SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

Klasifikacija sistema
Diferencijalne jednačine
Funkcija prenosa
- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami
- Graf toka signala

Model u prostoru stanja
- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Analiza

Kontrolabilnost i opservabilnost
Stabilnost sistema
- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a
- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske karakteristike
- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema
Kompenzatori
- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator
Fizičke realizacije
Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 2

Modelovanje SAU-a

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

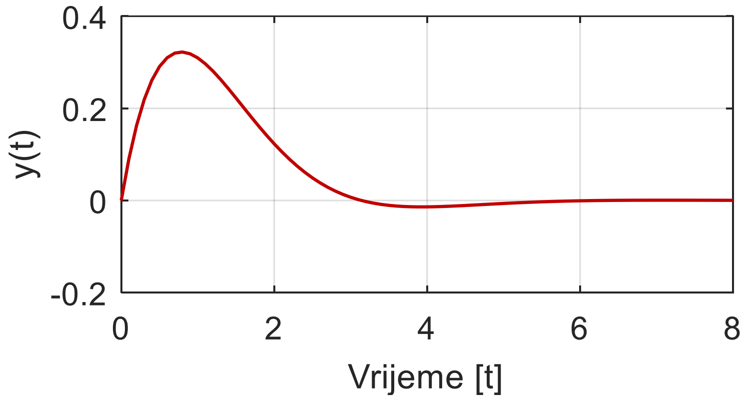
- Klasifikuju signale i sisteme prema različitim kriterijumima.
- Shvate značaj modelovanja u procesu dizajna SAU-a.
- Prepoznaju da diferencijalne jednačine mogu da modeluju dinamiku fizičkih sistema.
- Razumiju primjenu Laplasove transformacije i strukturnih blok dijagrama u analizi linearnih sistema.
- Linearizuju nelinearni sistem razvojem u Tejlorov red.

Klasifikacija signala

Signali u SAU:

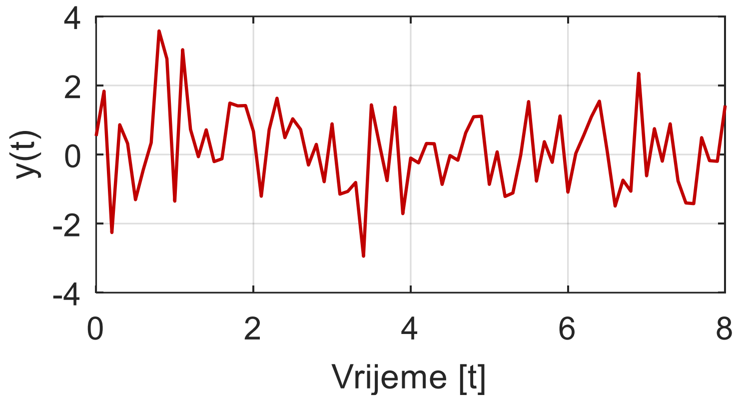
- Prenose informacije sa jednog sistema na drugi
- Vremenski promjenljiva fizička veličina koja nosi neku informaciju

Deterministički signali



Opisuju se nekom determinističkom matematičkom funkcijom. Promjena ovih signala u vremenu je ekzaktno određena. Napon, pozicija, brzina, temperatura, pritisak su primjeri deterministickih signala.

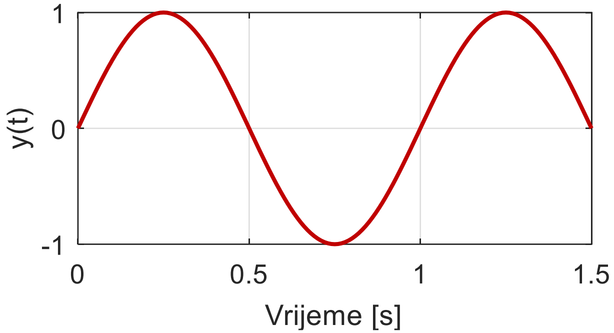
Slučajni (stohastički) signali



Njihova egzaktna vrijednost u datom trenutku nije poznata. Međutim, mogu se posmatrati statistički, odnosno opisati funkcijom raspodjele vjerovatnoće. Šumovi i neke vrste poremećaja predstavljaju slučajne signale.

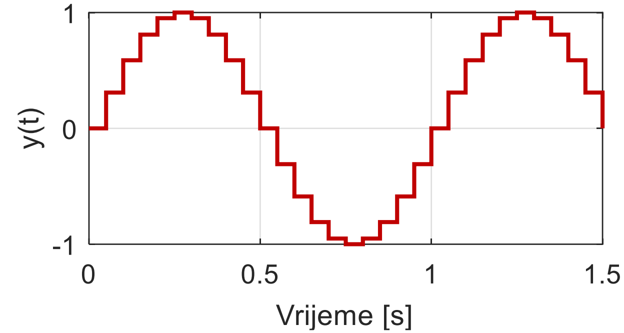
Klasifikacija signala

Kontinualni



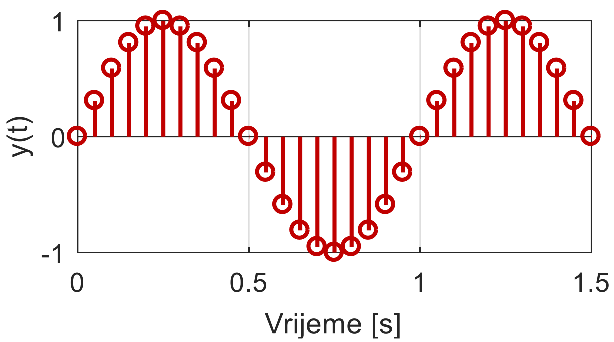
Definisani su u svakom trenutku vremena i mogu imati bilo koju vrijednost amplitude.

