
SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Predavanje 6

Nikvistov kriterijum stabilnosti

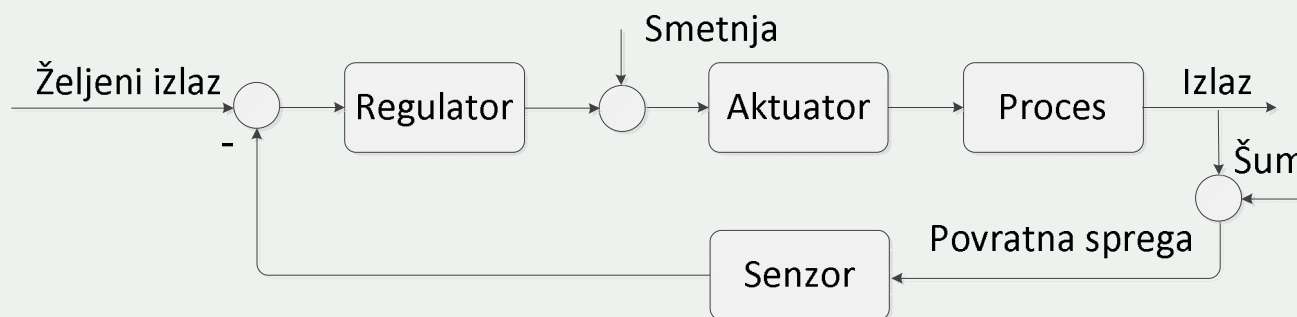
Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

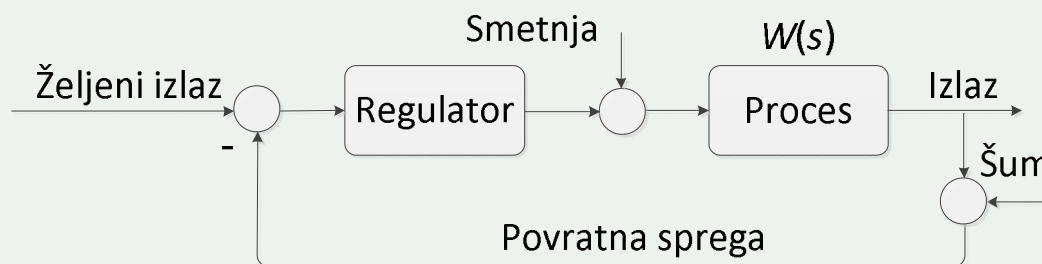
- ❖ Razumiju primjenu Košijeve teoreme o priraštaju argumenta za ispitivanje stabilnosti spregnutog sistema
- ❖ Ispitaju stabilnost sistema koristeći Nikvistov kriterijum stabilnosti
- ❖ Razumiju koncept relativne stabilnosti sistema i definišu margine stabilnosti

Funkcije spregnutog i povratnog prenosa

Na slici ispod je prikazana osnovna regulaciona kontura SAU-a.

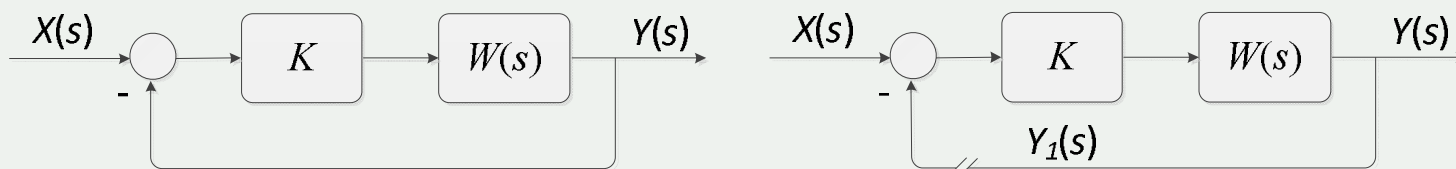


Prilikom sinteze regulatora obično se posmatra pojednostavljena šema sa jediničnom negativnom povratnom spregom, kod koje su funkcije prenosa aktuatora, procesa i senzora modelovane jednom funkcijom prenosa $W(s)$.



Funkcije spregnutog i povratnog prenosa

Za potrebe analize stabilnosti posmatraćemo najprostiji tipa regulatora – pojačavač K , dok ćemo se nešto složenijim regulatorima baviti kasnije. Takođe, za analizu stabilnosti smetnje i mjerne šumovi nijesu relevantni, te ih možemo zanemariti.



Funkcijom spregnutog sistema se zove funkcija prenosa između ulaza i izlaza kada uspostvaljena povratna sprega. Odnosno u posmatranom slučaju ona jednaka:

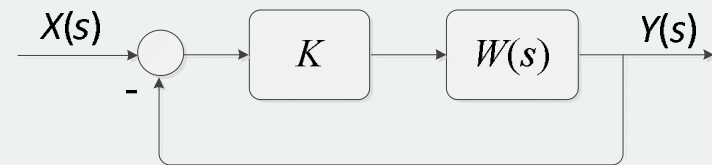
$$G(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}$$

Funkcijom povratnog prenosa se zove funkcija prenosa između ulaza i signala Y_1 , kada je povratna sprega prekinuta, i u ovom slučaju ona je jednaka $KW(s)$.

Stabilnost sistema

Linearni vremenski invarijantni sistem je stabilan ukoliko njegov impulsni odziv konvergira ka nuli, odnosno ukoliko svi polovi sistema leže u lijevoj poluravni s -ravni. Da bi ispitali stabilnost spregnutog sistema, potrebno je odrediti karakterističnu jednačinu, odnosno imenilac funkcije spregnutog prenosa, na osnovu koje se dalje određuju polovi i donose zaključci o stabilnosti.

Rausov kriterijum je postupak koji omogućava određivanje broja stabilnih polova, bez rješavanja karakteristične jednačine.



Međutim, iako je Rausov postupak jednostavniji od direktnog pronalaženja polova funkcije prenosa, za funkcije prenosa većeg reda ispitivanje stabilnosti na ovaj način može biti dosta složeno.

Stabilnost sistema

Pored Rausovog kriterijuma postoje i druge metode za utvrđivanje stabilnosti sistema. Jedna od metoda je **Nikvistov kriterijum** koji omogućava ispitivanje stabilnosti linearnih, stacionarnih sistema u zatvorenoj sprezi, posmatranjem funkcije prenosa u otvorenoj sprezi.



Važnost Nikvistovog kriterijuma proističe upravo iz njegove univerzalnosti. Naime, Nikvistov kriterijum je primjenljiv bez obzira na oblik funkcije povratnog prenosa, te se može primijeniti kako na procese konačnog reda opisane racionalnim funkcijama prenosa, tako i na procese sa kašnjenjima, te na procese beskonačnog reda opisane proizvoljnim, neracionalnim funkcijama prenosa.

Košijeva teorema o priraštaju argumenta

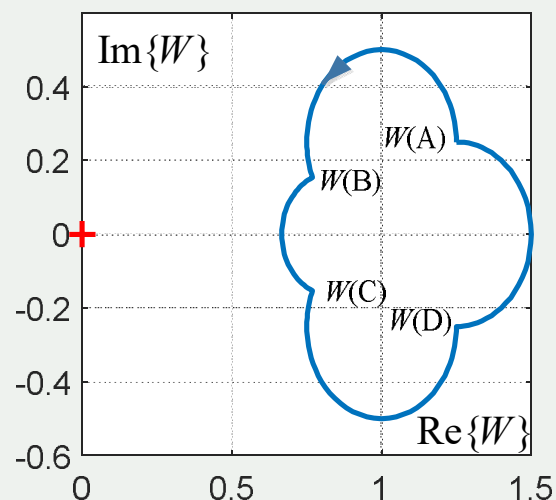
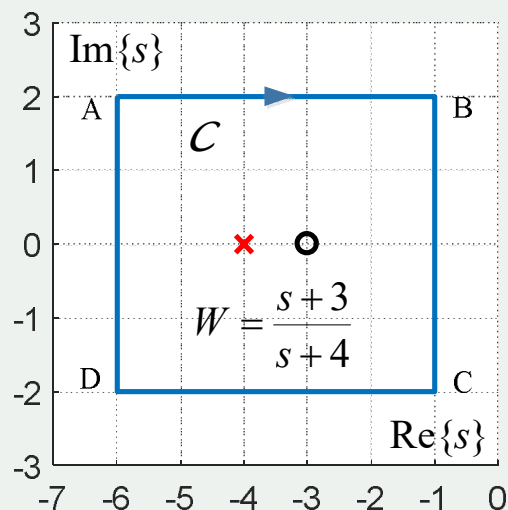
Za izvođenje Nikvistovog kriterijuma stabilnosti koristi se Košijeva teorema argumenata, koja je formulisana u nastavku.

