
SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Predavanje 5

Osobine SAU-a: kontrolabilnost, opservabilnost i stabilnost

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Razumiju koncepte kontrolabilnosti i opservabilnosti
- ❖ Ispitaju kontrolabilnost i opservabilnost sistema koristeći različite kriterijume
- ❖ Shvate koncept stabilnosti - jedne od najznačajnijih osobina SAU-a
- ❖ Ispitaju apsolutnu stabilnost sistema koristeći Rausov kriterijum

Kontrolabilnost sistema

Posmatrajmo LTI sistem opisan u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Za LTI sistem kažemo da je **potpuno kontrolabilan (upravljiv)** ako postoji upravljački signal $\mathbf{u}(t)$ takav da pomjeri sistem iz bilo kog početnog stanja $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ u željeno stanje $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$ za neko konačno vrijeme t_1-t_0 .

Drugim riječima treba da postoji $\mathbf{u}(t)$ takav da važi:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_1$$

Posmatrajući izraz iznad, uočava se da kontrolabilnost zavisi samo od matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Naš zadatak je da ispitamo koji uslov treba da zadovolje matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, tako da gornja jednačina uvijek bude zadovoljena.

Kontrolabilnost sistema

Za izvođenje uslova kontrolabilnosti koristićemo [Cayley-Hamiltonovu](#) teoremu, na osnovu koje se može tvrditi da se proizvoljna matična funkcija može napisati kao linearna kombinacija njenih eksponentata do $(n-1)$ -og stepena:

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u izraz za jednačine stanja $\mathbf{x}$, dobija se

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \int_0^{t_1} \left[\alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1} \right] \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Posljednja jednakost se može zapisati u matičnom obliku:

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} r_0 &= \int_0^{t_1} \alpha_0(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau, \\ r_1 &= \int_0^{t_1} \alpha_1(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau, \\ r_{n-1} &= \int_0^{t_1} \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Kontrolabilnost sistema

Da bi sistem preveli iz stanja $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}_1$, potrebno je riješiti gornji sistem jednačina. Odnosno, prvo treba naći vektor $\mathbf{r}$, a zatim poznavajući $r_1, r_2, \dots, r_n$ odrediti upravljanje $\mathbf{u}(t)$.

$$e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{r}$$

Međutim, u ovom kursu nas ne interesuje pronalaženje upravljanja $\mathbf{u}(t)$ koje prevodi sistem iz nekog početnog u željeno stanje, već nas samo zanima **pod kojim uslovima to upravljanje postoji**.

$$e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{K} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \left[e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \right]$$

Prethodna jednačina ima jedinstveno rješenje jedino pod uslovom da je matrica $\mathbf{K}$ invertabilna.

Kontrolabilnost sistema

Drugim riječima, sistem je **potpuno kontrolabilan** ako važi sljedeće:

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = \text{rank}[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$$

$$\det(\mathbf{K}) \neq 0$$

Ako je $\text{rank}(\mathbf{K}) = n - p$, onda da sistem ima $n-p$ kontrolabilnih stanja. Preostalih p stanja nije kontrolabilno, što znači da na njih ne možemo direktno ili indirektno da utičemo ulaznim signalom ili su ona linearna kombinacija preostalih $n-p$ kontrolabilnih stanja.

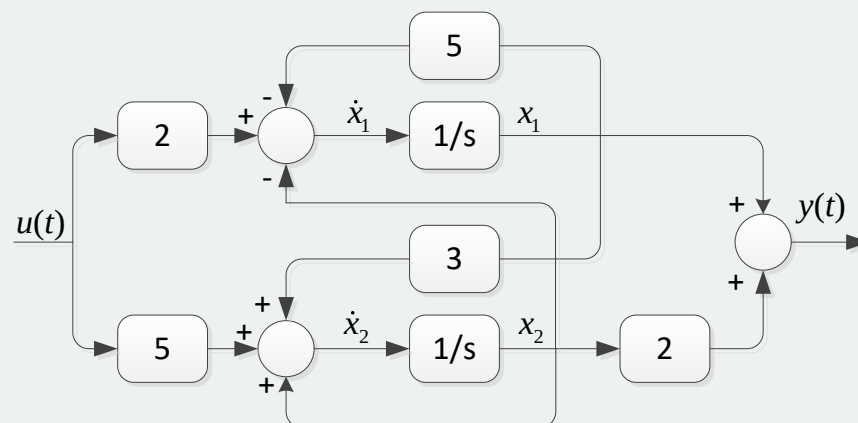
Iako se u ovom kursu nećemo baviti dizajnom regulatora u vremenskom domenu, treba naglasiti da je kontrolabilnost sistema od krucijalna važnosti za mnoge upravljačke probleme, koji se upravo rješavaju projektovanjem u vremenskom domenu.

Primjer 1 - kontrolabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B**, **C** i **D** kontrolabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = 97$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^* \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{K} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K})$$

Posmatrajući kvazi-analogni dijagram sa slike uočava se da između stanja x_1 , x_2 i ulaza postoji direktna veza, što znači da je sistem kontrolabilan.

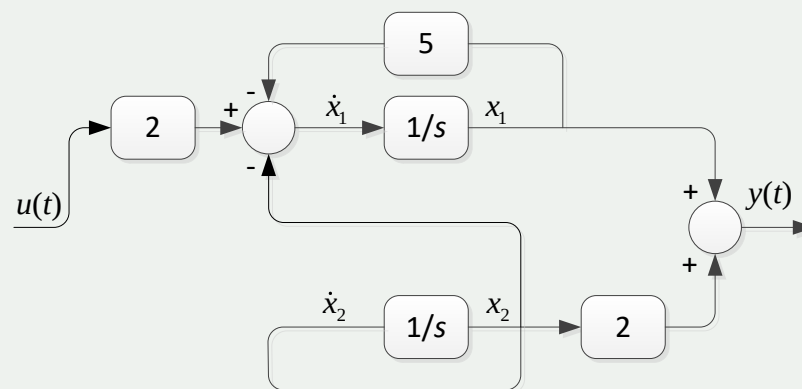
Napomena: veza može biti i indirektna. Odnosno ulaz može da upravlja stanjem x_2 preko stanja x_1 .