Diskretan po amplitudi



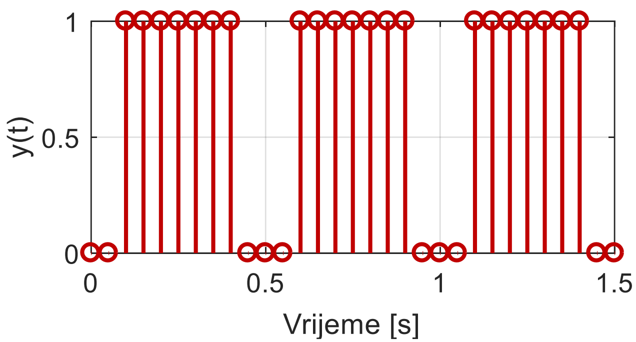
Definisani su u svakom trenutku vremena i mogu imati određene vrijednosti amplitude.

Diskretan po vremenu



Definisani u određenim trenucima vremena i mogu imati bilo koju vrijednost amlitude.

Diskretan po amplitudi i vremenu



Definisani u određenim trenucima vremena i mogu imati određene vrijednosti amlitude.

Klasifikacija sistema

KRITERIJUM	VRSTA SISTEMA	
Broj ulaznih i izlaznih promjenljivih	SISO	MIMO
Vremenska zavisnost promjenljivih	Statički	Dinamički
Prostorna zavisnost promjenljivih	Sa koncentrisanim parametrima	Sa distribuiranim parametrima
Neprekidnost promjenljivih	Kontinualni	Diskretni
Veze između promjenljivih	Linearni	Nelinearni
Vremenska zavisnost parametara	Stacionarni	Nestacionarni
Vremenska uzročnost promjenljivih	Kauzalni	Nekauzalni

U tabeli iznad je prikazana klasifikacija sistema prema različitim kriterijumima, a u nastavku su date osnovne karakteristike svih vrsta sistema.

Klasifikacija sistema

SISO

- Sa jednim ulazom i jednim izlazom (Single-Input and Single-Output)

MIMO

- Sa više ulaza i izlaza (Multiple-Input and Multiple-Output)

Statički (bez memorije):

- Izlaz u trenutku t zavisi samo od ulaza u trenutku t
- Opisuju se običnim jednačinama
- Primjer: kolo sa otpornicima

Dinamički (sa memorijom):

- Izlaz u trenutku t zavisi od prošlih vrijednosti izlaza
- Opisuju se diferencijalnim jednačinama
- Primjer: RLC kolo

Klasifikacija sistema

Stacionarni (vremenski invarijantni)

- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima

Nestacionarni (promjenljivi u vremenu)

- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama sa promjenljivim koeficijentima
- Primjer: avion čija se masa mijenja usljed potrošnje goriva

Kauzalni:

- izlaz u trenutku t zavisi samo ulaza u trenutku t, kao i od ulaza u prethodnim trenucima
- Svi sistemi u realnom vremenu su kauzalni

Nekauzalni:

- Ne mogu se hardverski realizovati
- Moguće je obrađivati buduće podatke, ako su sačuvani u memoriji

Klasifikacija sistema

Sistemi sa koncentrisanim parametrima:

- Matematički se opisuju običnim diferencijalnim ili diferencnim jednačinama (ODE)
- Promjenljive sistema zavise samo od vremena. Drugim riječima, u svim tačkama sistema ulaz djeluje istovremeno
- Primjer: RLC kolo

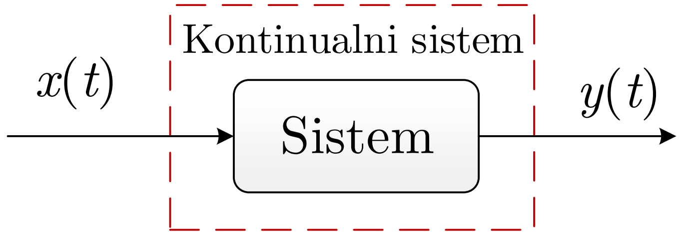
Sistemi sa distribuiranim parametrima:

- Matematički se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama (PDE) koje sadrže najmanje dvije nezavisne promjenljive
- Promjenljive sistema zavise od više od vremena i prostornih koordinata
- Primjer: prostiranje zvučnih ili elektromagnetnih talasa

Klasifikacija sistema

Kontinualni sistemi:

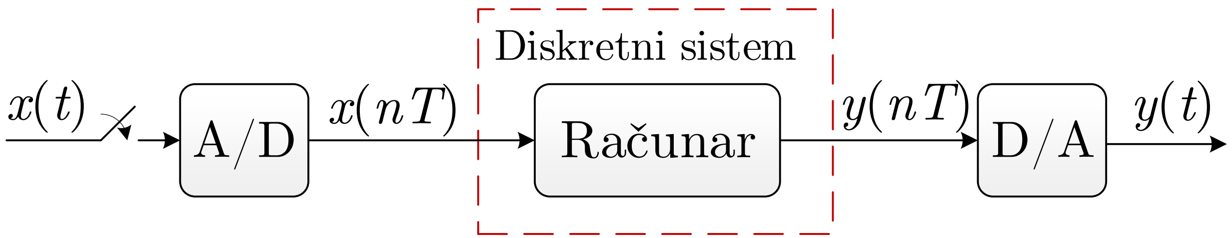
- Matematički se opisuju diferencijalnim jednačinama



