-3*t)]
Fi1 =
[ exp(2*tau - 2*t), exp(2*tau - 2*t) - exp(3*tau - 3*t)]
[                0,                    exp(3*tau - 3*t)]
x=
(5*exp(-2*t))/2 - (2*exp(-3*t))/3 + 1/6
                   (2*exp(-3*t))/3 + 1/3
y =
(2*exp(-3*t))/3 + 1/3
```

Određivanje TF na osnovu SS

Da bi odredili vezu između prostora stanja i funkcije prenosa, jednačine stanja i izlaza iz vremenskog domena treba prebaciti u Laplasov domen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \cancelto{0}{\mathbf{x}(0^-)} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

Konačno, veza između funkcije prenosa matrica **A**, **B**, **C** i **D**.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Posmatrajući prethodni izraz, može se zaključiti da je karakteristični polinom sistema jednak:

$$\boxed{f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

Primjer - određivanje TF na osnovu SS

Odrediti funkciju prenosa sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -5\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 1\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Funkcija prenosa je jednaka:

$$G(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{12s^2+65s+39}{s^3+4s^2+2s+3}$$

```
A=[1 2 3;0 0 1;-2 -1 -5]
B=[2;5;1]
C=[1 2 0]
syms t
G=simplify(C*(s*eye(3)-A)^-1*B)
G =
 (12*s^2 + 65*s + 39)/(s^3 + 4*s^2 + 2*s + 3)
```

Određivanje SS na osnovu TF

Prethodno je pokazano kako dobiti funkciju prenosa sistema, ako je poznat njegov model u prostoru stanja. Sada treba pokazati kako dobiti model u prostoru stanja, kada je poznata funkcija prenosa.

Postoji beskonačan broj „realizacija“ sistema u prostoru stanja, jer postoji beskonačan broj različitih prostora. Sa druge strane različitim realizacijama sistema u prostoru stanja uvijek odgovara jedna funkcija prenosa.

Prostor stanja predstavlja n-dimenzionalni koordinatni sistem, te se različite realizacije mogu dobiti raznim linearnim transformacijama, tj. smjenama i prelaskom u drugi koordinatni sistem.

Sve realizacije su ekvivalentne u matematičkom smislu. Međutim, postoje neki stanadardni načini zapisivanja jednačina stanja, odnosno takozvane kanonične realizacije.

Jedna reprezentacija može imati prednosti u odnosu na druge. Na primjer, za potrebe analize, promjenljive stanja nekad treba odabrati tako da imaju fizički smisao.