Primjer 2 - kontrolabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B**, **C** i **D** kontrolabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$



```
A=[-5 -1;0 1];
```

```
B=[2;0];
```

```
K=[B A*B]
```

```
det(K)
```

```
rank(K)
```

```
ans =
```

```
1
```

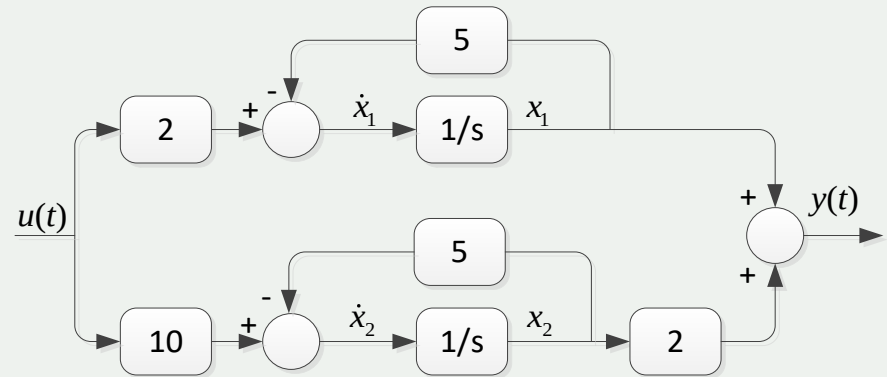
Rang matrice **K** je jednak 1, što znači da sistem ima jedno upravljivo i jedno neupravljivo stanje. Sa kvazi-analognog blok dijagrama se vidi da stanje x_2 nije upravljivo.

Primjer 3 - kontrolabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B**, **C** i **D** kontrolabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 2]$$

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 10 & -50 \end{bmatrix} = 0$$



```
A=[-5 0;0 -5];
```

```
B=[2;4];
```

```
K=[B A*B]
```

```
det(K)
```

```
rank(K)
```

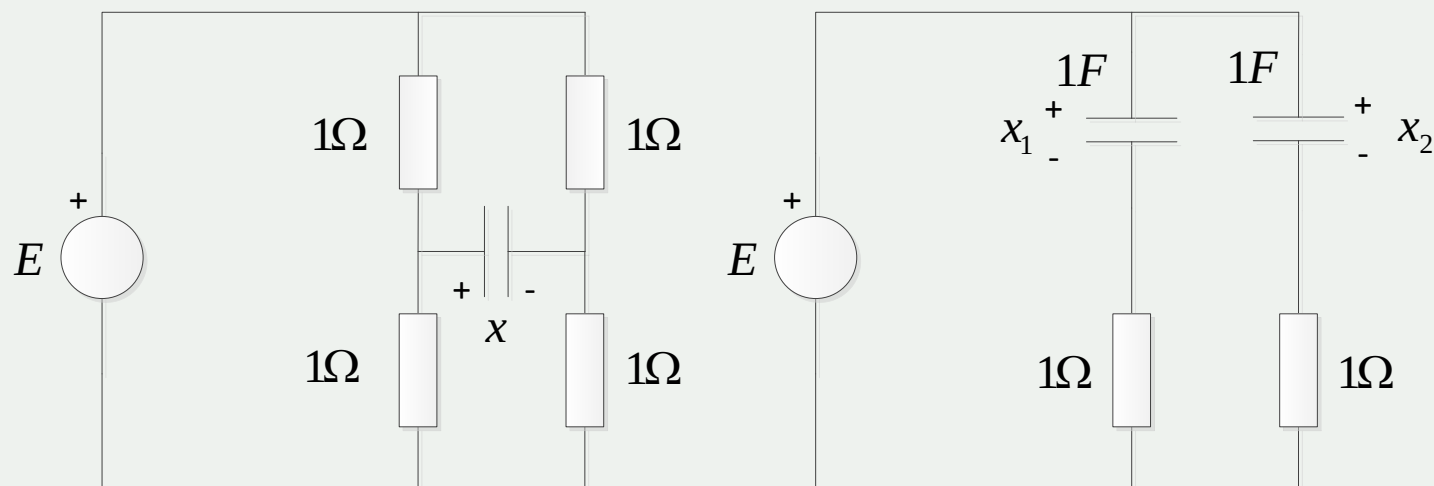
```
ans =
```

```
1
```

Posmatrajući kvazi-anlogni dijagram vidi se ulaz utiče na obje promjenljive, međutim one nijesu linearno nezavisne. U svakom trenutku $x_2 = 5x_1$, što znači ne postoji ulaz koji sistem može prevesti u bilo koje željeno stanje.

Primjer 4 - kontrolabilnost sistema

Da li su električni sistemi sa slike kontrolabilni?



Za električno kolo na slici lijevo, stanje x nije kontrolabilno. Most se nalazi u ravnoteži, te je napon (x) uvijek jednak nuli, bez obzira na promjene ulaznog napona. Kolo na slici desno takođe nije potpuno kontrolabilno. Stanja x_1 i x_2 su uvijek jednaka, jer su vrijednosti otpornika i kondenzatora jednake. Oba kola bi bila kontrolabilna da bar jedan otpornik/kondenzator ima drugu vrijednost.

Opservabilnost sistema

Neka je LTI sistem u prostoru stanja zadat jendačinama:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Za LTI sistem kažemo da je **potpuno opservabilan (osmotriv)** ukoliko je na osnovu mjerenja izlaznog vektora $\mathbf{y}(t)$ u nekom konačnom intervalu t_1 - t_0 moguće rekonstruisati vektor početnih stanja $\mathbf{x}_0$.

Drugim riječima, postavlja se pitanje pod kojim uslovima možemo odrediti $\mathbf{x}(0)$ ako mjerimo izlazni signal u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_n$?

Izlazni signal iz sistema je jednak:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Opservabilnost sistema

Izlazni signal iz sistema u trenutku t je jednak:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t).$$

Ako se gornja jednačina zapiše za n trenutka vremena, dobija se sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}y(t_1) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_1) \\y(t_2) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_2}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_2) \\&\dots \\y(t_n) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_n}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_n} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_n)\end{aligned}$$

Opservabilnost sistema

$$\begin{aligned}
 y(t_1) - \mathbf{C} \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_1) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_1} \mathbf{x}_0 \\
 y(t_2) - \mathbf{C} \int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_2) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_2} \mathbf{x}_0 \\
 \dots \\
 y(t_n) - \mathbf{C} \int_0^{t_n} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_n) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_n} \mathbf{x}_0
 \end{aligned}$$

Ako se lijeva strana jednačine označi sa odgovarajućim q_i , a sa desne strane matrica $e^{\mathbf{A} t_i}$ razvije u polinom koristeći Cayley-Hamiltonovu teoremu, može se zapisati sljedeće:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) & \alpha_1(t_1) & \dots & \alpha_{N-1}(t_1) \\ \alpha_0(t_2) & \alpha_1(t_2) & \dots & \alpha_{N-1}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0(t_n) & \alpha_1(t_n) & \dots & \alpha_{n-1}(t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}} \mathbf{x}(0) \longrightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{q}$$

Opservabilnost sistema

Nas trenutno ne zanima način pronalaženja vektora $\mathbf{x}_0$, već samo po pod kojima je to moguće odraditi.