$$\dot{y}(t) = -y(t) + x(t)$$

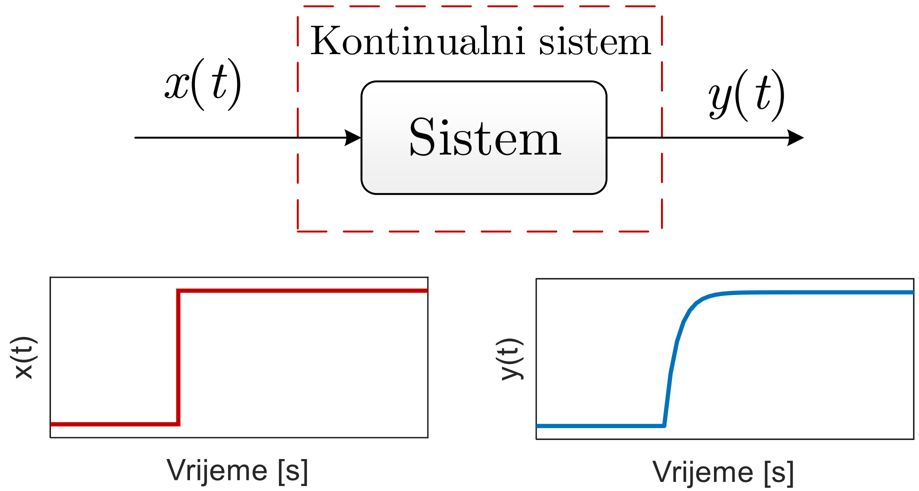
Diskretni sistemi:

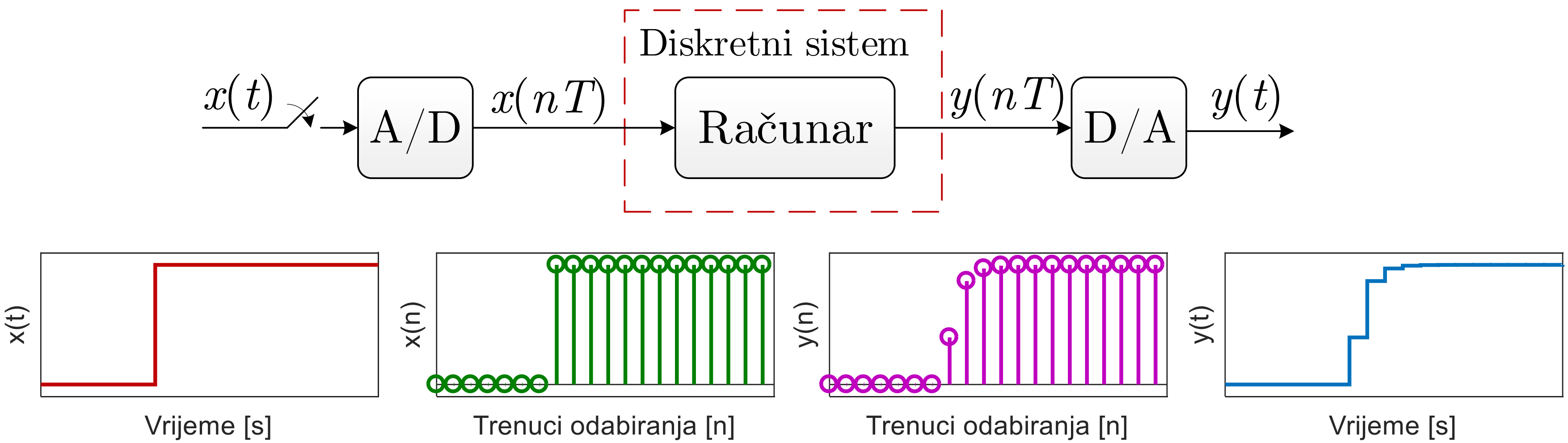
- Matematički se opisuju diferencnim jednačinama



$$y((n+1)T) = (1-T)y(nT) + Tx(nT)$$

Klasifikacija sistema





Klasifikacija sistema

Linearni sistemi:

- Opisuju se linearnim diferencijalnim jednačinama
- Važe principi superpozicije i homogenosti

Sistem je linearan ako je:

- odziv sistema na $ax(t)$ jednak $ay(t)$, pri čemu je $y(t)$ odziv sistema na $x(t)$ (homogenost).
- odziv sistema na $x_1(t)+x_2(t)$ jednak $y_1(t)+ y_2(t)$, pri čemu su $y_1(t)$ i $y_2(t)$ odzivi sistema na $x_1(t)$ i $x_2(t)$, respektivno (superpozicija).

Nelinearni sistemi:

- Ne važe principi superpozicije i homogenosti
- U praksi sistemi najčešće postaju nelinearni za velike vrijednosti ulaznih signala. Na primjer, ako na oprugu djelujemo silom, ona će rastezati po linearnom zakonu. Međutim, opruga se fizički može rastezati samo do određene granice.

Primjer - klasifikacija sistema

Klasifikovati kontunualne sisteme opisane sljedećim jednačinama:

a) $y(t) = u^2(t)$

b) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

c) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u^2(t)$

d) $\dot{y}(t) - y(t) = u(t) + 1$

e) $\ddot{y}(t) + 2t\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

g) $\ddot{y}(t) + 2\sin(t)y(t) = u(t)$

g) $y(t) = u(t) + 2$

h) $\ddot{y}(t) + y(t) = u(t+2)$

Rješenje stavke a) $y(t) = au^2(t)$

1. Odziv sistema na signal $au(t)$ je jednak $a^2u^2(t)$, odnosno različit od $au^2(t)$. Kako nije ispunjen sulov homogenosti, zaključujemo da je sistem je nelinaran.