Određivanje SS na osnovu TF

Prije nego što pokažemo kako se određuje model sistema u prostoru stanja zadatog funkcijom prenosa u opštem obliku:

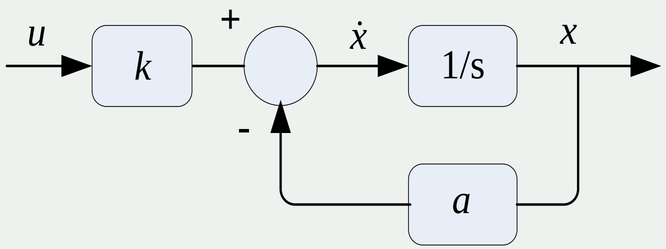
$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}, m<n \text{ i } a_n=1$$

razmotrićemo funkciju prenosa prvog reda i odgovarajuću diferencijalnu jednačinu:

$$G=X(s)/U(s)=\frac{k}{s+a}\Rightarrow \dot{x}(t)=-ax(t)+ku(t)$$

Kvazi-analogni blok dijagram ili simulacioni dijagram sistema je dijagram koji se sastoji od elementarnih komponenti: integratora, sabirača i pojačavača. Konkrento za dati primjer, on se može nacrtati na osnovu diferencijalne jednačine

$$\dot{x}(t)=-ax(t)+ku(t)$$

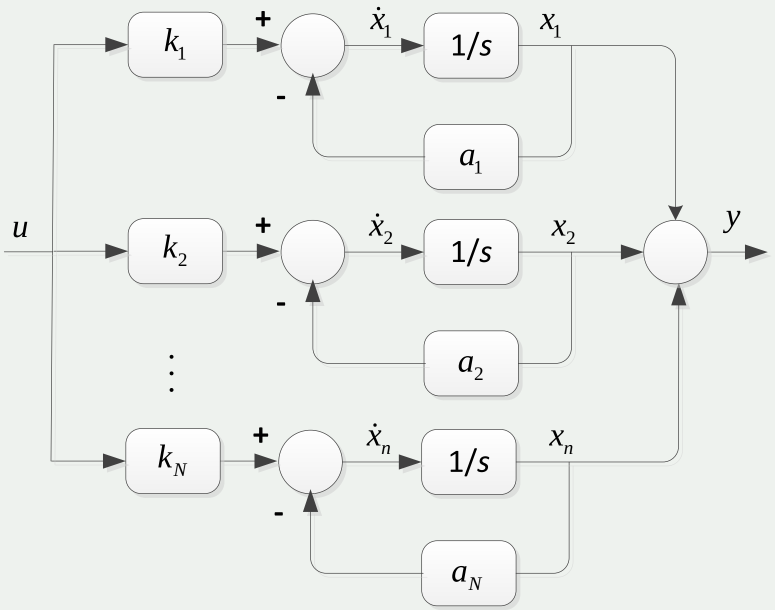


Paralelno programiranje

Paralelno programiranje je postupak za određivanje modela u prostoru stanja sistema opisanih funkcijama prenosa koje imaju proste i realne polove:

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{(s+a_1)(s+a_2)\ldots(s+a_n)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{s+a_i},\quad \boxed{m<n \text{ i } a_n=1}$$

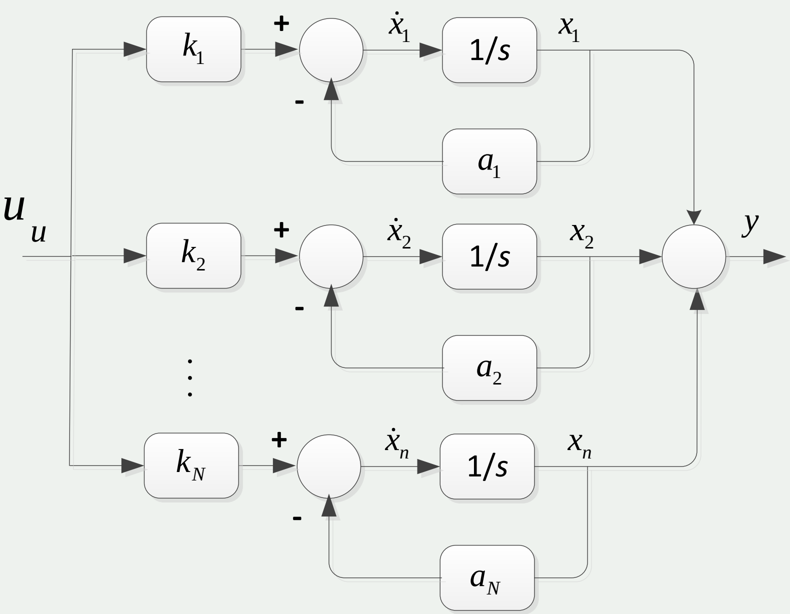
Kvazi-analogni blok dijagram sistema je prikazan na slici desno. Za promjenljive stanja se usvajaju izlazi iz integratora. Model sistema u prostoru stanja se dobija očitavanjem jednačina sa kvazi-analognog blok dijagrama.



Paralelno programiranje

Nakon ispisivanja jednačina za svaki integrator, formira se model u prostoru stanju u matričnom obliku:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \cdots \\ \dot{x}_i \\ \cdots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-a_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & -a_i & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{N-1} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \cdots \\ k_{N-1} \\ k_N \end{bmatrix} u
$$



$$
y = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}
$$

Dijagonalna kanonična forma

Paralelno programiranje

Model u prostoru stanja predstavljen na način se zove dijagonalna kanonična forma, jer je matrica **A** dijagonalna. Još jedan naziv za ovaj oblik je modalna forma, jer su dijagonalni elementi matrice **A** jednaki polovima sistema, koji se nekad zovu i modovima.