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{q}$$

Prethodna jednačina ima jedinstveno rješenje jedino pod uslovima da je matrica $\mathbf{O}$ invertabilna. Drugim riječima, sistem je **poptuno opservabilan** ako važi sljedeće:

$$\text{rank}(\mathbf{O}) = \text{rank}(\mathbf{O}^T) = \text{rank} \left[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T^{N-1}} \mathbf{C}^T \right] = n$$

$$\det(\mathbf{O}) \neq 0$$

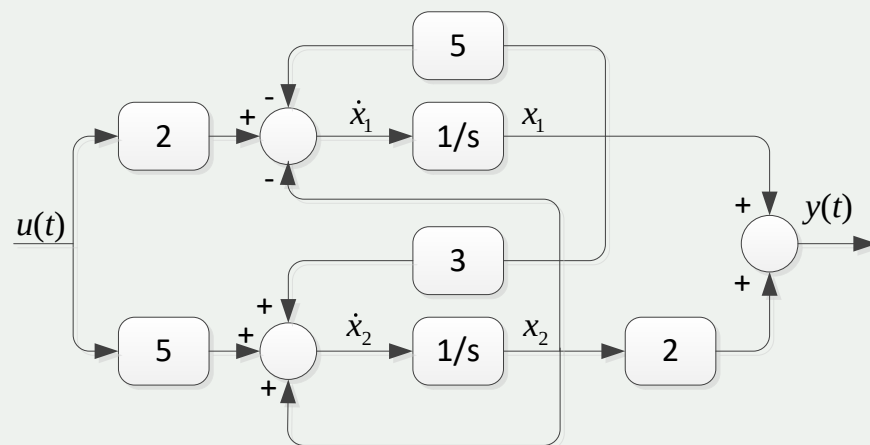
Ako je **$\text{rank}(\mathbf{O}) = n - p$** onda sistem **ima $n-p$ opservabilnih stanja**. Preostalih **p stanja nije opservabilno**, što znači ona nemaju direktnu ili indirektnu vezu sa izlazom ili su ona linearna kombinacija preostalih $n-p$ opservabilnih stanja.

Primjer 1 - opservabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B** i **C** opservabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 2]$$

$$\det(\mathbf{O}) = \det[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 1$$



$$\mathbf{A} = [-5 \quad -1; 2 \quad 0];$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 2];$$

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T * \mathbf{C}^T]$$

$$\mathbf{O} =$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$\det(\mathbf{O})$$

Posmatrajući kvazi-anlogni dijagram vidi se između x_1 , x_2 i izlaza postoji direktna veza, što znači da je sistem opservabilan.

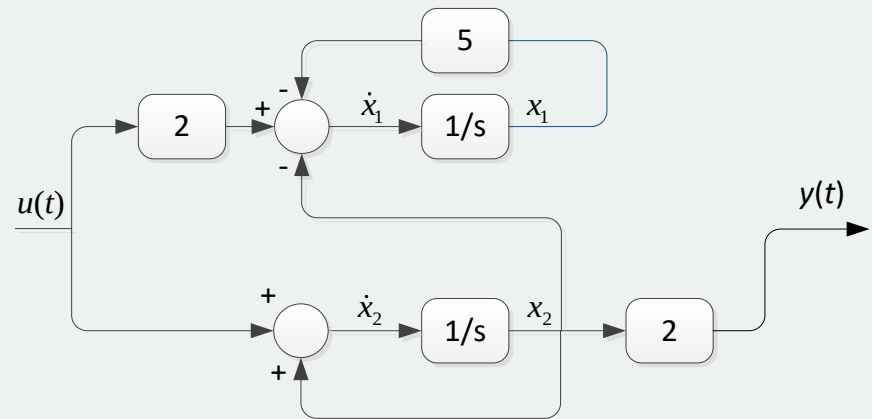
Napomena. Veza može biti i indirektna, odnosno x_2 može da bude povezan na izlaz preko x_1 , i obrnuto.

Primjer 2 - opservabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B** i **C** opservabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{O}) = \det[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$



```
A=[-5 -1;0 1];
C=[0 1];
O=[C' A'*C']
det(O)
rank(O)
ans =
    1
```

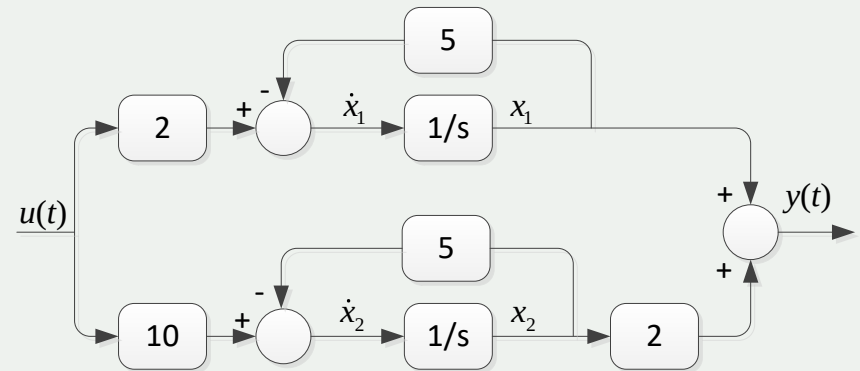
Rang matrice **O** je jednak 1, što znači da sistem ima jedno opservabilno i jedno neopservabilno stanje. Sa dijagrama se vidi da stanje x_1 nije opservabilno.

Primjer 3 - opservabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B** i **C** opservabilan?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{BA}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 10 & -50 \end{bmatrix} = 0$$



```
A=[-5 0;0 -5];
```

```
B=[2;4];
```

```
K=[B A*B]
```

```
det(K)
```

```
rank(K)
```