2. Sistem je vremenski invarijantan, jer su koeficijenti koji množe promjenljive konstantni (ne zavise od vremena).

3. Sistem je statički jer izlaz u trenutku t zavisi samo od trenutne vrijednosti ulaza.

4. Sistem je kauzalan jer odziv u tekućem trenutku vremena ne zavisi od budućih vrijednosti ulaznog signala.

5. Sistem ima koncentrisane parametre, jer oni ne zavisi od prostornih koordinata (koficijenti koji promjenljive).

Kontinualni LTI sistemi

U ovom kursu se bavimo

- **Kontinualnim**

  Iako se digitalni regulatori danas možda dominantno koriste, objekti upravljanja su kontinualni. Pored toga, kontinualni zakoni upravljanja se jednostavno tranformišu u digitalne (diskretizuju).

- **Linearnim**

  Linearni sistemi su jednostavni, za njih je razvijena opšta teorija i postoje metode za linearizaciju nelinearnih sistema.

- **Vremenski invarijantim**

  Kod većine sistema se može smatrati da su parametri nepromjenljivi.

- **Kauzalnim sistemima**

  SAU su real-time sistemi.

- **Sa koncentrisanim parametrima**

  SAU najčešće ima koncentrisane parametre.

Modeli sistema

Modelovanje komponenti sistema je prvi korak u analizi i dizajnu SAU-a. Modele sistema možemo podijeliti u više kategorija:

Vrste modela
1. Matematički modeli
2. Softverski model
3. Grafički modeli
4. Mentalni modeli

Kreiranje matematičkih modela
1. Fizičko modelovanje
2. Identifikacija
3. Kombinovano

Fizičko modelovanje podrazumijeva direktnu primjenu fizičkih zakona na posmatrani sistem ili komponente sistema. Kod ovog tipa modelovanja nije potrebno raditi eksperimente na sistemu, ali je potrebno poznavati parametre sistema (otpornost, masa, itd).

Identifikacija podrazumijeva pretpostavku, odnosno usvajanje nekog matematičkog modela sistema. Najčešće se snimaju ulazi i izlazi realnog sistema, na osnovu kojih se identifikaju parametri usvojenog modela.

Različite reprezentacije sistema

Linearni vremenski invarijantni sistemi se mogu modelovati na više načina:

- Obične diferencijalne jednačine višeg reda (ODE)
- Model u prostoru stanja (SS model)
- Prenosna funkcija (TF model)
- Strukturni blok dijagram (SBD model)

U vremenskom domenu LTI sistemi se opisuju diferencijalnim jednačinama sa konstantim koeficijentima, direktnom primjenom fizičkih zakona na posmatrani sistem. Uvođenjem odgovarajućih smjena, diferencijalne jednačine višeg reda se mogu zapisati u vidu sistema jednačina prvog reda, na taj način dobijajući model sistema u prostoru stanja. Osim u vremenskom domenu, LTI sistemi se mogu modelovati u s-domenu, pomoću funckcije prenosa, ili strukturnog blok dijagrama, kod kojeg se sistem i tokovi signala u njemu detaljnije prikazuju odgovarajućim blokovima.

Diferencijalne jednačine višeg reda

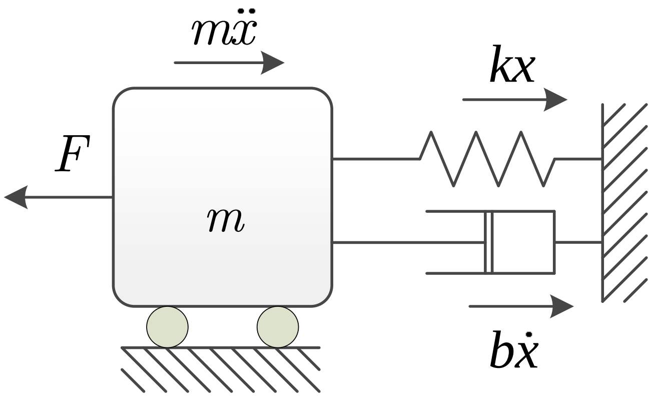
U opštem slučaju LTI sistem se modeluje običnom linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda sa konstantnim koeficijentima:

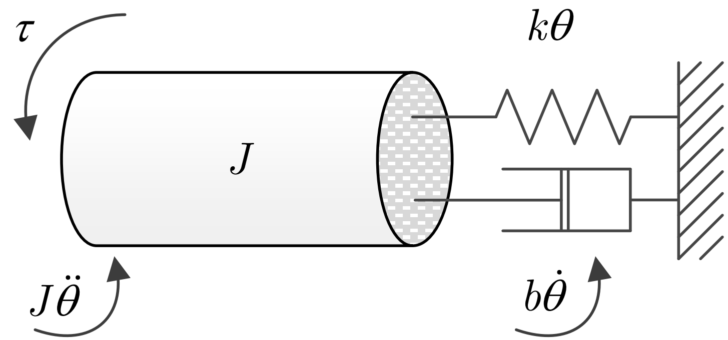
$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

ODE model

U gornjoj jednačini $y(t)$ predstavlja izlaz, a $u(t)$ ulaz sistema. Sa desne strane jednačine mogu figurisati izvodi ulaznog signala do m-tog reda, pri čemu, za kauzalan sistem važi da je $m \leq n$. Ovakav način modelovanja nije praktičan za opštu analizu sistema, pa se iz toga razloga uvodi kocept modelovanja u prostoru stanja, odnosno matametička predstava u vidu sistema diferencijalnih jednačina prvog reda. U nastavku su dati neki tipični primjeri fizičkih sistema koji se modeluju linearnim diferencijalnim jednačinama.