Korisna osobina dijagonalne kanonične forme ja što se za nju računanje fundamentalne matrice pojednostavljuje:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

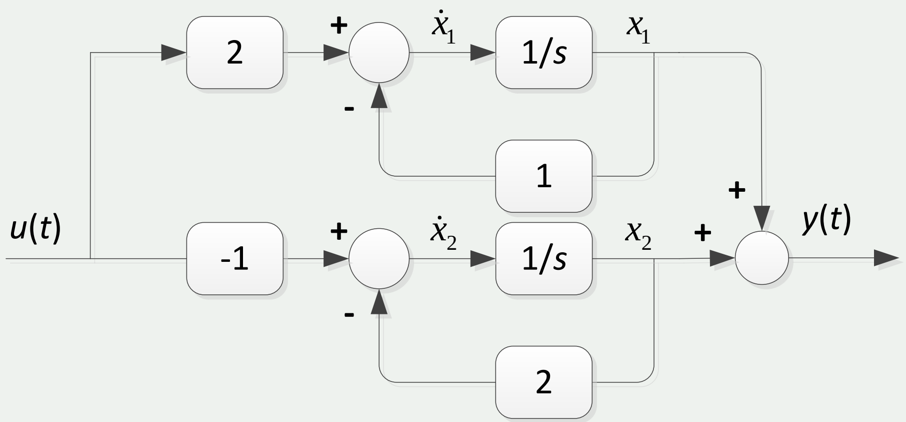
Na ovaj način se značajno pojednostavljuje računanje odziva na početne uslove. Mana ovog pristupa je što promjenljive stanja u kanoničnom prostoru nemaju fizički smisao, pa se odgovarajućim transformacijama treba vratiti u fizički prostor stanja.

Primjer - paralelno programiranje

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Odrediti model u prostoru stanja u obliku Jordanove kanonične forme.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica i odziv na početne uslove su jednaki:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0)e^{-t} \\ x_2(0)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Paralelno programiranje

Sistem je moguće predstaviti u dijagonalnoj formi jedino ako su sopstvene vrijednosti proste i realne. Ako funckija prenosa ima višestruke polove, onda se ona u prostoru stanja može zapisati u blok-dijagonalnoj ili Jordanovoj kanoničnoj formi.

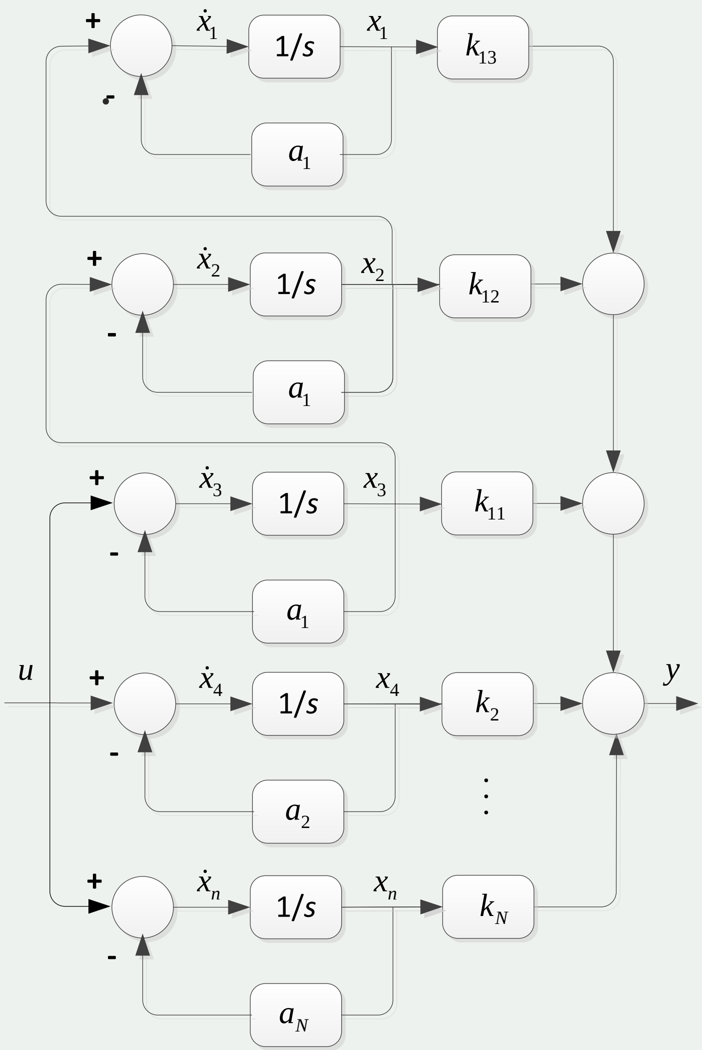
Neka je funkcija prenosa data kao proizvod elementarnih funkcija prenosa:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s+a_1)^3 (s+a_2) \ldots (s+a_N)}$$

$$= \frac{k_{11}}{s+a_1} + \frac{k_{12}}{(s+a_1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+a_1)^3} + \sum_{i=2}^{N} \frac{k_i}{s+a_i}, \quad \boxed{m < n \text{ i } a_n = 1}$$

Na gubeći na opštosti, pretpostavili smo da je prvi pol sistema trostruk.