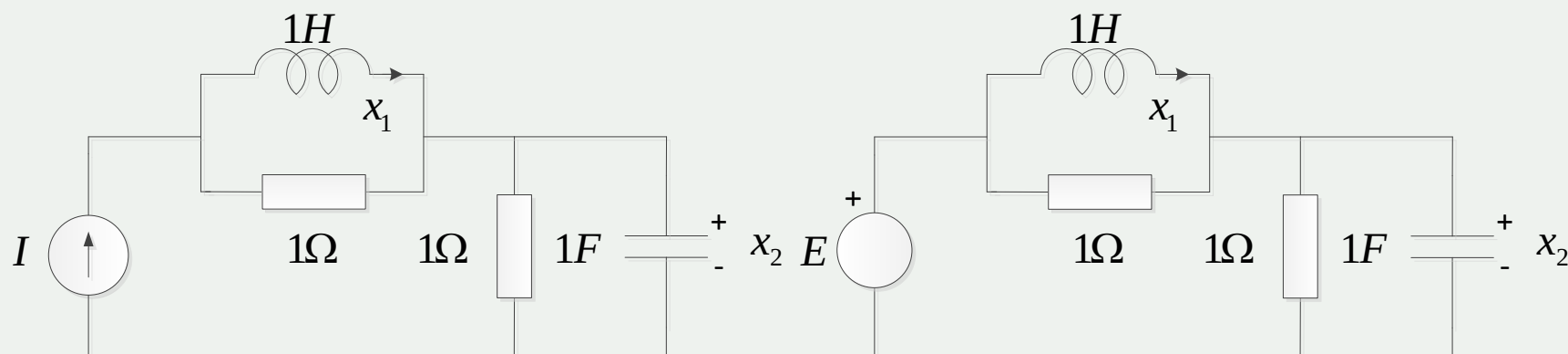
```
ans =
```

```
1
```

Posmatrajući kvazi-anlogni dijagram vidi su na izlaz povezane obje promjenljive. Međutim, kako je u svakom trenutku $x_2 = 5x_1$ sistem nije potpuno opservabilna (stanja su linearno zavisna).

Primjer 4 - opservabilnost sistema

Da li su električni sistemi sa slike opservabilni, ako kao izlaz posmatramo napon na kondenzatoru?



Za električno kolo na slici lijevo, jedino je stanje x_2 opservabilno. Njega svakako direktno mjerimo, jer je izlaz jednak naponu. Stanje x_1 nije opservabilno, jer izlaz (x_2) zavisi samo od ulaza, tj. od struje I . Sa druge strane, kod električnog kola na slici desno oba stanja su opservabilna, jer se oba utiču na izlaz koji se mjeri.

Kontrolabilnost i opservabilnost

O kontrolabilnosti i opservabilnosti se može zaključiti i u s-domenu.

Ukoliko prilikom računanja funkcije prenosa dođe do skraćivanja nula i polova tada sistem nije potpuno kontrolabilan ili opservabilan!

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Stabilnost dinamičkih sistema

Posmatrajmo nelinearni sistem opisan vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Ekvilibrijumom ili ravnotežnim stanjem se zove ona tačka u n -dimenzionalnom prostoru stanja u kojoj je prvi izvod promjenljivih stanja jednak nuli:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \dot{\mathbf{x}}(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \mathbf{0}$$

Drugim riječima, ako se sistem nađe u tački $\mathbf{x}_e$, tu će i ostati. Sistem može da ima više ekvilibrijuma.

Kada posmatramo sistem,

Stabilnost dinamičkih sistema

Za ekvilibrijum nelinearnog sistema kažemo da je **stabilan** ukoliko važi sljedeće:

$$\| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e \| < \delta \Rightarrow (\forall t > 0) \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e \| < \varepsilon.$$

Drugim riječima, za svaku **malu** promjenu, sistem **se uvijek vraća u okolinu** ravnotežnog stanja. Za ekvilibrijum nelinearnog sistema kažemo da **je asimptotski stabilan** ukoliko važi sljedeće:

$$\| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e \| < \delta \Rightarrow (\forall t > 0) \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e \| = 0,$$

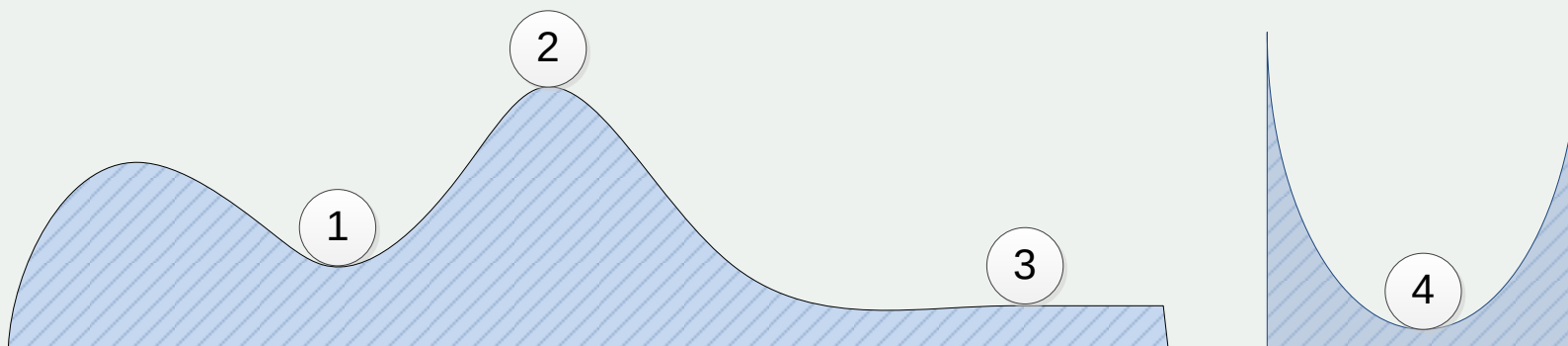
odnosno ukoliko se za svaku **malu** promjenu uvijek vraća **u ravnotežno stanje**. Konačno, za ekvilibrijum nelinearnog sistema kažemo da je globalno stabilan ukoliko važi sljedeće:

$$(\forall \delta > 0) \| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e \| = 0,$$

tj. ukoliko se za svaku promjenu uvijek vraća **u isto ravnotežno stanje**.

Primjer – klasifikacija ekvilibirjuma

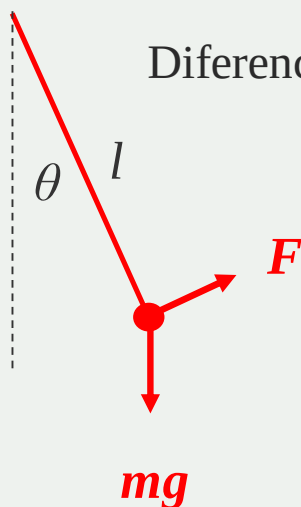
Zamislite loptu koja može da se kreće po nacrtanoj površini. Klasifikujte ekvilibrijume.



Ekvilibrijum 1 je asimptotski stabilan, jer ukoliko malo pomjerimo loptu, ona će se vratiti u početno stanje. Ekvilibrijum 2 je nestabilan, jer mala promjena položaja lopte dovešće do divergencije od početnog stanja. Ekvilibrijum 3 je stabilan, ali ne i asimptotski, jer za malu promjenu položaja lopta ostaje u okolini početnog stanja. Konačno, ekvilibrijum 4 na slici desno je globalno stabilan, jer za bez obzira na promjenu položaja lopte, ona će se uvijek vratiti u početno stanje.

Primjer – ekvilibrijumi klatna

Modelovati klatno prikazano na slici, a zatim naći stacionarne tačke.