Mehanički sistemi





Na slikama su prikazani translatorni i rotacioni mehanički sistemi drugog reda. Linearnom kretanju tijela mase m, pod uticajem sile F, suprotstavljaju se sila trenja prigušnice i sila elastičnosti opruge. Sa druge strane, rotaciji tijela momenta inercije J, po uticajem obrtnog momenta τ, takođe se suprotstavljaju sile trenja i elastičnosti.

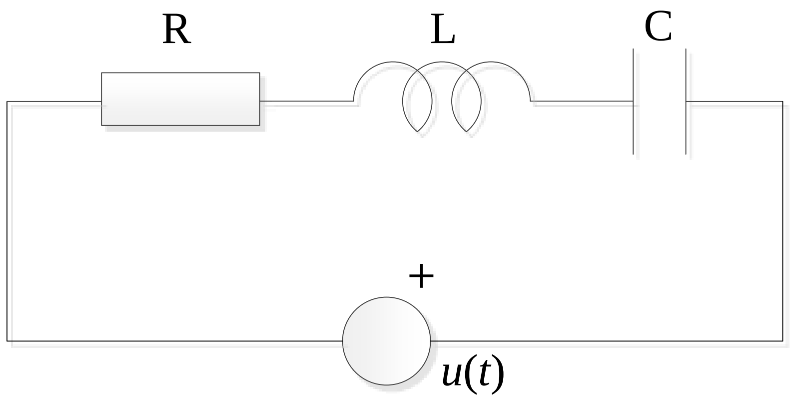
Modeli sistema se dobijaju primjenom Njutnovih zakona dinamike:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \quad \text{i} \quad J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = \tau.$$

ODE model

Uočimo da se oba sistama modeluju diferencijalnim jednačinama drugog reda.

Električni sistemi



Model električnog sistema se dobija primjenom Kirhofovih zakona. Red diferencijalne jednačine zavisi od broja kondenzatora i kalemova. Konkretno, za redno RLC kolo važi jednačina:

$$u - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = 0.$$

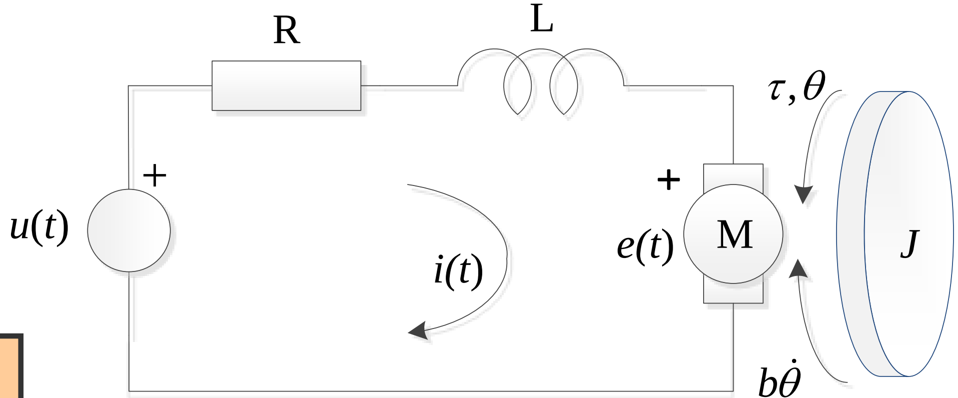
Uvodeći smjenu $i = \dot{q}$, prethodna jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u.$$

ODE model

Elektromehanički sistem

Model DC motora je prikazan na slici. Namotaji motora imaju otpornost R i induktivnost L. Moment inercije vratila je J, dok je koeficijent trenja b. Usljed okretanja motora na namotajima se indukuje kontra elektromotorna sila e koja je proporcionalna brzini okretanja vratila ($e = k_e\omega$). Obrtni moment koji rotira vratilo je proporcionalan struji kroz namotaje ($\tau = k_t i$).



Diferencijalne jednačine koje modeluju opisani sistem imaju sljedeći oblik:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = k_t i$$