Ako neku kompleksnu funkciju $F(s)$ obiđemo po zatvorenoj kompleksnoj konturi C u proizvoljnom smjeru, pod uslovom da $F(s)$ na toj konturi nema ni polova ni nula, rezultujuća kriva će da obuhvati koordinatni početak za ugao koji jednak $|(N-P)2\pi|$, gdje je N broj nula, a P broj polova kompleksne funkcije koji leže unutar konture C . Ukoliko je $N-P$ pozitivno, onda se smjer rezultujuće krive poklapa sa smjerom obilaska konture. Odnosno, ukoliko je $N-P$ negativno, onda je smjer rezultujuće krive suprotan smjeru obilaska konture.

Prije nego što pređemo na izvođenje Nikvistove krive, na par ilustrativnih primjera će biti pobliže objašnjeno Košijevo tvrđenje. Više informacija o Košijevoj teoremi može se pronaći na [sljedećem linku](#).

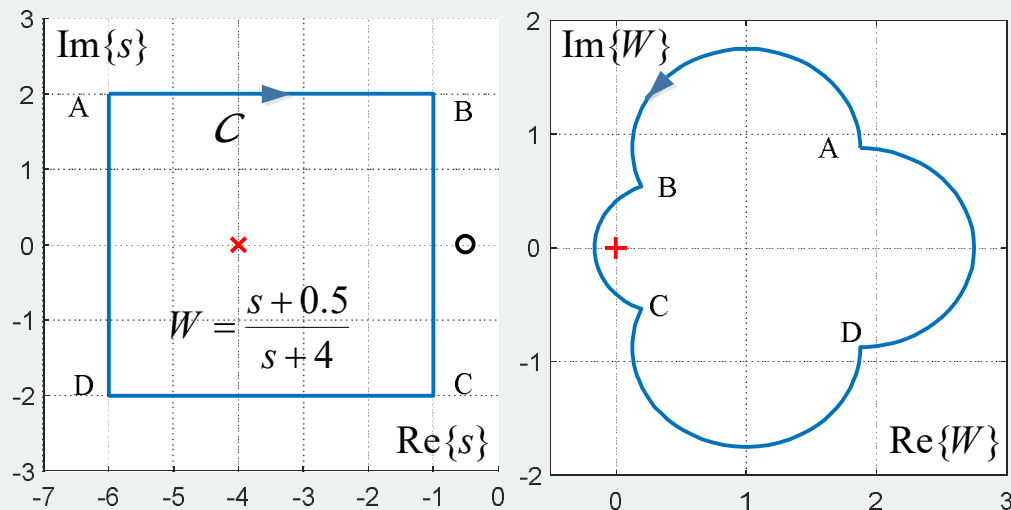
Primjer - Košijeva teorema

Posmatrajmo konturu ABCD u s ravni i preslikavanje $W(s)$. Ako funkciju $W(s)$ obiđemo po konturi ABCD (izračunamo vrijednost krive $W(s)$ za svaku tačku na konturi), rezultujuća kontura će imati oblik prikazan na slici ispod. S obzirom na to da kontura ABCD obuhvata jedan pol i jednu nulu funkcije $W(s)$, rezultujuća kontura će oko koordinatnog početka napraviti ugao $(1-1)2\pi = 0$ rad. Sa slike desno se može uočiti da rezultujuća kontura $W(ABCD)$ uopšte ne obuhvata koordinatni početak, što je u skladu sa tvrđenjem.



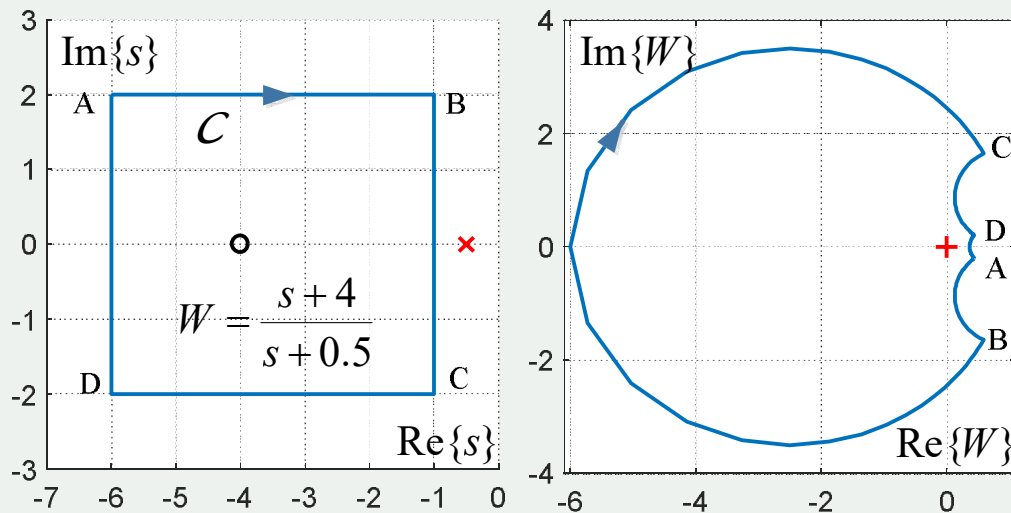
Primjer - Košijeva teorema

Posmatrajmo sada istu konturu ABCD, ali drugu funkciju $W(s)$. Kako sada kontura ABCD obuhvata jedan pol i nijednu nulu funkcije $W(s)$, rezultujuća kontura će u W -ravni oko koordinatnog početka napraviti ugao $(0-1)\pi = -2\pi$ rad. Negativan predznak znači da kontura $W(ABCD)$ obuhvata koordinati početak u W -ravni u smjeru suprotnom od smjera obilaska konture ABCD. Kako smo konturu ABCD obišli u negativnom smjeru, to znači da će $W(ABCD)$ obuhvati koordinatni početak za ugao 2π u pozitivnom smjeru, što se i vidi sa slike ispod.



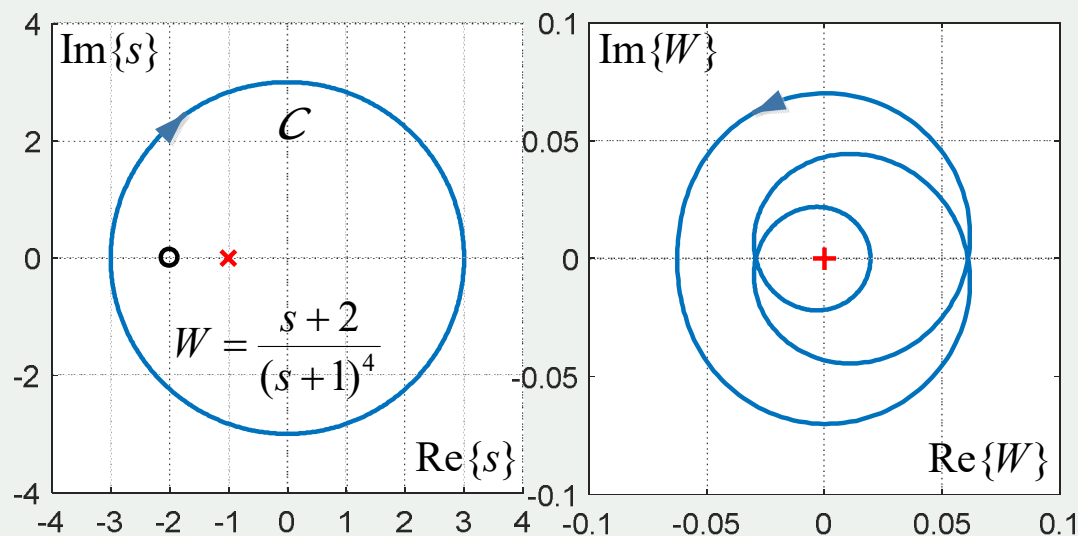
Primjer - Košijeva teorema

I u ovom primjeru je uzeta ista kontura ABCD. Sada je funkcija $W(s)$ usvojena tako da kontura ABCD obuhvata jednu nulu i nijedan pol. Po Košijevoj teoremi rezultujuća kontura će oko koordinatnog početka napraviti ugao $(1-0)2\pi = 2\pi$ rad. Kako je rezultat pozitivan, to znači da će se rezultujuća kontura obuhvatiti koordinati početak u smjeru obilaska konture ABCD, odnosno, u ovom primjeru za pun krug u negativnom smjeru, što se i vidi na slike ispod.