Paralelno programiranje



$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -a_1 & 1 & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
0 & \cdots & 0 & -a_2 & & 0\\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & -a_N
\end{array}\right]
\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} u
$$

$\mathbf{J}$

$$
y = \begin{bmatrix}k_{13} & k_{12} & k_{11} & \cdots & k_N\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ \\ x_n\end{bmatrix}
$$

Jordanova kanonična forma

Paralelno programiranje

Model u prostoru stanja predstavljen na prethodni način se zove blok-dijagonalna kanonična ili Jordanova kanonična forma, jer matrica **J** ima strukturu Jordanove matrice. Fundamentalna matrica i u ovom slučaju se jednostavnije računa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & te^{-a_1 t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{n-1!} e^{-a_1 t} \\ 0 & e^{-a_2 t} & te^{-a_1 t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

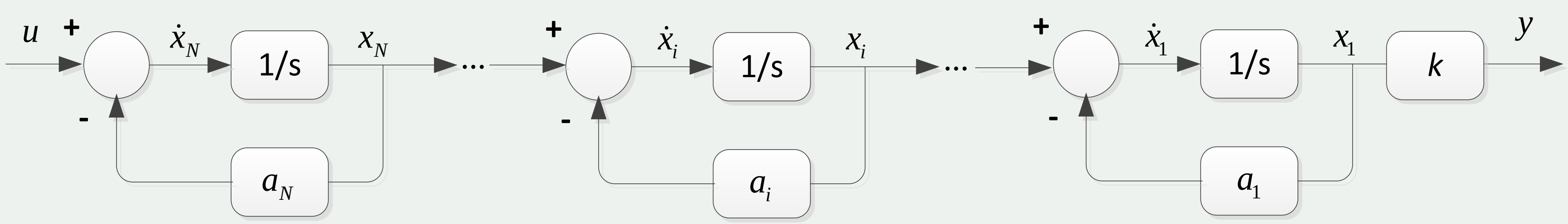
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}t} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

Redno programiranje

Ukoliko funkcija prenosa ima samo realne polove, pri čemu nema nula, onda se model u prostoru stanja može formirati na način koji se zove redno programiranje :

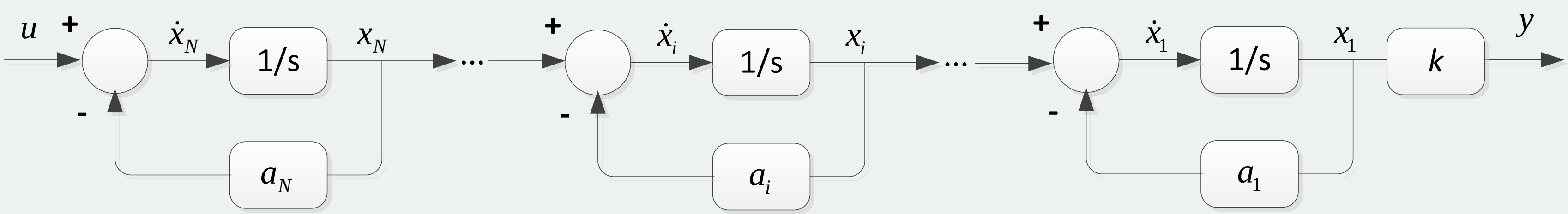
$$G(s) = \frac{k}{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_N)} = k\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{s+a_i}$$

Kvazi-analogni blok dijagram sistema predstavlja kaskadnu, odnosno rednu vezu, funkcija prenosa prvog reda.