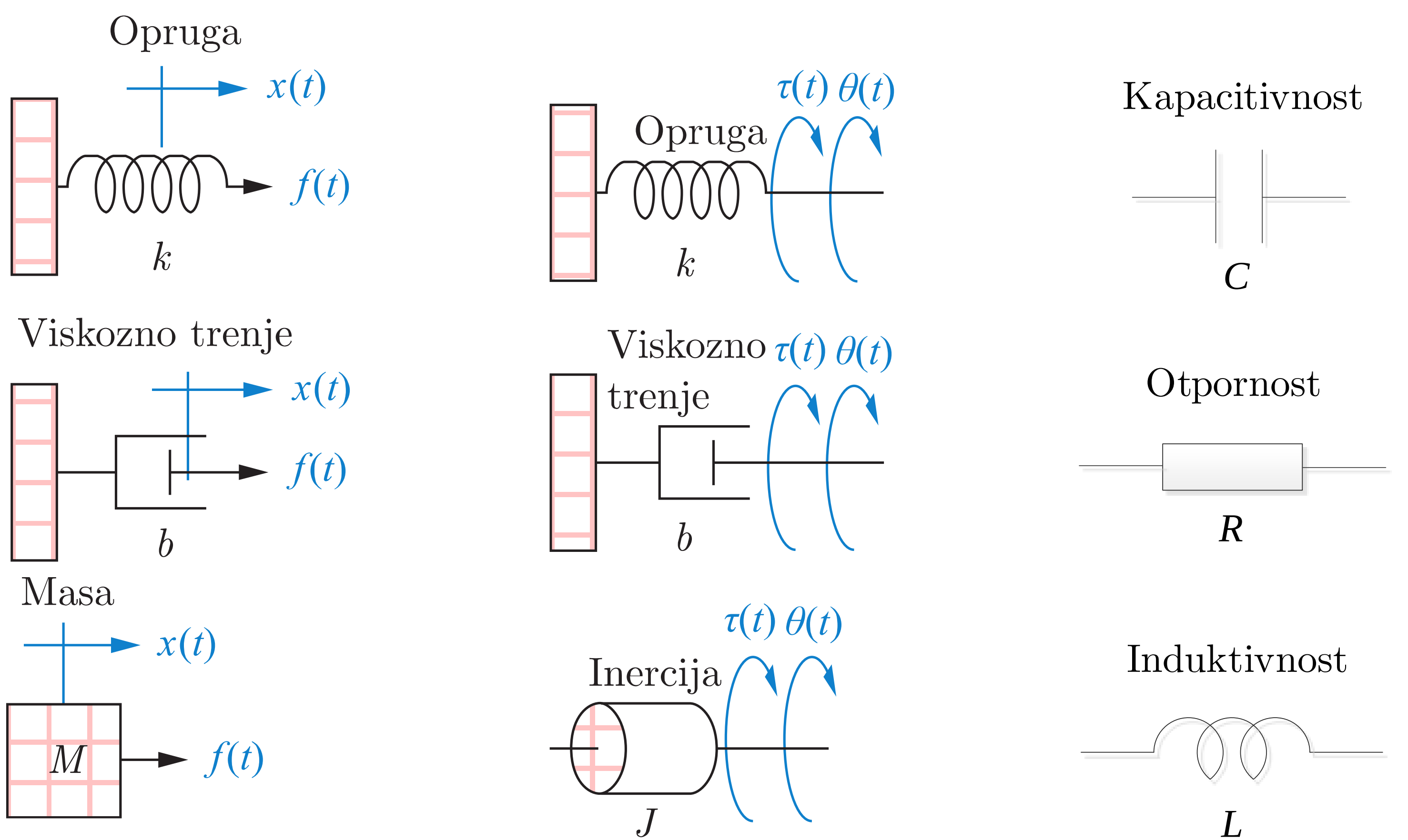
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_e\dot{\theta}.$$

ODE model

Dakle, zadati elektromehanički sistem se opisuje sa dvije linearne diferencijalne jednačine: jednom drugog reda i jednom prvog reda.

Analogije električnih i mehaničkih veličina

Posmatrajući prethodne diferencijalne jednačine, uočavamo da se može uspostaviti analogija između mehaničkih i električnih veličina, što je prikazano na slikama ispod.



Model u prostoru stanja (State Space, SS)

Model u prostoru stanja predstavlja sistem diferencijalnih jednačina prvog reda kojima se opisuje dinamika sistema.

Za kontinualne sisteme:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

SS model

U opštem obliku sistemi su nelinearni sa vremenski promjenljivim koeficijentima.

Za kontinualne linearne vremenski invarijante sisteme (LTI):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

SS model

Kod LTI sistema se može koristiti jednostavniji zapis.

Koncept prostora stanja se odnosi na opisivanje dinamike sistema minimalnim brojem varijabli koje se zovu *promjenljive stanja*, na takav način da odziv sistema bude u potpunosti definisan za bilo koji ulazni signal. Za razliku od funkcije prenosa, ovaj način modelovanja daje mogućnost uvida u sve promjenljive sistema, a ne samo u njegov izlaz.

Model u prostoru stanja

Generalna forma LTI sistema u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \longrightarrow \text{jednačine stanja}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \longrightarrow \text{izlazne jednačine}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{np} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}$$

SS model

Jednačine stanja i izlazne jednačine se zapisuju u matričnom obliku. Ovakav zapis je pogodniji za matematičku analizu i simulaciju sistema. Promjenljive stanja nekad mogu imati samo matematički smisao.

Modelovati u prostoru stanja električno kolo prikazano na slici. Za izlaznu promjenljivu usvojiti napon na otporniku.

ODE jednačina koja opisuje RLC kolo:

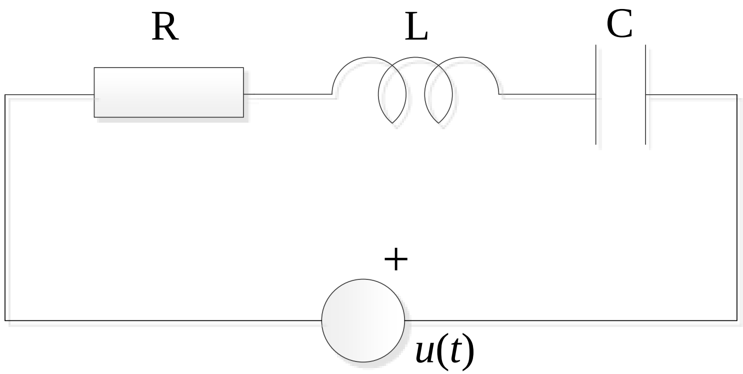
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u.$$

Svaka diferencijalna jednačina n-tog reda se može svesti na n dif. jednačina prvog reda, uvođenjem odgovarajućih smjena:

$$x_1 = q \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{q} = x_2,$$

$$x_2 = \dot{q} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{q}.$$

Uvrštavanjem uvedenih promjenljivih u polaznu jednačinu dobija se model sistema u prostoru stanja.