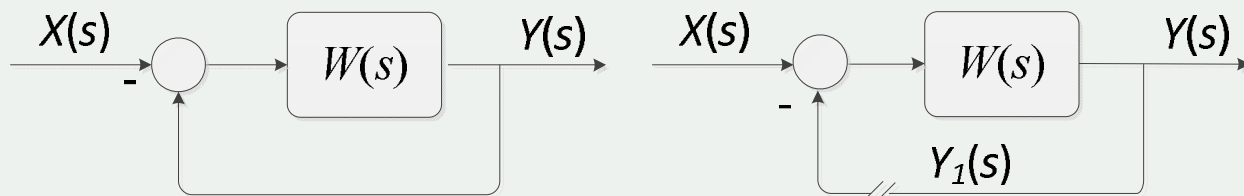
Primjer - Košijeva teorema

Konačno, u zadnjem primjeru je uzeta kružna kontura C , poluprečnika 2. Funkcija prenosa ima tri pola i jednu nulu koji se nalaze unutar konture C . Po Košijevoj teoremi argumenata rezultujuća kontura $W(C)$ će obuhvatiti koordinatni početak za ugao $(1-4)2\pi = -3\pi$. Sa slike ispod se vidi da rezultujuća kontura pravi tri kruga oko koordinatnog početka, u pozitivnom smjeru.



Nikvistov kriterijum stabilnosti

Posmatrajmo sistem sa negativnom jedničnom povratnom spregom (NJPS), odnosno funkciju povratnog prenosa $W(s)$.



Nikvistov kriterijum nam omogućava da ispitamo stabilnost spregnutog sistema:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)},$$

posmatrajući funkciju povratnog prenosa $W(s)$. Drugim riječima, omogućava nam da zaključimo da li će sistem biti stabilan kada se uspostavi povratna spega!

Nikvistov kriterijum se izvodi primjenom Košijeve teorem argumenata na karakterističnu funkciju $F(s) = 1 + W(s)$.

Nikvistov kriterijum stabilnosti

Posmatrajamo karakterističnu funkciju $F(s) = 1 + W(s)$ od koje zavisi stabilnost spregnutog sistema. Neka je $W(s)$ racionalna funkcija za koju smo rekli da ima N nula i P polova u desnoj poluravni.

$$W(s) = \frac{N(s)}{P(s)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow N \text{ nula u desnoj poluravni} \\ \leftarrow P \text{ polova u desnoj poluravni} \end{array}$$

Funkcije $W(s)$ i $F(s)$ imaju isti imenilac, odnosno polove.

Karakteristična funkcija je jednaka:

$$F(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{N(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + N(s)}{P(s)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow N_F \text{ nula u desnoj poluravni} \\ \leftarrow P_F = P \text{ polova u desnoj poluravni} \end{array}$$

Funkcija spregnutog prenosa sistema je:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{\cancel{N(s)} / \cancel{P(s)}}{\frac{P(s) + N(s)}{\cancel{P(s)}}} = \frac{N(s)}{P(s) + N(s)}$$

$f(s) = P(s) + N(s)$

Brojilac funkcije $F(s)$ predstavlja karakteristični polinom spregnutog sistema. Da bi spregnuti sistem bio stabilan, $F(s)$ ne smije imati nule u desnoj poluravni, jer su to polovi spregnutog sistema!

Nikvistov kriterijum stabilnosti

Neka se zatvorena kontura C , po kojoj ćemo obići funkciju $F(s)$, sastoji od imaginarne ose $j\omega$ i polukruga beskonačnog poluprečnika, odnosno desne poluravni s -ravni, kao što je prikazano na slici.

Kontura C se naziva Nikvistova kontura.

Konturu C možemo podijeliti na tri segmenta:

AB – pozitivni dio imaginarne ose:

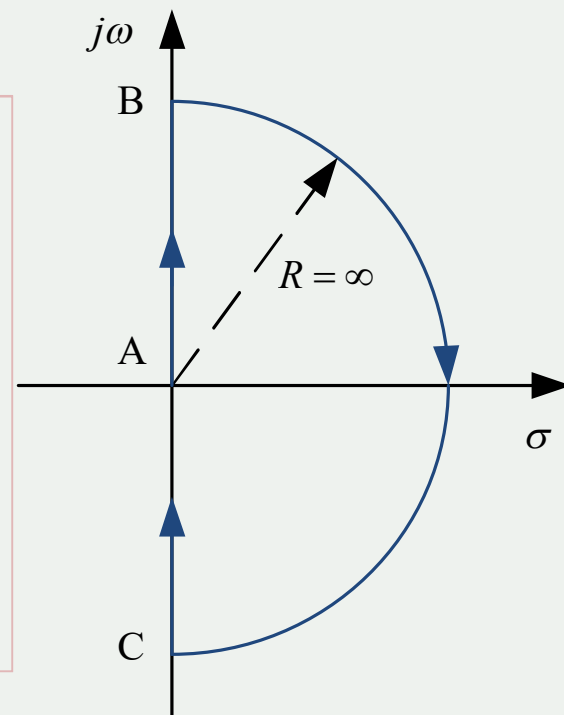
$$j\omega, \omega \in (0, \infty),$$

BC – polukrug beskonačnog poluprečnika:

$$re^{j\theta}, \theta \in (\pi / 2, -\pi / 2), r \rightarrow \infty,$$

CA – negativni dio imaginarne ose

$$j\omega, \omega \in (-\infty, 0).$$



Nikvistov kriterijum stabilnosti

Ako krivu $F(s)=1+W(s)$ obiđemo po Nikvistovoj konturi C u negativnom smjeru, rezultujuća kontura $F(C)$ će oko koordinatnog početka u F -ravni napraviti ugao $(N_F-P_F)2\pi$ u negativnom smjeru. Da bi sistem bio stabilan, funkcija $F(s)$ ne smije imati nula u desnoj poluravni, jer su to polovi spregnutog sistema. Drugim riječima, da bi sistem bio stabilan kontura $F(C)$ mora da se okrene oko koordinatnog početka u F ravni za ugao $-P_F2\pi = -P2\pi$ u negativnom smjeru, odnosno za ugao $+P2\pi$ u pozitivnom smjeru.

U praksi je često dostupna karakteristika sistema $W(s)$, pa umjesto broja obrtaja konture $F(C)$ oko koordinatnog početka u F -ravni, možemo posmatrati broj obrtaja konture $W(C)$ oko **kritične tačke** $(-1, j0)$ u W -ravni (jer je $W(s)=-1+F(s)$).

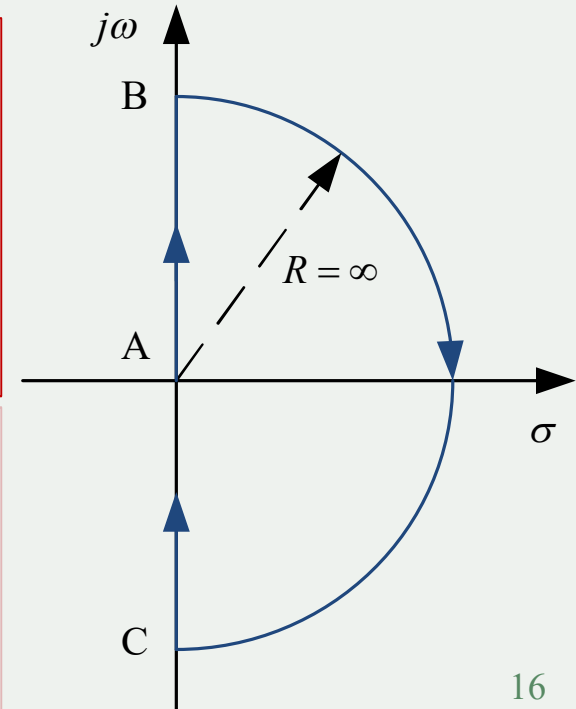
Konačno, da bi sistem sa NJPS bio stabilan, kontura $W(C)$ treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao $P2\pi$ u pozitivnom smjeru, gdje je P broj nestabilnih polova funkcije povratnog prenosa $W(s)$.

Nikvistova kriva

Kontura $W(C)$ se može podijeliti na tri dijela – $W(AB)$, $W(BC)$ i $W(CA)$. Ukoliko sve tačke beskonačnog poluprečnika na segmentu BC uvrstimo u $W(s)$, dobićemo da se one preslikavaju u jednu istu tačku. Odnosno, $W(BC)$ nema udjela u uglu $+P2\pi$, koji je prethodno pomenut. Krive $W(AB=j\omega)$ i $W(CA=-j\omega)$ su simetrične, što znači da će one obići kritičnu tačku $(-1, j0)$ za po ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru.