Diferencijalna jednačina klatna ima sljedeći oblik (b – koeficijent trenja):

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b \dot{\theta} = -mgl \sin \theta + Fl, \quad J = ml^2$$

Uvođenjem smjena $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta} = \omega$, dobija se model u prostoru stanja:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F}{ml} - \frac{g}{l} \sin x_1$$

stacionarne tačke
(ravnotežna stanja)
posmatramo za $F=0$!

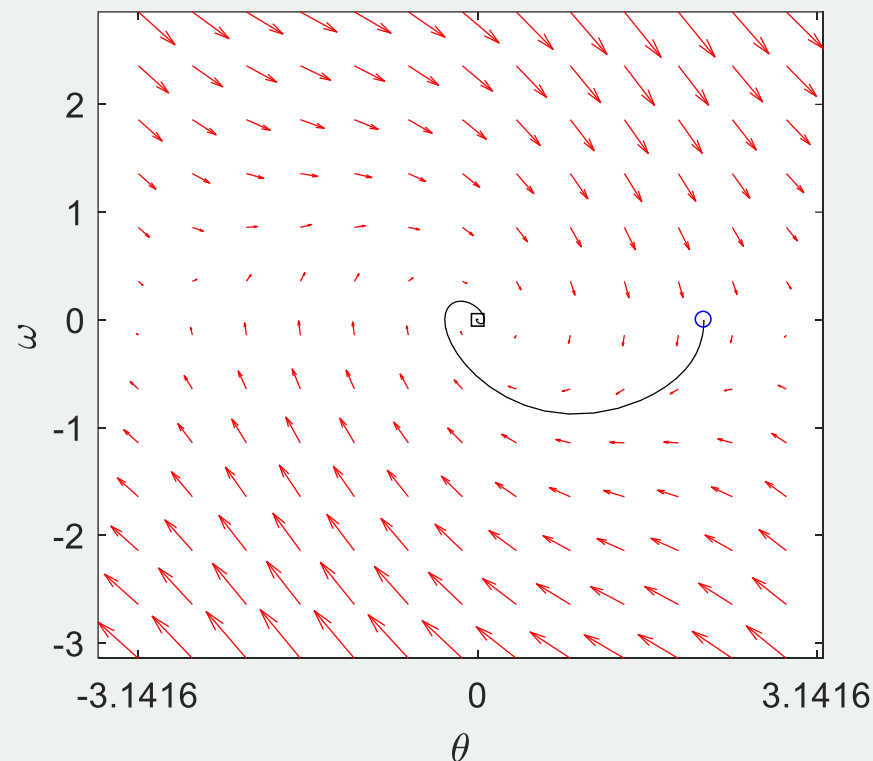
Izjednačavajući izvode sa nulom, za $F=0$, dobijaju se stacionarne tačke:

$$x_{1s_1} = x_{2s_1} = 0 \quad \leftarrow \text{Stabilni ekvilibrijum}$$

$$x_{1s_2} = 0, x_{2s_2} = \pi \quad \leftarrow \text{Nestabilni ekvilibrijum}$$

Upravljanjem nestabilni sistemi mogu da se ustabile!

Primjer – ekvilibrijumi klatna



Na slici je prikazana trajektorija klatna u prostoru stanja za početni ugao $2\pi/3$ i nultu početnu brzinu. Može se uočiti da se za date početne uslove klatno kreće ka tački $(0,0)$. Strelice pokazuju putanje klatna za razne početne uslove. Kao što se vidi sve trajektorije konvergiraju ka tački $(0,0)$. Specijalno, sistem se može zadržati u tački $(\pi, 0)$, ali mala peturbacija bi ga promjerila iz tog stanja i dovela u stanje $(0,0)$.

Stabilnost LTI sistema

LTI sistemi imaju jedan ekvilibrijum, zbog čega se govori o stabilnosti sistema, a ne samo o stabilnosti ekvilibrijuma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

Gornja jednačina je homegena, te ima samo trivijalno rješenje $\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$.

Vi[edefinicija stabilnosti!

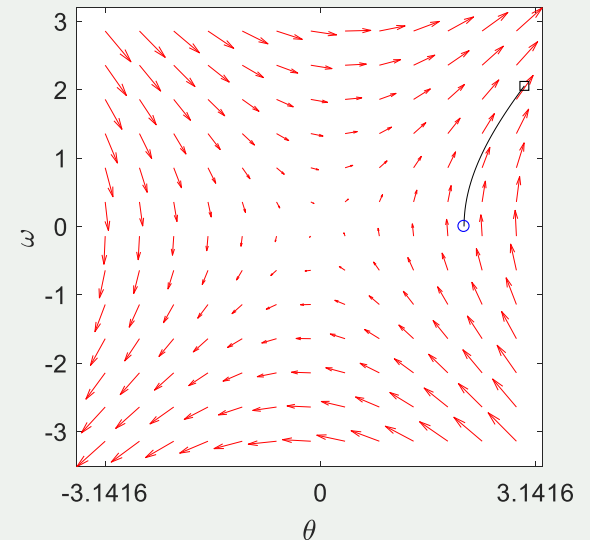
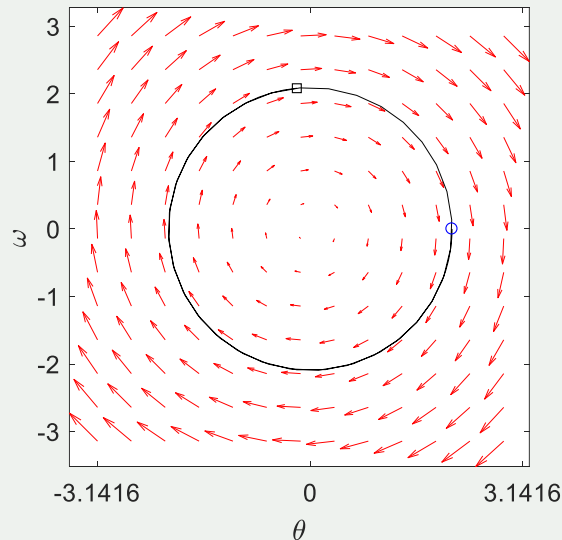
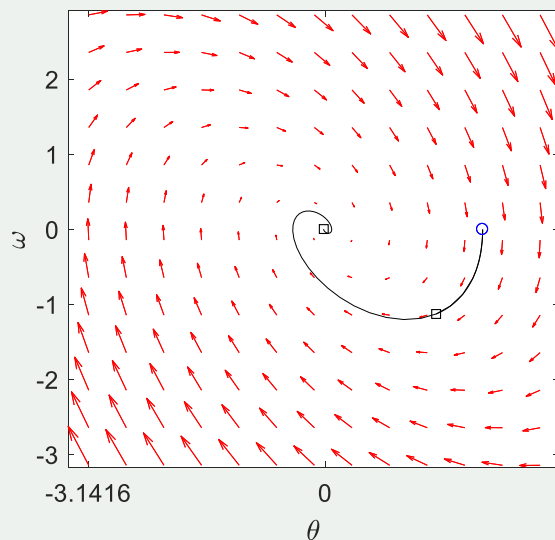
BIBO (Bounded Input Bounded Output) – sistem je stabilan ako je za bilo koji ograničeni ulazni signal izlazni signal takođe ograničen

$$(\forall t) |u(t)| < M \Rightarrow (\exists N)(\forall t) |y(t)| < N$$

Potrebno je ovu definiciju zapisati u obliku koji je pogodan za analitičko ispitivanje stabilnosti sistema!