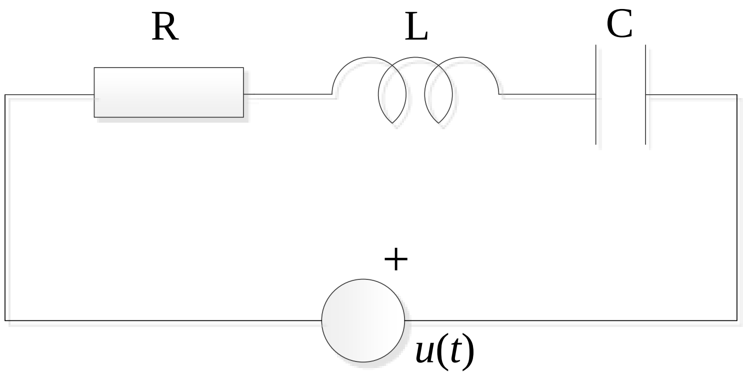
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}[u]$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [0][u]$$

SS model

Primjer – redno RLC kolo (II)

Kod elektičnih sistema postoji konvencija da se za promjenljive stanja usvajaju naponi na kondenzatorima i struje kroz kalemove. Ovo vodi ka jednostavnijem definisanju modela u prostoru stanja.



Za promjenljve stanja ćemo usvojiti struju i_L i napon u_c. Treba pronaći:

$$\dot{i}_L = f(i_L, u_c, u),$$
$$\dot{u}_c = f(i_L, u_c, u),$$
$$y = f(i_L, u_c, u).$$

Primjenjujući Kirhofove zakone na RLC kolo, pritom vodeći računa o usvojenim promjenljvima, dobija se:

$$u - Ri_L - L\dot{i}_L - u_c = 0,$$
$$i_C = i_L = C\dot{u}_c,$$
$$y = Ri_L.$$

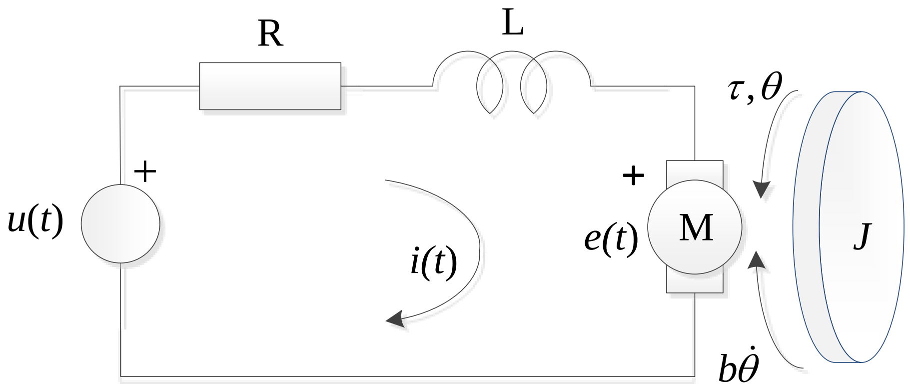
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [0][u]$$

SS model

Primjer – DC motor

Modelovati u prostoru stanja DC motor prikazan na slici. Smatrati da je $k_t = k_e = k$.



Diferencijalne jednačine koje opisuju dati sistem imaju sljedeći oblik:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = ki,$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k\dot{\theta}.$$

Uvodeći smjene:

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = i,$$

dobija se sljedeći sistem jednačina prvog reda:

Napomena: DC motor se može predstaviti modelom drugog reda, ukoliko se izbaci promjenljiva τ i usvoji promjenljiva ω.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & k/J \\ 0 & -k/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

SS model

Modelovanje pomoću funkcije prenosa (TF)

U opštem slučaju LTI sistem se opisuje linearnom diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u.$$

Funkcija prenosa se definiše kao odnos izlaznog i ulaznog signala, pri nultim početnim uslovima. Koristeći osobinu izvoda, gornja jednačina se može prebaciti u s-domen:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0)X(s).$$

Funkcija prenosa sistema je jednaka:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}.$$

ODE model $\longleftrightarrow$ TF model

Prelazak iz SS u TF domen

Na sličan se može naći veza između modela u prostoru stanja i funkcije prenosa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Primjenjujući osobinu prvog izvoda, prethodne jednačine se preliskavaju u Laplasov domen:

$$s\mathbf{X}(s) - \cancel{\mathbf{x}(0^-)} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s).$$

Dalje se dobija:

Voditi računa da se radi o matričnoj jednačini.

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s),$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{X}(s),$$
$$\boxed{\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.}$$

SS model $\longrightarrow$ TF model

Tabela Laplasovih transformacija

f(t)	**F(s)**
$\delta(t)$	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

f(t)	**F(s)**
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Osobine Laplasove transformacije

Osobina	Ilustracija
Definicija	$f(t) \xleftrightarrow{L} F(s)$ $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
Linearnost	$Af_1(t) + Bf_2(t) \xleftrightarrow{L} AF_1(s) + BF_2(s)$
Prvi izvod	$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sF(s) - f(0^-)$
Drugi izvod	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
nth izvod	$\frac{d^n f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(n-i)}(0^-)$
Integral	$\int_0^t f(t) dt \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} F(s)$
Množenje sa vremenom	$tf(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{dF(s)}{ds} F(s)$

Osobina	Ilustracija
Vremenski pomjeraj	$f(t-a)h(t-a) \xleftrightarrow{L} e^{-as} F(s)$
Kompleksni pomjeraj	$f(t)e^{-at} \xleftrightarrow{L} F(s+a)$
Vremensko skaliranje	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{L} aF(as)$
Konvolucija	$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{L} F_1(s) F_2(s)$
Teorema o početnoj vrijednosti	$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$
Teorema o krajnjoj vrijednosti	$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

Osobine funkcije prenosa

Neke od osobina funkcije prenosa su pobrojane ispod:

- Uprošćava matematičku analizu sistema: diferencijalne jednačine se svode na algebarske, konvolucija predstavlja množenje blokova u s domenu, itd.
- Izvedena je za nulte početne uslove. Funkcija prenosa se ne može direktno koristiti za računanje odziva na početne uslove.
- Funkcija prenosa se može definisati i kao Laplasova transformacija impulsnog odziva sistema.
- Funkcija prenosa se može koristiti samo sa analizu linearnih sistema. Preciznije rečeno, osobine koje smo nabroijali važe samo za linearne sisteme.
- Funkcija prenosa prikazuje samo vezu između ulaza i izlaza, pa su neke bitnije informacije unutar sistema nevidljive.