Redno programiranje

Model sistema u prostoru stanja se dobija očitavanjem jednačina sa kvazi-analognog blok dijagrama.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_i \\ \dots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & -a_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -a_{N-1} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} k & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}$$

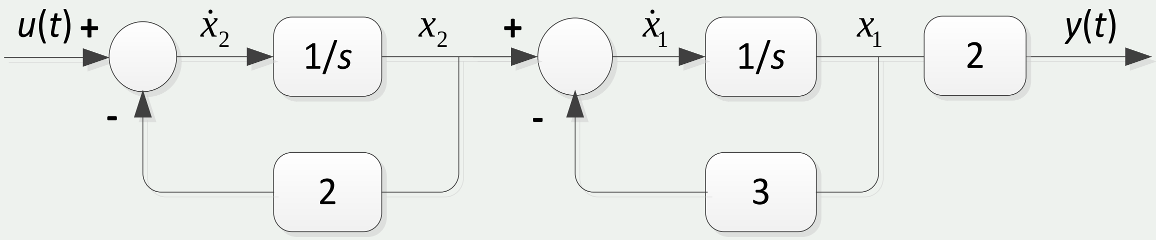
Redno programiranje

Primjer - redno programiranje

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)}.$$

Odrediti model u prostoru stanja pomoću rednog programiranja.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Direktno programiranje - KKF

Ako je funkcija prenosa data u genaralnom obliku, tada postoje dva na standardna načina zapisivanja matrica u prostoru stanja: kontrolabilna kanonična forma i opservabilna kanonična forma.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \boxed{m < n \text{ i } a_n = 1}$$

U cilju određivanja kontrolabilne kanonične forme, funkciju prenosa treba pomožiti sa pomoćnim signalom $E(s)$, a zatim preko njega izraziti ulazni i izlazni signal:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \frac{E(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) E(s) = U(s)$$

$$(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) E(s) = Y(s)$$

Direktno programiranje - KKF

Prethodne jednačine u vremenskom domenu imaju sljedeći oblik:

$$e^{(n)} + a_{n-1}e^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{e} + a_0 e = u(t) \text{ - jednačina stanja}$$

$$b_m e^{(m)} + b_{m-1}e^{(m-1)} + \ldots + b_1\dot{e} + b_0 e = y(t) \text{ - jednačina izlaza}$$

Za promjenljive stanja se usvaja promjenljiva *e* i njenih prvih *n*-1 izvoda:

$$\begin{aligned} x_1 &= e & \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \dot{e} & \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\ldots & &\ldots \\ x_{n-1} &= e^{(n-2)} & \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ x_n &= e^{(n-1)} \end{aligned}$$

Prvih *n*-1 jednačina stanja se dobija iz smjena.

Zadnja jednačina stanja i jednačina izlaza se dobija uvrštavanjem smjena u početne jednačine.