Stabilnost LTI sistema

LTI sistemi mogu da budu stabilni, marginalno stabilni ili nestabilni. Ako je sistem stabilan za bilo koje početne uslove promjenljive stanja će konvergirati ka nuli. Kod nestabilnih sistema promjenljive stanja konvergiraju ka beskonačnosti. Kod marginalno stabilnih sistema promjenljive stanja osciluju ili su konvergiraju ka nekim konstantama.



Stabilnost LTI sistema

Odziv LTI sistema čiji je impulsni odziv $g(t)$ je jednak:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Prema BIBO definiciji treba da bude zadovoljeno sljedeće:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \leq M \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau$$

Slijedi, da bi sistem bio stabilan, impulsni odziv treba da bude apsolutno integrabilan:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Stabilnost LTI sistema

Za LTI sisteme dovoljan je i sljedeći uslov stabilnosti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) < \infty$$

Stabilnost sistema se može dovesti u vezu sa položajem polova funkcije prenosa sistema u s-ravni:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Polovi funkcije prenosa mogu biti: **čisto realni**, **čisto imaginarni**, **kompleksni**, pri čemu posebno treba posmatrati **pol koji leži u koordinatnom početku**. Svi polovi mogu biti **jednostruki** ili **višestruki**.

Stabilnost LTI sistema

Funkcija prenosa ima određen broj svih vrsta polova, te se može rastaviti na parcijalne razlomke:

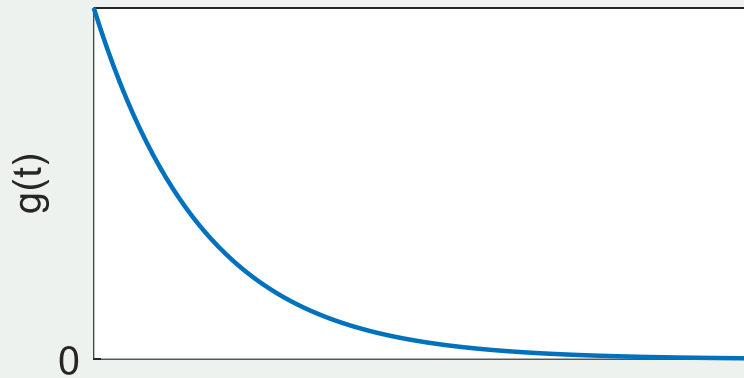
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} =$$
$$\sum_M \frac{A_i}{(s + \sigma_i)^{a_i}} + \sum_N \frac{B_i}{(s^2 + \omega^2)^{b_i}} + \sum_P \frac{C_i s + D_i}{[(s^2 + \omega^2) + \sigma^2 + \omega^2]^{c_i}} + \frac{D}{s^d}$$

Impulsni odziv sistema je jednak inverznoj Laplasovoj transformaciji funkcije prenosa, odnosno njenih parcijalnih razlomaka. Da bi sistem bio stabilan impulsni odziv svakog sabirka mora biti apsolutno integrabilan.

Stabilnost sistema

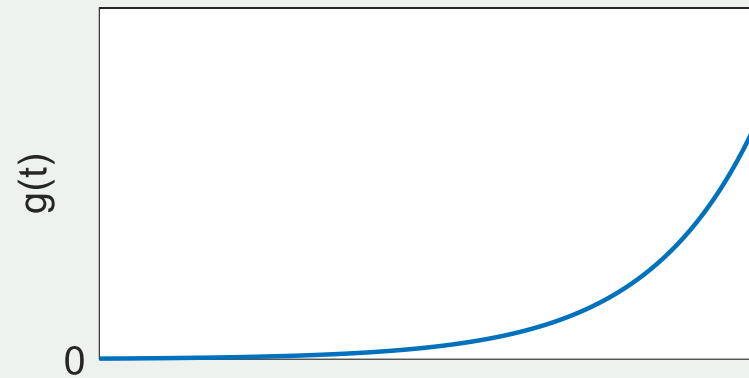
<i>Vrsta pola</i>	<i>F(s)</i>	<i>f(t)</i>
Realan i prost, $s = -\sigma$	$\frac{1}{s + \sigma}$	$e^{-\sigma t}$

Impulсни odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} = 0, \text{ za } \sigma > 0$$

Impulсни odziv

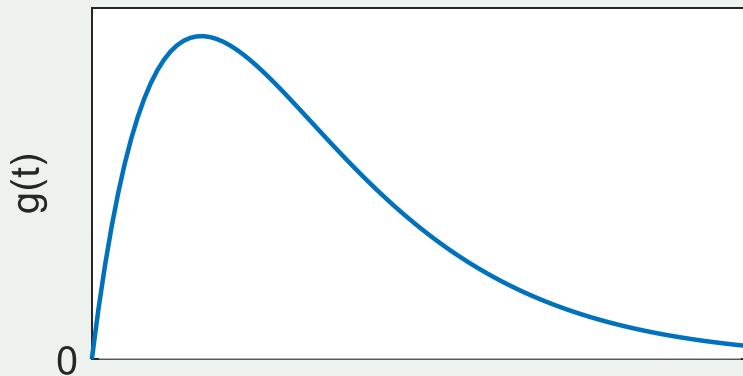


$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} = \infty, \text{ za } \sigma < 0$$

Stabilnost sistema

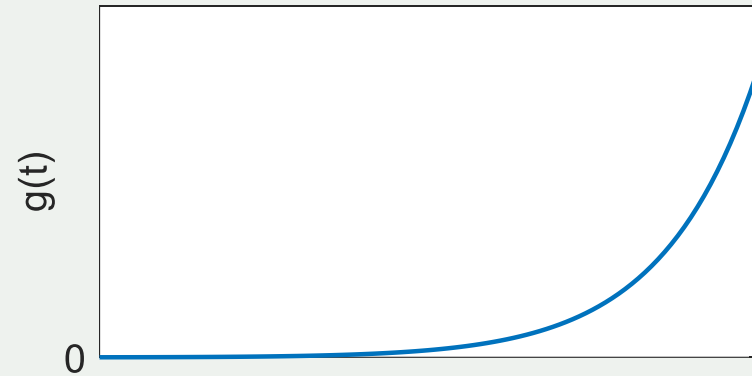
<i>Vrsta pola</i>	<i>$F(s)$</i>	<i>$f(t)$</i>
Realan i višestruk, $s = -\sigma$	$\frac{1}{(s + \sigma)^k}$	$t^{k-1}e^{-\sigma t}$