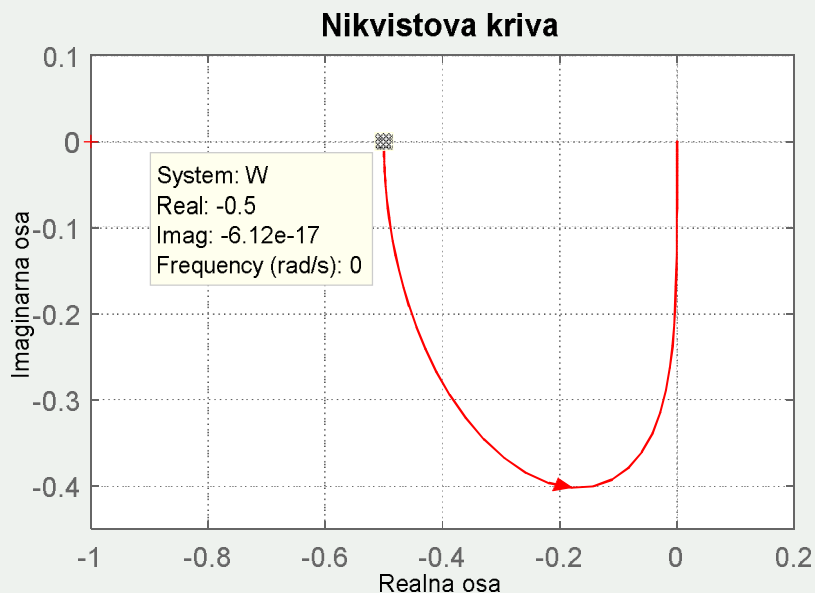
Kriva $W(j\omega)$ za svako $\omega \in (-\infty, +\infty)$ se zove Nikvistova kriva. Nikvistova kriva je u stvari dobro poznata frekvencijska karakteristika sistema koja se crta u kompleksnoj ravni, umjesto što se posebno crtaju amplitudska (moduo) i fazna (argument) karakteristika u zavisnosti od frekvencije.

Ako posmatramo samo pozitivne frekvencije, onda da bi sistem sa NJPS bio stabilan, kriva $W(j\omega)$ treba da obuhvati kritičnu tačku $(-1, j0)$ za ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru, gdje je P broj nestabilnih polova funkcije povratnog prenosa $W(s)$.



Primjer - Nikvistov kriterijum

Funkcija povratnog prenosa je $W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$.



Provjera:

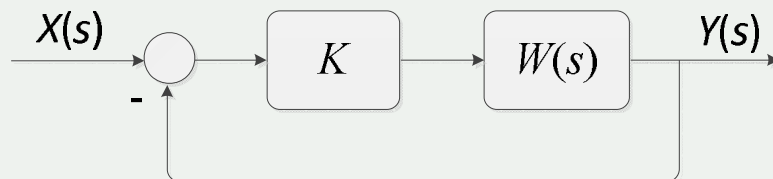
$$G(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 5}$$

Polovi: -2.4142, 0.4142

Broj nestabilnih polova je $P=1$, što znači da Nikvistova kriva treba da obuhvati kritičnu tačku $-1, j0$ za ugao π u pozitivnom smjeru. Sa slike se vidi kriva ne obuhvata kritičnu tačku, što znači da je sistem sa NJPS nestabilan.

```
>> s=tf('s');  
>> W=(s+1)/(s-1)/(s+2);  
>> nyquist(W)  
>> G=feedback(W,1);  
>> pole(G)  
ans =  
    -2.7913  
     1.7913
```

Nikvistov kriterijum stabilnosti

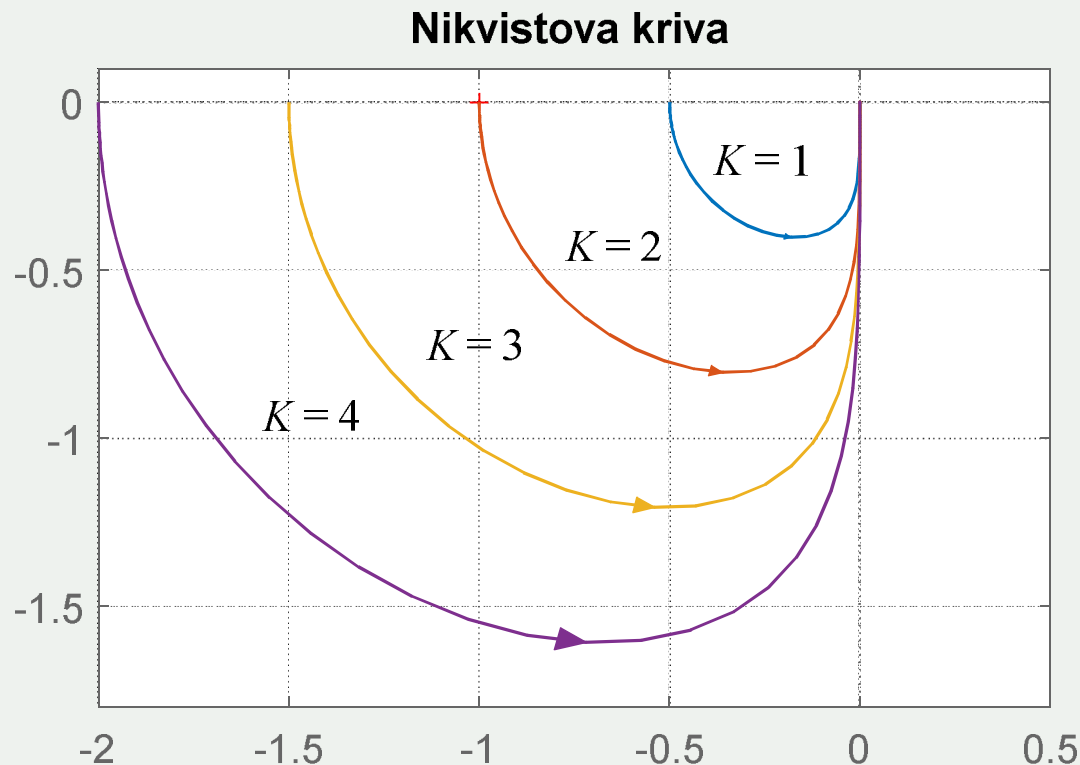


Nekad u direktnoj grani sistema sa NJPS imamo podesivo pojačanje K i želimo da ispitamo stabilnost spregnutog sistema u zavisnosti od njegove vrijednosti, pri čemu je Nikvistova kriva objekta $W(s)$ poznata. Karakteristična funkcija je u ovom slučaju jednaka:

$$F(s) = 1 + KW(s) = K \left(\frac{1}{K} + W(s) \right),$$

što znači da kao kritičnu tačku treba usvojiti $(-1/K, j0)$. Drugim riječima, vrijednost parametra K treba odabrati tako da kritična tačka $(-1/K, j0)$ bude obuhvaćena za ugao $P\pi$ u pozitivnom smjeru.

Nikvistov kriterijum stabilnosti



Na slici su prikazane Nikvistove krive za različite vrijednosti K . Može se uočiti da se množenjem sa K Nikvistova kriva skalira, odnosno da se odgovarajućim odabirom pojačanja K može podesiti položaj tačke $(-1, j0)$ u odnosu na Nikvistovu krivu.

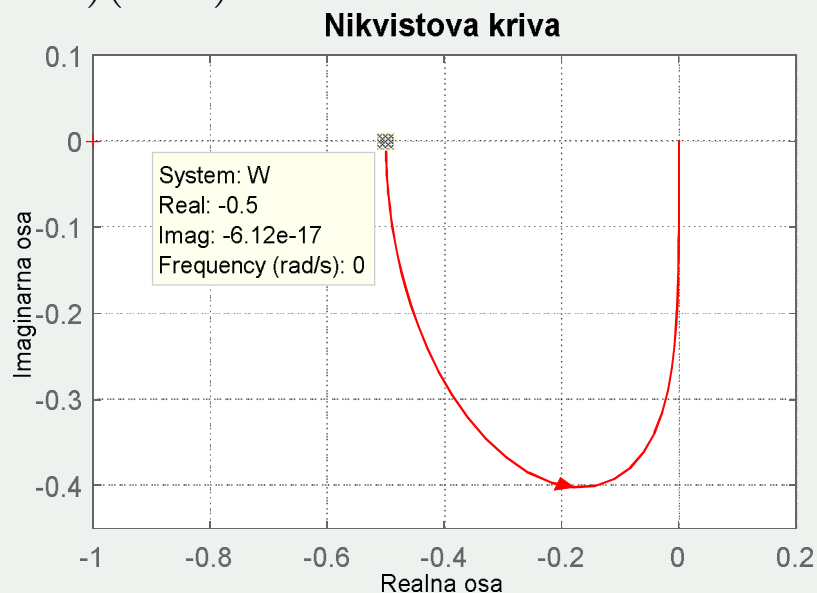
Primjer 2 - Nikvistov kriterijum

Funkcija povratnog prenosa je $W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$.