$$x^{(n)} = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \ldots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u(t)$$

$$y(t) = b_o x_1 + b_1 x_2 + \ldots + b_{m-1}x_{m-1} + b_m x_m$$

Direktno programiranje - KKF

Konačno model u prostoru stanja ima sljedeći oblik:

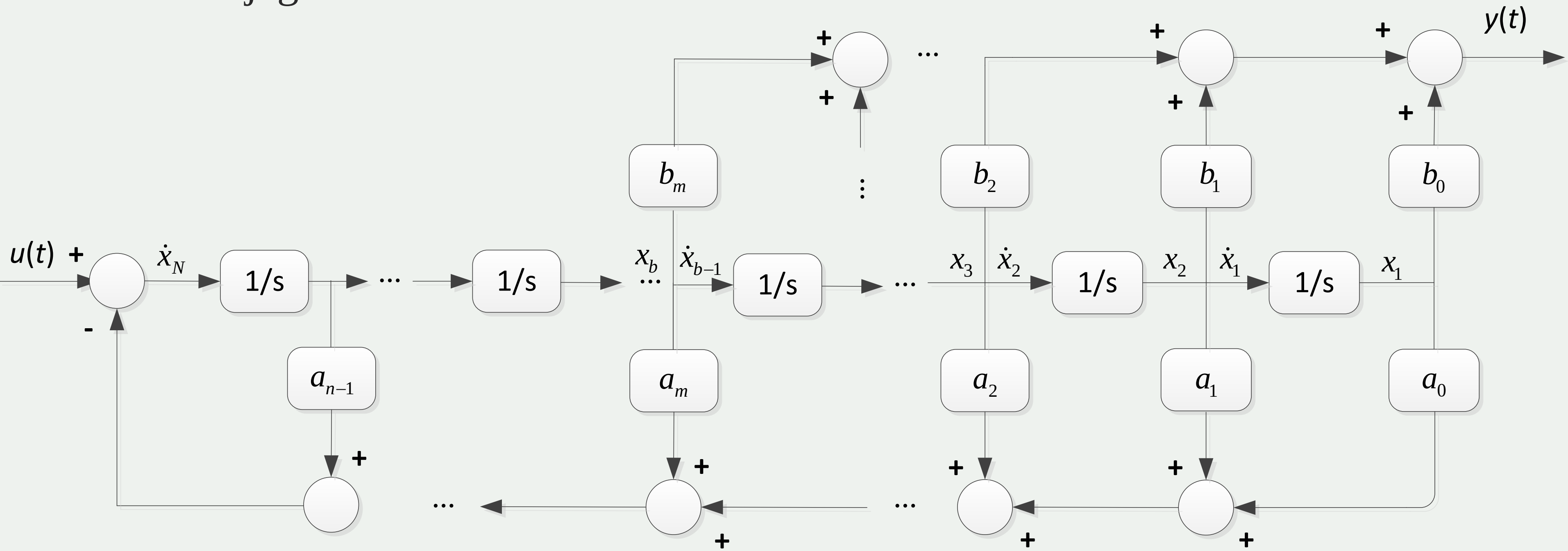
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Kontrolabilna kanonična forma!

Samo kontrolabilni sistemi mogu da se zapišu u ovom kanoničnom obliku.
O kontrolabilnosti će biti više rečeno na narednim predavanjima.
Kontrolabilna kanonična forma je pogodna za dizajn kontrolera.

Direktno programiranje - KKF

Na osnovu prethodnih jednačina stanja može se nacrtati kvazi-analogni blok dijagram sistema:



Kontrolabilna kanonična forma!

Šta ako su imenilac i brojilac istog reda?

Primjer - direktno programiranje, KKF

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6}.$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku kontrolabilne kanonične forme.

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Nacrtati kvazi-analogni blok dijagram!

Direktno programiranje - OKF

Opservabilna kanonična forma predstavlja još jednu standardnu realizaciju sistema.