Impulsni odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{k-1} e^{-\sigma t} = 0, \text{ za } \sigma > 0$$

Impulsni odziv

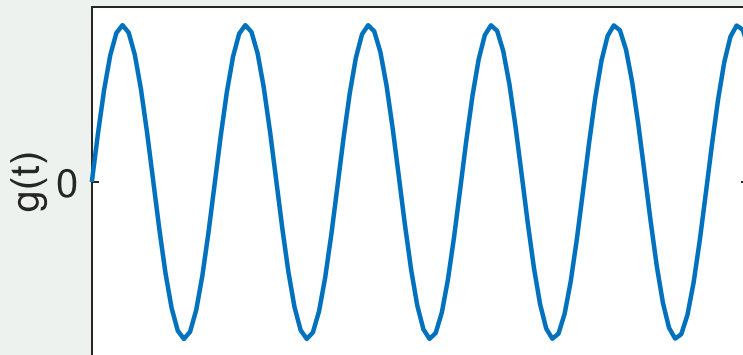


$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{k-1} e^{-\sigma t} = \infty, \text{ za } \sigma < 0$$

Stabilnost sistema

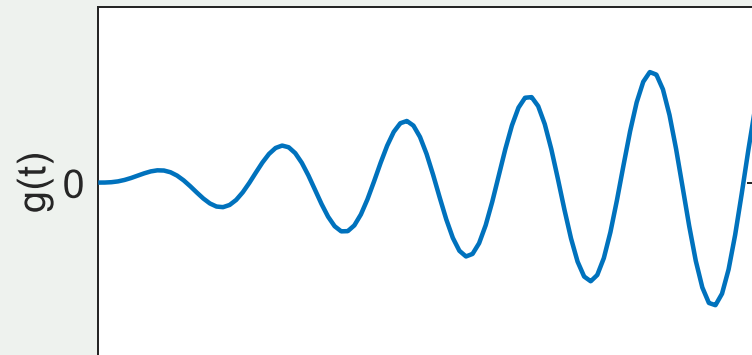
<i>Vrsta pola</i>	<i>F(s)</i>	<i>f(t)</i>
Čisto kompleksan i prost, $s = \pm j\omega$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
Čisto kompleksan i višestruk, $s = \pm j\omega$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^k}$	$\frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t)$

Impulsni odziv



$$\left| \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right| < \frac{1}{\omega}$$

Impulsni odziv

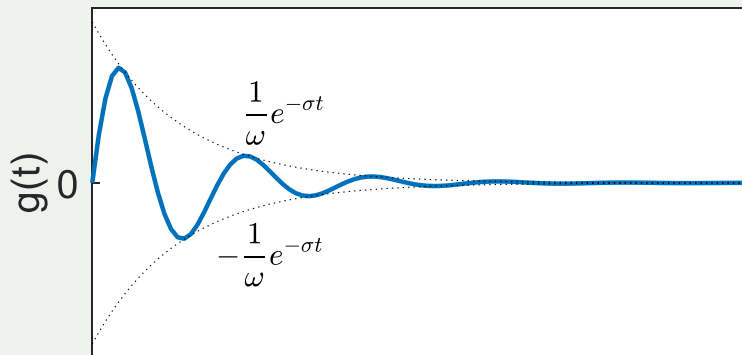


$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t) = \infty$$

Stabilnost sistema

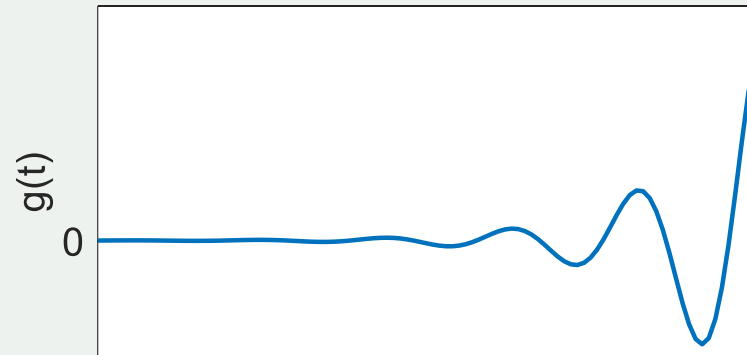
<i>Vrsta pola</i>	<i>F(s)</i>	<i>f(t)</i>
Kompleksan i prost, $s = -\sigma \pm j\omega$	$\frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t)$

Impulsni odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) = 0, \text{ za } \sigma > 0$$

Impulsni odziv

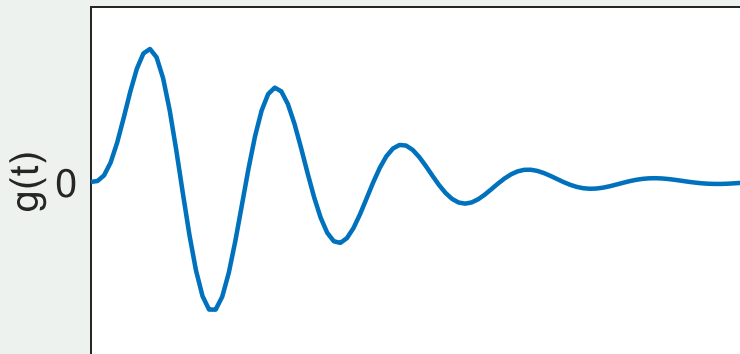


$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) = \infty, \text{ za } \sigma < 0$$

Stabilnost sistema

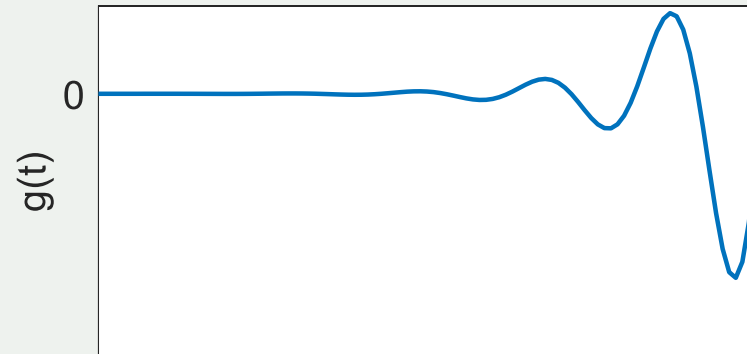
<i>Vrsta pola</i>	<i>F(s)</i>	<i>f(t)</i>
Kompleksan i višestruk, $s = -\sigma \pm j\omega$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t)$