Broj nestabilnih polova je $P=1$, što znači da Nikvistova kriva treba da obuhvati kritičnu tačku $-1/K, j0$ za ugao π u pozitivnom smjeru. Na intervalu $(-0.5, 0)$ sve tačke su obuhvaćene za $+\pi$, što znači da kritična tačka treba da zadovolji uslov:

$$\begin{aligned} -1/K &> -0.5 \\ 1/K &< 0.5 \\ K &> 2 \end{aligned}$$

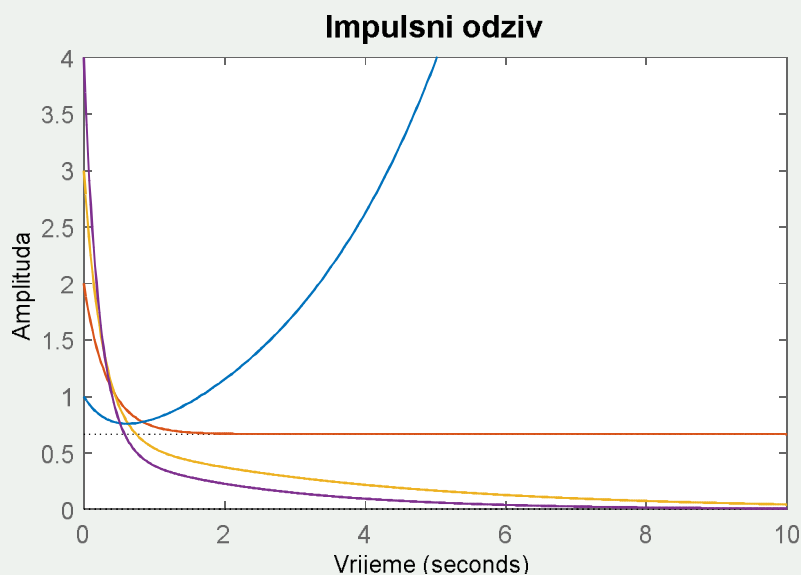
Sistem sa NJPS je stabilan za $K > 6$.



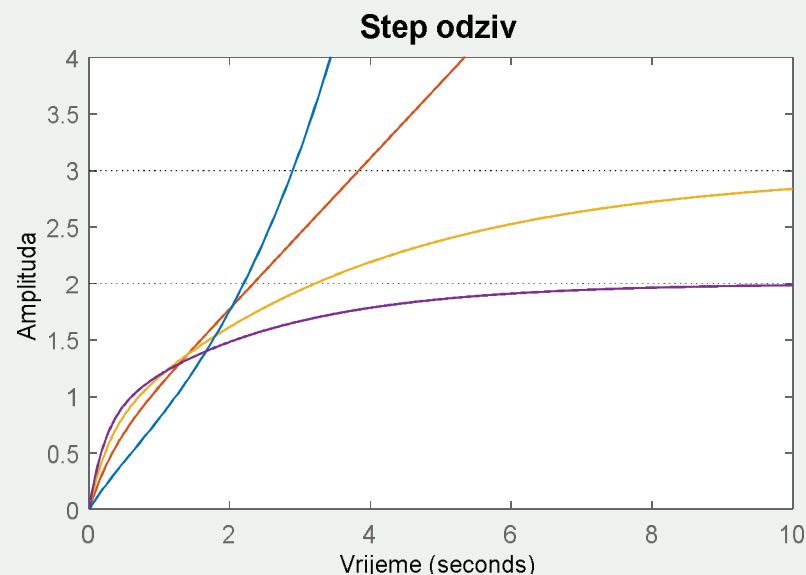
```
>> s=tf('s');  
>> W=(s+1)/(s-1)/(s+2);  
>> nyquist(W)
```

Primjer 2 - Nikvistov kriterijum

Na slici ispod su prikazani impulsni i step odziv sistema za različito K .



Na slikama su prikazani impulsni i step odzivi sistema za različito K . Za $K=2$ sistem je na granici stabilnosti, i tada impulsni odziv konvergira ka konstanti, dok step odziv linearno raste.



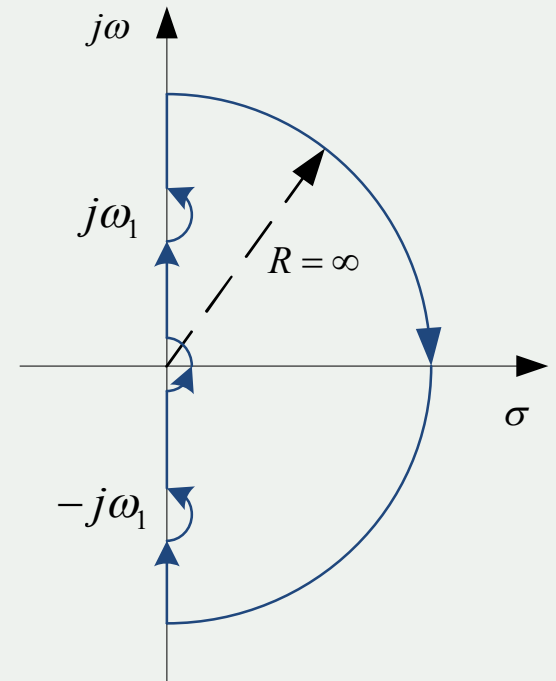
```
>> hold on; figure(2),hold on  
for k=1:4 G=feedback(k*W,1);  
figure(1),impz(G,10);  
figure(2),step(G,10); end  
figure(1),axis([0 10 0 4])  
figure(2),axis([0 10 0 4])
```

Nikvistov kriterijum

Ukoliko funkcija povratnog prenosa ima polove koji leže na konturi C , odnosno na imaginarnoj osi, Nikvistova kriva se teži ka beskonačnosti. U tom slučaju treba modifikovati konturu C , tako da se zaobiđu singulariteti.

Ako $W(s)$ ima pol $s=0$, onda Nikvistovu krivu koja se dobija treba dopuniti sa vrijednostima funkcije $W(s)$ u tačkama $s=re^{j\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ako se posmatraju samo pozitivne frekvencije, onda treba uvesti samo tačke za $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ako $W(s)$ ima konjugovano kompleksni par polova na imaginarnoj osi $s=\pm j\omega_1$, tada Nikvistovu krivu koja se dobija u Matlab-u treba dopuniti sa vrijednostima funkcije $W(s)$ u tačkama $s=\pm j\omega_1+re^{j\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Primjer 3- Nikvistov kriterijum

Funkcija povratnog prenosa je $W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

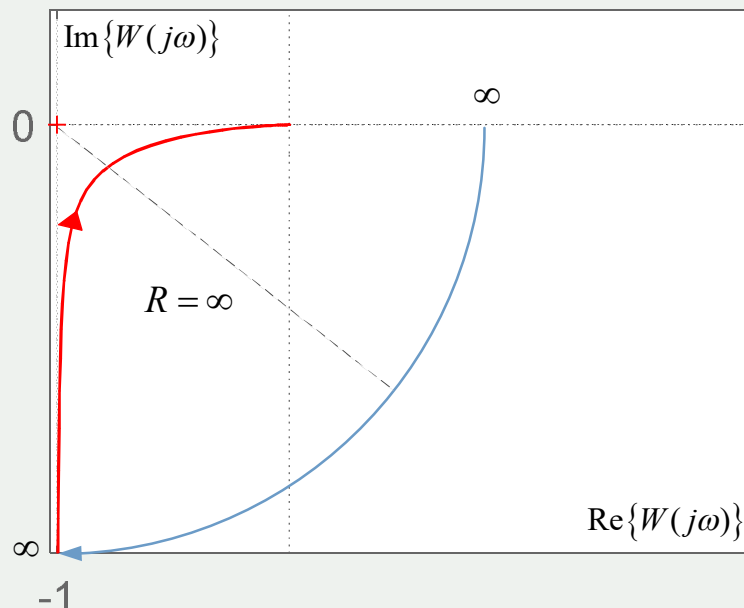
Ispitati u kom opsegu se može mijenjati pojačanje u direktnoj grani, a da spregnuti sistem bude stabilan.

Kako funkcija prenosa ima astatizam, Nikvistovu krivu koju vraća Matlab treba 0 dopuniti tačkama koje se dobijaju kada se kriva $W(j\omega)$ izračuna na segmentu $re^{j\theta}$, gdje $r \rightarrow 0, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Tražene tačke se dobijaju na sljedeći način:

$$\lim_{s \rightarrow \rho e^{j\theta}} W(s), \text{ za } \rho \rightarrow 0, \text{ i } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$
$$= \infty e^{-\theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Na slici je crvenom bojom prikazana Nikvistova kriva, a plavom četvrtina kruga beskonačnog poluprečnika kojim se Nikvistova kriva dopunja i zatvara. Kako je broj nestabilnih polova jednak 0, kritična tačka $-1/K$ nije nikad obuhvaćena, te je sistem stabilan za bilo koje pozitivno K .

Nikvistova kriva



Primjer 3- Nikvistov kriterijum

Treba voditi računa o tome da centar četvrtine luka nije u tački (0,0), jer iz te tačke posmatrano čini se da se Nivkistova kriva dopunja lukom većim od $\pi/2$.