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}, m<n \text{ i } a_n=1$$

Gornja funkcija prenosa se može zapisati u vidu diferencijalne jednačine:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1\dot{y}+a_0 y=b_m u^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\ldots+b_1\dot{u}+b_0 u$$

Dalje, prethodna diferencijalna jednačina se može zapisati na sljedeći način:

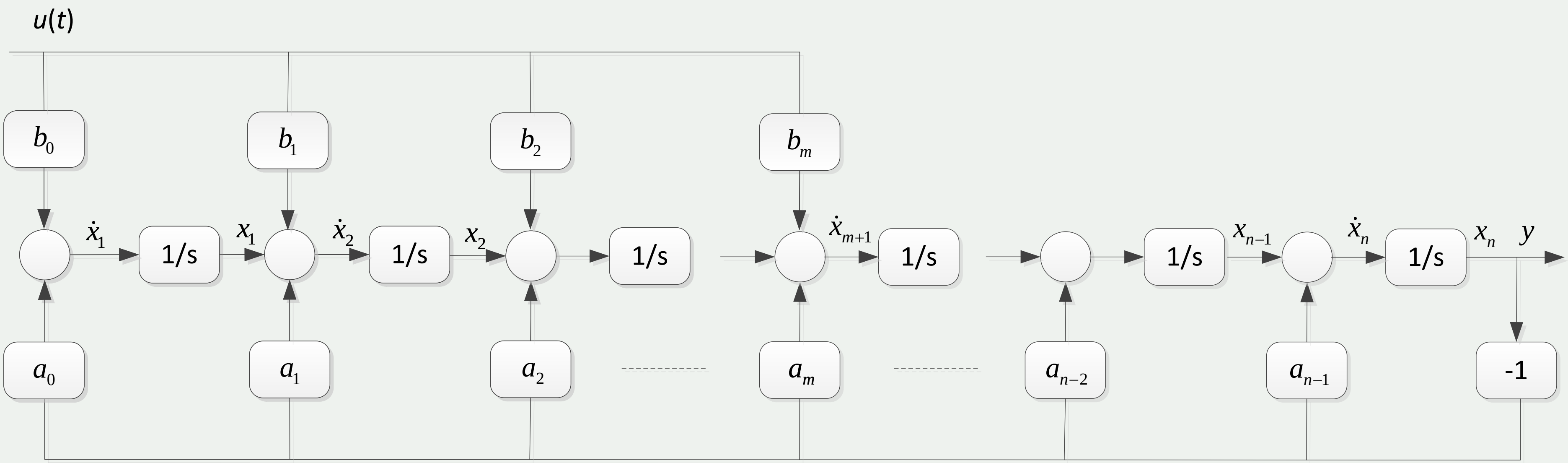
$$y^{(n)}=(b_0 u-a_0 y)+(b_1\dot{u}-a_1\dot{y})+(b_m u^{(m)}-a_m y^{(m)})-\ldots-a_{n-1}y^{(n-1)}$$

Integrljenjem goranje jednačine *n* puta, dobija se *y*(*n*), na osnovu čega se crta kvazi-analogni blok dijagram i formira model u prostoru stanja.

$$y^{(n)}=\int^{n}(b_0 u-a_0 y)+\int^{n-1}(b_1 u-a_1 y)+\int^{n-2}(b_m u-a_m y)-\ldots-\int a_{n-1}y$$

Direktno programiranje - OKF

Kvazi-analogni blok dijagram sistema OKF-a je dat na slici ispod.



Jednačine stanja se očitavaju sa dijagrama. Za opservabilnu i kontrolabilnu kanoničnu formu važi sljedeća veza:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_k^T, \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_k^T$$

$$\mathbf{C}_o = \mathbf{B}_k^T, \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_k.$$

Direktno programiranje - OKF

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \\ \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{n\times 1}, \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Opservabilna kanonična forma!

Samo opservabilni sistemi mogu da se zapišu u ovoj kanoničnoj formi. O opservabilnosti će biti više riječi na narednim predavanjima. Opservabilna kanonična forma je pogodna za dizajn opservera.

Ako su brojilac i imenilac funkcije prenosa istog reda, tada ih treba podijeliti. Koeficijent koji se dobije pri dijeljenju predstavlja matricu **D**, a od ostatka se formiraju matrice **A**, **B** i **C**, na neki od prethodno opisanih načina.

Primjer - direktno programiranje, OKF

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4}$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku opservabilne kanonične forme.

$$G(\mathrm{s}) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{\frac{1}{2}(2s^2 + 6s + 4) - 3s}{2s^2 + 6s + 4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-3s}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u$$

Primjer – DC motor

Na slici ispod je prikazana principijelna šema DC motora. Modelovati dati sistem u prostoru stanja:

a) za promjenljive stanja usvojite fizičke promjenljive

b) u obliku dijagonalne/Jordanove kanonične forme, ukoliko je moguće

c) u obliku kontrolabilne kanonične forme

d) u obliku opservabilne kanonične forme