Impulsni odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t) = 0, \text{ za } \sigma > 0$$

Impulsni odziv

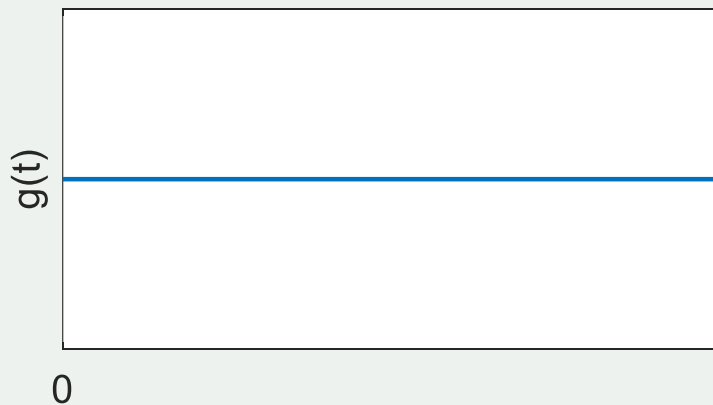


$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t) = \infty, \text{ za } \sigma < 0$$

Stabilnost sistema

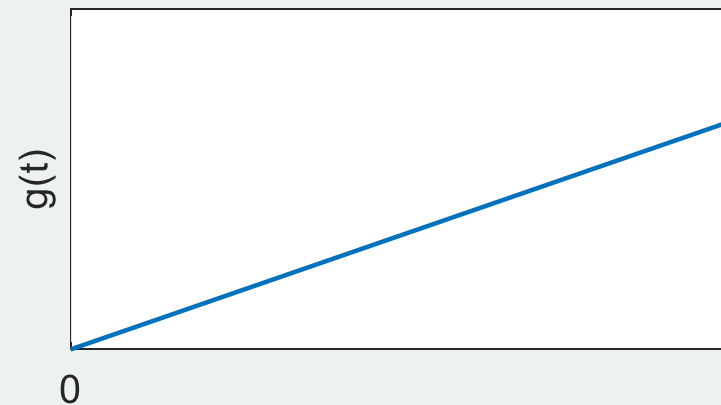
<i>Vrsta pola</i>	<i>$F(s)$</i>	<i>$f(t)$</i>
U koordinatom početku i prost, $s=0$	$\frac{1}{s}$	$h(t)$
U koordinatom početku i višestruk, $s=0$	$\frac{1}{s^k}$	$\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1}$

Impulsni odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$$

Impulsni odziv



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} = \infty$$

Stabilnost LTI sistema

Na osnovu definicije stabilnosti u vremenskom domenu i prethodno izloženih karakterističnih impulsnih odziva u zavisnosti od polova sistema, može se dati sljedeća definicija:

Potreban i dovoljan uslov da kontinualni LTI sistem bude stabilan jeste da **svi** njegovi **polovi** leže **u lijevoj poluravni s ravni**, odnosno **da realni djelovi svih** njegovih **polova** budu **negativni**. Ukoliko sistem ima **konačan broj jednostrukih polova** koji leže **na imaginarnoj osi**, tada se za sistem kaže da je **na granici stabilnosti**. Konačno, ako sistem ima **bar jedan pol** koji leži **u desnoj poluravni s-ravni** ili **bar jedan višestruki pol** koji leži **na imaginarnoj osi**, onda se za njega može reći da je **nestabilan**.

Neki primjeri nestabilnih sistema:

Primjeri stabilnih sistema:

Primjeri sistema na granici stabilnosti:

Rausov kriterijum stabilnosti

Dakle, da bi sistem bio stabilan potrebno je riješiti karakterističnu jednačinu sistema:

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0.$$

Ukoliko svi polovi (korijeni) sistema imaju negativan realni dio, onda možemo zaključiti da je sistem stabilan. Rausov kriterijum stabilnosti omogućava ispitivanje stabilnosti sistema bez rješavanja karakteristične jednačine. Na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine formira se Rausova tabela. Prva kolona iz Rasuove tabele se zove Rausova kolona i na osnovu nje se zaključuje o stabilnosti sistema.

Da bi sistem bio stabilan dovoljan uslov je da su svi koeficijenti u Rasuovoj koloni istog znaka. Broj nestabilnih polova jednak je broju promjena znaka u Rausovoj koloni. Ukoliko svi koeficijenti istog znaka, pri čemu su neki jednaki nuli, onda se sistem nalazi na granici stabilnosti.

Rausov kriterijum stabilnosti

Rausova tabela se formira na sljedeći način. Naprije se popunjavaju prva i druga vrsta Rausove tabele i to na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine. Ostale vrste se računaju na osnovu formula datih ispod.

Rausova kolona

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \dots$$

Rausov kriterijum stabilnosti

Rausova tabela se formira na sljedeći način. Naprije se popunjavaju prva i druga vrsta Rausove tabele i to na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine. Ostale vrste se računaju na osnovu formula datih ispod.

Rausova kolona

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \dots$$

Primjer - Rausov kriterijum stabilnosti

Ispitati stabilnost sistema čija je karakteristična jednačina:

$$f(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 7s + 2$$

Rausova kolona

s^4	1	4	2
s^3	4	7	0
s^2	9/4	2	0
s^1	15/9	0	0
s^0	2	0	0

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 7}{4} = \frac{9}{4}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{4} = 2$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9/4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{9/4 \cdot 7 - 4 \cdot 3}{9/4} = \frac{63/4 - 12}{9/4} = \frac{15}{9}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 \\ 15/9 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Sistem je stabilan jer nema promjena znaka u Rasovoj koloni.

Primjer - Rausov kriterijum stabilnosti

Ispitati stabilnost sistema čija je karakteristična jednačina:

$$f(s) = s^4 + 7s^3 + 4s^2 + 4s + 2$$

Rausova kolona

s^4	1	4	2
s^3	7	4	0
s^2	24/7	2	0
s^1	-1/12	0	0
s^0	2	0	0

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{7 \cdot 4 - 1 \cdot 4}{7} = \frac{24}{7}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 2 - 4 \cdot 0}{4} = 2$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 24/7 & 2 \end{pmatrix} = \frac{24/7 \cdot 4 - 7 \cdot 2}{24/7} = \frac{-2/7}{24/7} = \frac{-1}{12}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 24/7 & 2 \\ -1/12 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Sistem je nestabilan i ima dva nestabilna pola, jer postoje dvije promjena znaka u Rasovoj koloni.