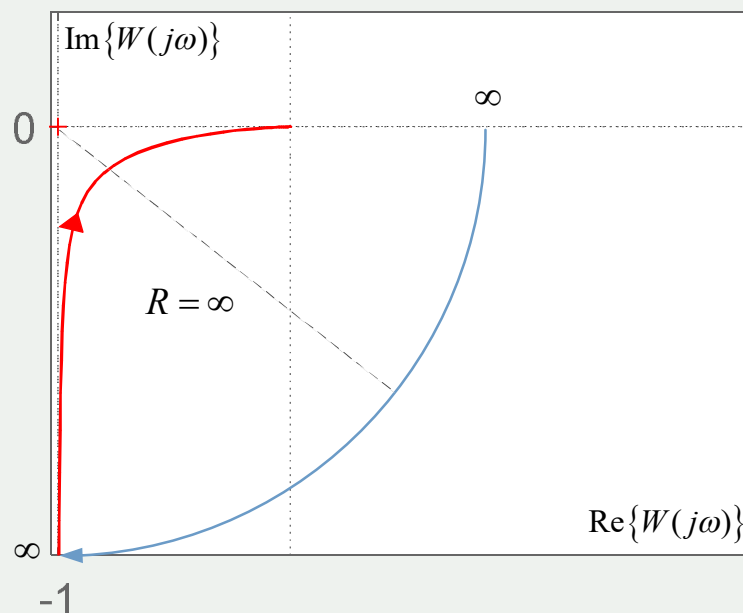
U suštini, Nikvistova kriva se može jednostavnije dopuniti, ne vodeći računa koliki je ugao kružnog isječka. Postupak se može opisati u dva koraka.

1. Prvo treba odrediti $\lim_{s \rightarrow 0} W(s)$. Rezultat može da bude $+\infty$ ili $-\infty$, u zavisnosti od koeficijenata funkcije prenosa.
2. Nikvistova kriva se uvijek dopunja lukom koji počinje u tački $+\infty/-\infty$ na realnoj osi, i koji ide u negativnom smjeru, sve dok se ne spoji sa Nikvistovom krivom.

U ovom primjeru je:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s(0+1)} = \frac{1}{s} = +\infty.$$

Nikvistova kriva



```
>> s=tf('s'); W=1/s/(s+1);  
>> nyquist(W);  
>> G=feedback(W,1)
```

Relativna stabilnost sistema

U praksi često nije dovoljno utvrditi da li je sistem stabilan, već treba odgovoriti i na pitanje koliko je sistem stabilan. Iz toga razloga se definišu margine stabilnosti – veličine koje daju odgovor na pitanje koliko je sistem robustan na promjene parametara, odnosno u kojoj mjeri je dozvoljeno varirati parametre procesa, a da sistem u zatvorenoj sprezi ostane stabilan.

Fazna, amplitudska rezerva i rezerva kašnjenja, ili u drugačijoj terminologiji, preteci (margine) faze, pojačanja i kašnjenja su neke, ali ne i jedine mjere relativne stabilnosti, koje se mogu očitati sa Nikvistove krive.

Kad se govori o stabilnosti, često se koriste dva termina: apsolutna stabilnost i relativna stabilnost. Na primjer, ako se posmatraju dva sistema, sa apsolutne tačke gledišta možemo reći da su oni stabilni ili nestabilni. Sa druge strane, kad poredimo stabilnost jednog sistema u odnosu na drugi, za onaj sistem koji ima veće margine stabilnosti možemo reći da je stabilniji u odnosu na onaj drugi, sa manjim marginama stabilnosti.

Pretek pojačanja

Pretek pojačanja (a) nekog procesa $W(s)$ predstavlja minimalno pojačanje koje se smije unijeti u direktnu granu, a da sistem sa povratnom spregom ostane stabilan. U praksi su procesi najčešće stabilni u otvorenoj sprezi i kod njih Nikvistova kriva ima najviše jedan presjek sa negativnom dijelom realne ose, kao što je prikazano na slici. Da bi spregnuti sistem bio stabilan, Nikvistova kriva ne smije obuhvatiti kritičnu tačku.

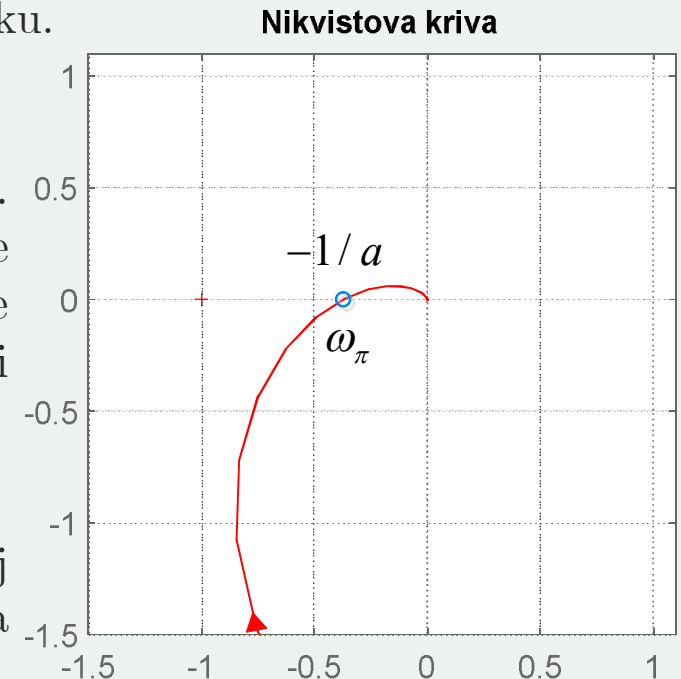
To znači da je pretek pojačanja ono pojačanje a koje će tačku presjeka gurnuti na poziciju $(-1, j0)$.

Pretek pojačanja se može odrediti analitički. Prvo treba odrediti frekvenciju ω_π za koju je fazna karakteristika jednaka -180° . Ta tačka se zove **presječna učestanost preteka pojačanja** i određuje se iz jednačine:

$$\arg(W(j\omega_\pi)) = -180^\circ.$$

Konačno pretek pojačanja je jednak recipročnoj vrijednosti amplitudske karakteristike na učestanosti ω_π :

$$a = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|}.$$



Pretek faze

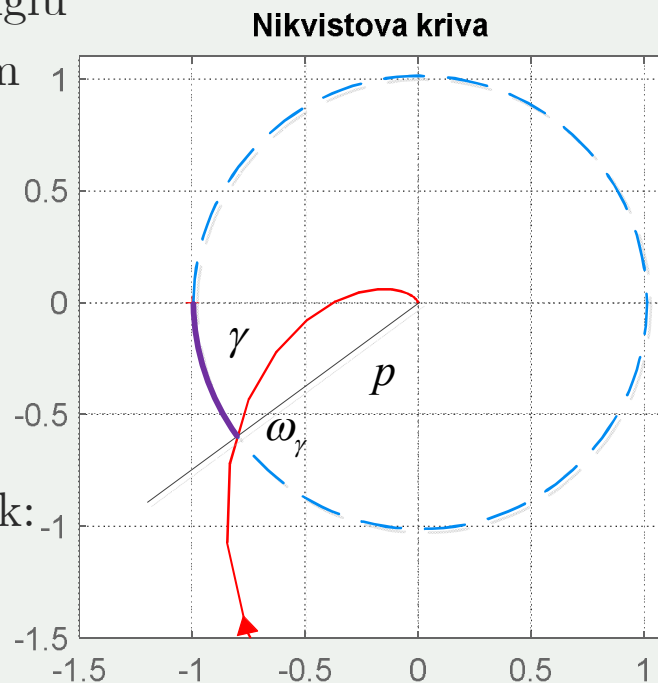
Pretek faze (γ) nekog procesa $W(s)$ predstavlja minimalan ugao za koji je neophodno rotirati Nikvistovu krivu u negativnom smjeru, da bi ona prošla kroz kritičnu tačku. Sa slike se može vidjeti da se taj ugao može odrediti na taj način što se nacрта kružnica jediničnog poluprečnika sa centrom u koordinatnom sistemu. Pretek faze je jednak uglu

koji zaklapa poluprava p sa negativnim dijelom imaginarne ose. Frekvencija ω_γ na kojoj je amplitudska karakteristika sistema jednaka jedinici se zove **presječna učestanost preteka faze**, i računa iz uslova:

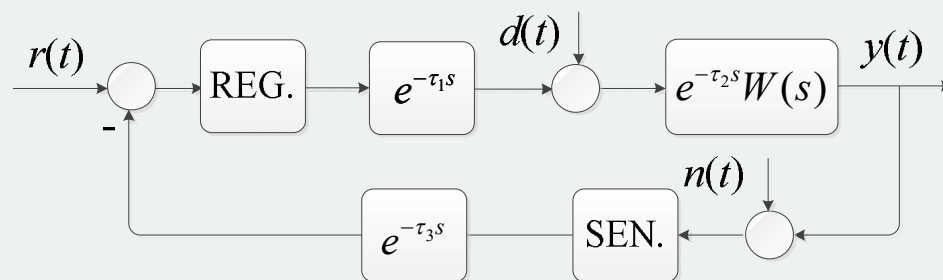
$$|W(j\omega_\gamma)| = 1.$$

Konačno, pretek faze, na osnovu slike je jednak:

$$\gamma = 180^\circ + \arg \{W(j\omega_\pi)\}.$$

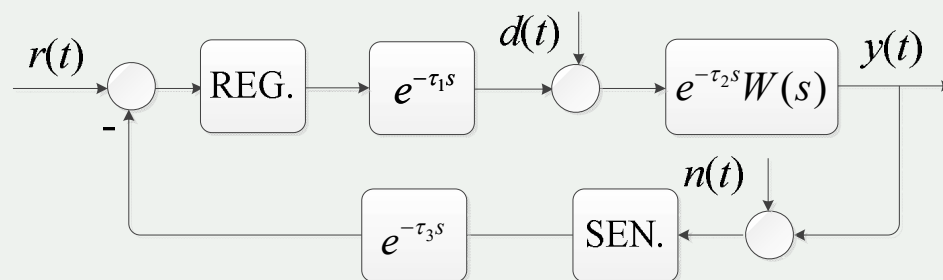


Pretek kašnjenja



Nekad u direktnoj ili povratnoj grani može doći do čistog vremenskog kašnjenja signala. Ovo kašnjenje se naziva **transportno kašnjenje** ili **mrtvo vrijeme** iz razloga što su to kašnjenja koja mogu da nastanu usljed obrade signala u regulatoru (digitalnom), prenosa upravljačkog signala od regulatora do akuatora, prenosa signala od senzora do regulatora, sporog odziva senzora (potrebno mu je određeno vrijeme da precizno izmjeri izlazni signal). Transportno kašnjenje se može javiti i u samom procesu, gdje ono predstavlja vrijeme koje potrebno da se fizička promjenljiva propagira sa jednog na drugi kraj objekta. Na primjer, ako upravljamo procesom zagrijavanja vode u nekoj cijevi, akuator može da se nalazi na jednom kraju cijevi, a temperaturni senzor na drugom kraju. Mrtvo vrijeme predstavlja zbir svih ovih kašnjenja, odnosno vrijeme koje je potrebno da sistem odgovori na promjene referentnog signala.

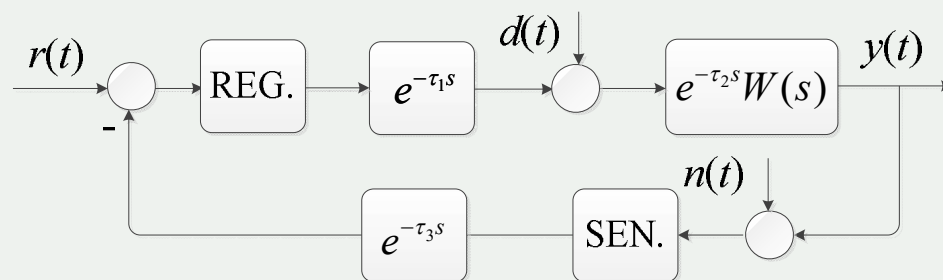
Pretek kašnjenja



Zakašnjela verzija nekog signala $-x(t-\tau)$ se u s domenu modeluje množenjem Laplovosog lika signala sa ekponencijalnom funkcijom $e^{-j\tau s}$. Jasno da je da mrtvo vrijeme komplikuje regulaciju sistema, a može dovesti i do nestabilnosti sistema. **Pretek kašnjenja** (τ_d) predstavlja maksimalno kašnjenje koje se može unijeti u direktnu ili povratnu granu, a da sistem sa povratnom spregom ostane stabilan. Pretek kašnjenja se može odrediti sa Nikvistove krive procesa $W(s)$. Naime, kašnjenje signala ne utiče amplitudsku karakteristiku sistema, dok faznu karakteristiku linearno obara, što se može zaključiti posmatranjem funkcije prenosa procesa sa kašnjenjem:

$$e^{-j\tau\omega}W(j\omega).$$

Pretek kašnjenja

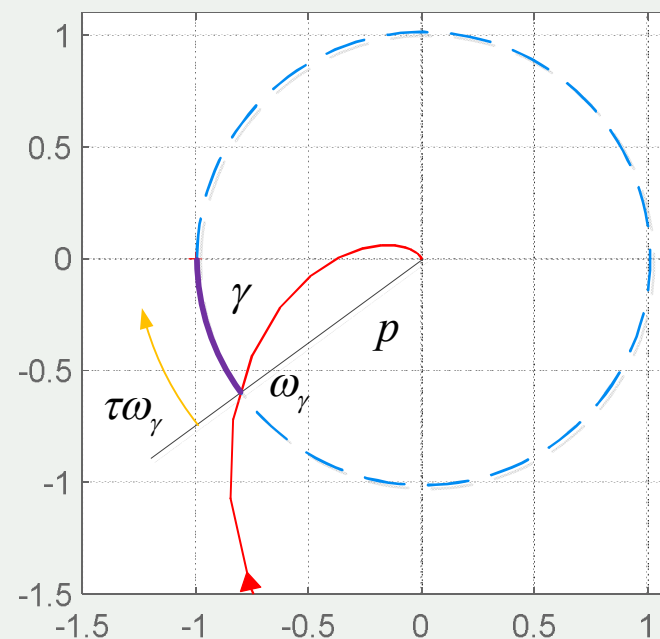


Tačka Nikvistove krive koja odgovara frekvenciji ω_γ , odnosno presječnoj učestanosti preteka faze, će se usljed kašnjenja τ zarotirati u negativnom smjeru za ugao $\tau\omega_\gamma$. Kako se posmatrana tačka najviše smije zarotirati za pretek faze, pretek kašnjenja se može definisati na sljedeći način:

$$\tau_d = \frac{\gamma}{\omega_\gamma}.$$

Dakle, sa τ_d je definisan minimalni zbir kašnjenja τ_1 , τ_2 i τ_3 , koji će sistem sa povratnom spregom dovesti do granice stabilnosti.

Nikvistova kriva



Primjer – margine stabilnosti

Proces je opisan funkcijom prenosa: $W = \frac{2}{(s+1)^3}$. Odrediti margine stabilnosti.

Presječna učestanost preteka pojačanja i pretek pojačanja se mogu odrediti direktno sa Nikvistove krive dobijene u Matlab-u:

$$\omega_{\pi} \approx 1.75 \text{ rad/s}, \quad a \approx 1 / 0.246 = 4.06$$

Presječna učestanost preteka faze se nalazi iz uslova:

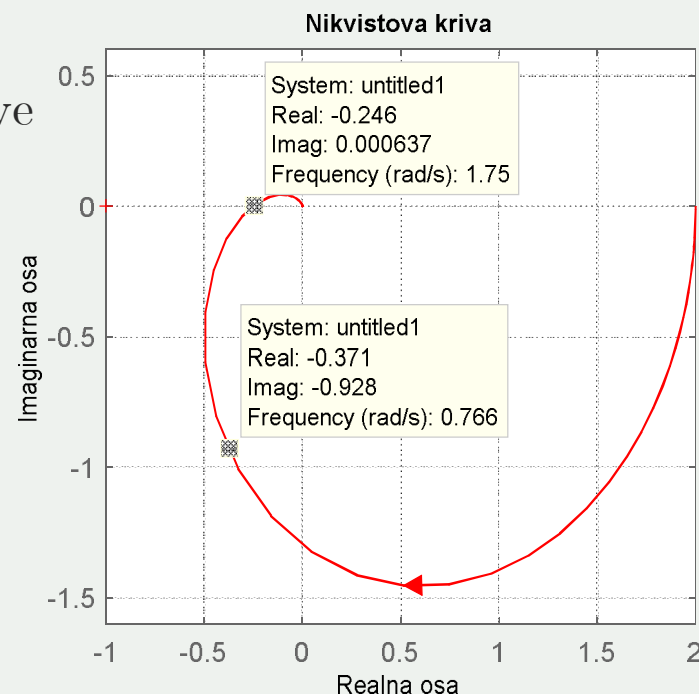
$$|W(j\omega_{\gamma})| = \frac{2}{(\omega_{\gamma}^2 + 1)^{3/2}} = 1,$$

$$\omega_{\gamma}^2 + 1 = 2^{2/3}, \quad \omega_{\gamma} = \pm 0.7664 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Pretek faze je jednak:

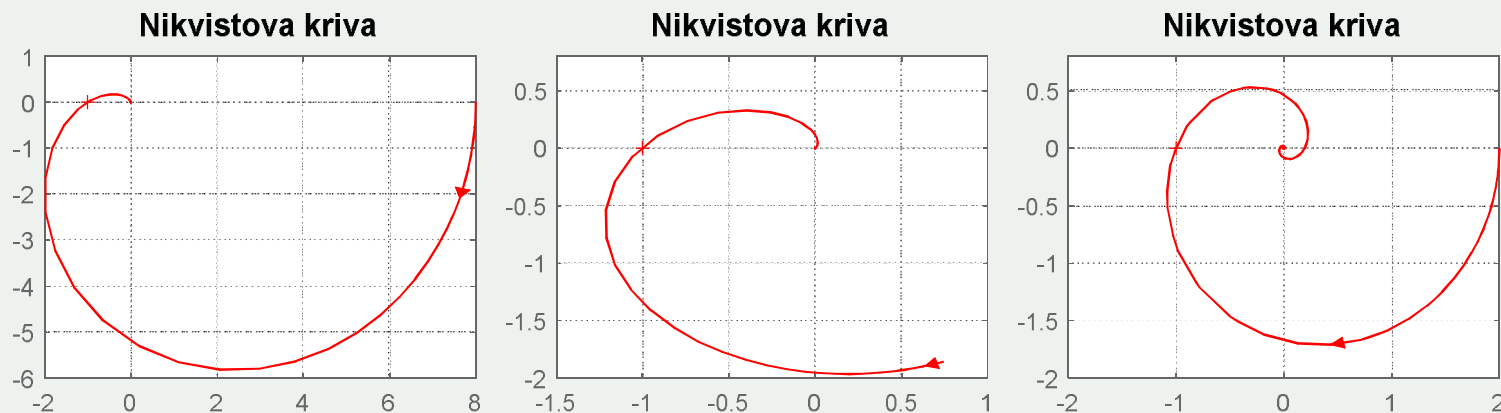
$$\gamma \approx 180 + \arg \{-0.371 - 0.928j\} = 68.21^\circ = 1.19 \text{ rad}$$

Pretek kašnjenja je jednak $\tau_d = \frac{\gamma}{\omega_{\gamma}} \approx 1.19 / 0.766 = 1.55 \text{ s}$.



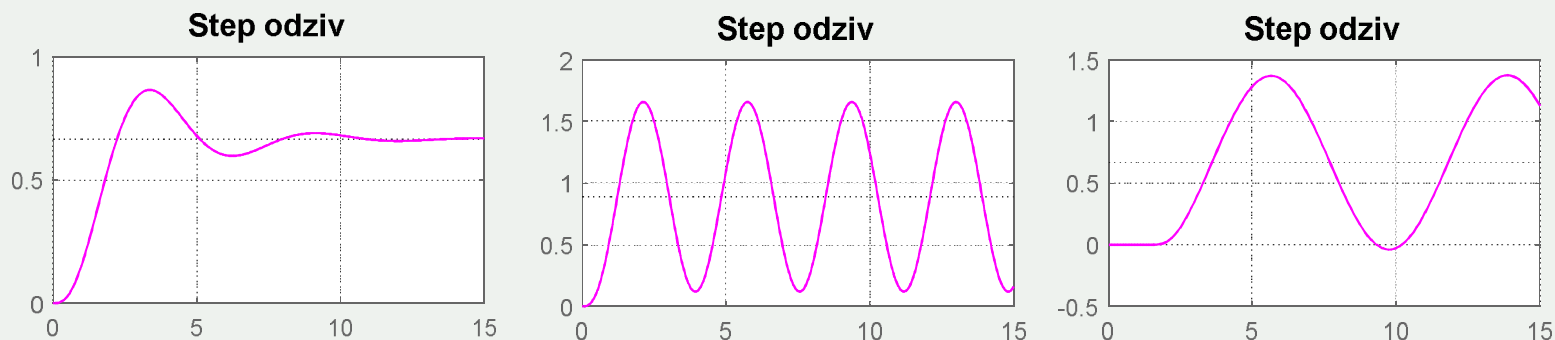
Primjer – margine stabilnosti

Na slikama ispod su prikazane Nikvistove krive sistema $aW(s)$, $e^{-\gamma s}W(s)$ i $e^{-\tau_d s}W(s)$.



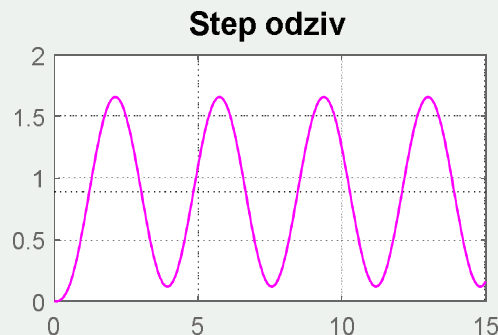
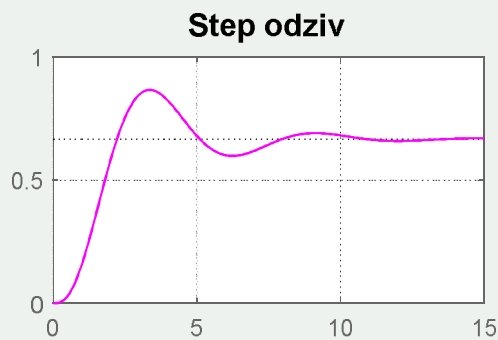
Može se uočiti da za svaki od slučajeva Nikvistova kriva prolazi kroz kritičnu tačku $(-1, j0)$, što znači da se sistem nalazi na granici stabilnosti. Takođe, treba još jednom napomenuti da prilikom projektovanja sistema upravljanja treba ostaviti određene vrijednosti amplitudske i fazne rezerve, jer se time obezbijедуje robusnost na varijacije u parametrima procesa kojim se upravlja. SAU se najčešće projektuje tako da **pretek pojačanja bude u opsegu od 2 do 5, a pretek faze u opsegu od 30° do 60° .**

Primjer – margine stabilnosti



Na slikama ispod su prikazani step odzivi sistema $W(s)$, $aW(s)$ i $e^{-\tau_d s} W(s)$ sa NJPS. Na prvoj slici je prikazan step odziv sistema $W(s)$ sa zatvorenom spregom. Može su uočiti da je sistem stabilan, jer step odziv konvergira ka konačnoj vrijednosti (BIBO definicija stabilnosti). Sa druge strane ako se u povratnu granu unese pojačanje a , sistem će biti na granici stabilnosti, što se vidi sa druge slike. Takođe se, na osnovu prirode odziva, može zaključiti da spregnuti sistem ima konjugovano kompleksni par polova na imaginarnoj osi. Na trećoj slici je prikazan odziv spregnutog sistema kada se u direktnu granu unese vremensko kašnjenje τ_d . Sistem se isto nalazi na oscilatornoj granici stabilnosti, s tim što zbog mrtvog vremena sistem kasni sa odzivom.

Primjer – margine stabilnosti



Ono što je takođe zanimljivo u drugom slučaju je to da funkcija prenosa spregnutog sistema više nije racionalna funkcija, već zbog eksponencijalnog člana ona ima beskonačno mnogo polova, pri čemu jedan par polova leži na imaginarnoj osi, što se vidi iz oscilatorne prirode odziva. Konačno, step odziv sistema $e^{-j\gamma} W(s)$ sa zatvorenom petljom nije simuliran, jer takva funkcija prenosa nema fizičku interpretaciju u smislu realizacije. Polovi spregnutog sistema su kompleksni, ali se ne pojavljuju u parovima, što sa stanovišta fizičke realizacije nije moguće. Pretek faze se fizički tumači kao mjera u kojoj se smije pogriješiti prilikom modelovanja fazne karakteristike. Na nekim od narednih predavanja, priroda step odziva (oscilacije, amplituda) će biti dovedena u vezu sa pretekom faze.

Primjer – margine stabilnosti

```
>> s=tf('s');  
>> W=2/(s+1)^3  
>> W1=4*W; % sistem pojačan a puta  
>> W2=W*exp(-j*1.19) % sisema fazno pomjeren za pretek faze  
>> W3=tf([2],[1 3 3 1],'IODelay',1.55); % sistem sa mrtvim vremenom  
% mora se definisati na ovaj način. Unose se koefiecijenti polinoima u  
% brojiocu, imeniocu i vrijednost vremenskog kašnjenja  
>> nyquist(W); figure  
>> nyquist(W1); figure  
>> nyquist(W2); figure  
>> nyquist(W3); figure  
>> G=feedback(W,1);  
>> G1=feedback(W1,1);  
>> G3=feedback(W3,1);  
>> step(G,15); figure  
>> step(G1,15); figure  
>> step(G3,15)
```