Primjer – DC motor

Odrediti funkciju prenosa DC motora. Za izlaz usvojiti ugaoni pomjeraj.

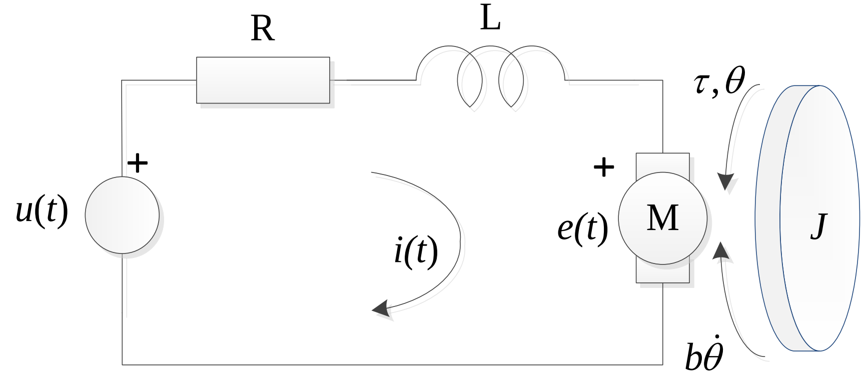
Jednačine koje opisuju dinamiku motora glase:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = ki, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = u - k\dot{\theta},$$

dok je model sistema u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & k/J \\ 0 & -k/L & -R/L \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Diferencijalne jednačine u s-domenu imaju oblik:

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = k_t I(s)$$

$$(Ls + R)I(s) = U - k_e s\Theta(s).$$

Funkcija prenosa se može dobiti i rješavanjem gornjeg sistema jednačina.

Funkcija određuje na sljedeći način:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{k_t}{s\left[JLs^2 + (bL + JR)s + bR + k_e k_t\right]}.$$

Strukturni blok dijagram

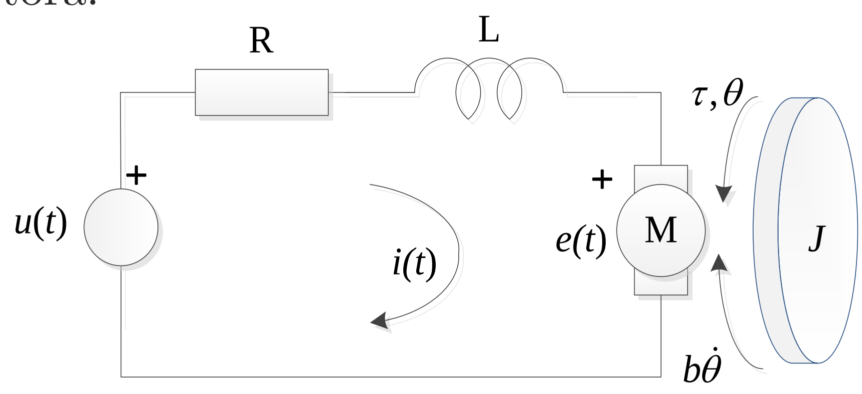
Jedan način modelovanja sistema je i strukturni blok dijagram, pomoću kojeg se prikazuju komponetne sistema i njihove međusobne veze, odnosno tokovi signala među komponentama. Svaka komponenta sistema se modeluje odgovarajućom funkcijom prenosa, koja se određuje na osnovu diferencijalnih jednačina kojima se opisuje dinamičko ponašanje sistema. Dakle, strukturni blok dijagram predstavlja kombinaciju grafičkog (blokovskog) modelovanja i modelovanja u s-domenu.

Za razliku od funkcije prenosa koja daje informaciju o vezi između ulaza i izlaza, strukturni blok dijagram pruža detaljnije informacije o unutrašnjoj strukturi sistema.

Na narednim predavanjima biće objašnjen postupak svođenja strukturnog blok dijagrama na osnovnu strukturu, tj. postupak određivanja ekvivalentne funkcije prenosa na osnovu strukturnog blok dijagrama. Postoji još jedan grafički način modelovanja sistema – grafovi toka signala. Kod njih se kombinuju elementi teorije grafova i Laplasove trasformacije.

Primjer – DC motor

Skicirati strukturni blok dijagram DC motora.



Jednačine DC motora glase:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k\dot{\theta}.$$
$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = ki$$

Prva jednačina u s-domenu ima oblik:

$$(Ls+R)I(s) = U - k_e s\Theta(s) \Leftrightarrow (Ls+R)I(s) = U - k\Omega(s) \Rightarrow I(s) = \left(U - k\Omega(s)\right)\frac{1}{Ls+R}.$$

Na osnovu druge jednačine se dobija:

$$(Js^2 + bs)\Theta(s) = kI(s) \Leftrightarrow (Js+b)s\Theta(s) = kI(s) \Leftrightarrow (Js+b)\Omega(s) = kI(s) \Rightarrow I(s) = \frac{kI(s)}{Js+b}.$$

Strukturni blok dijagram se crta u skladu sa prethodnim jednačinama.