

---

# SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

---

# Predavanje 7

---

## Karakteristike SAU-a: statička analiza

### Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Razumiju uticaj pojačanja na grešku u stacionarnom stanju u uslovima poremećaja i mjernog šuma
- ❖ Definišu konstante greške SAU-a i grešku u stacionarnom stanju za različite tipove sistema
- ❖ Ispitaju osjetljivost SAU-a na neki parametar od interesa
- ❖ Nacrtaju principijelnu šemu i strukturni blok dijagram pozicionog u brzinskog servomehanizma

# Mapa kursa

---

## Modelovanje

Diferencijalne jednačine ✓  
Funkcija prenosa ✓

- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami

Model u prostoru stanja ✓

- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Prelazak iz jednog domena u drugi ✓

## Analiza

Kontrolabilnost i opservabilnost ✓  
Stabilnost sistema ✓

- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a

- Stacionarno stanje ←
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske karakteristike

- Bodeovi dijagrami

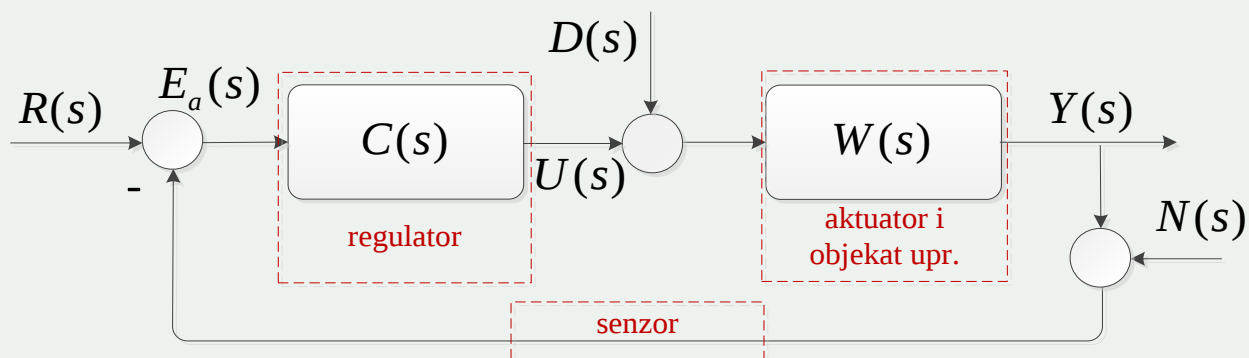
## Dizajn

Specifikacije sistema  
Kompenzatori

- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator  
Fizičke realizacije  
Primjeri dizajna sistema upravljanja

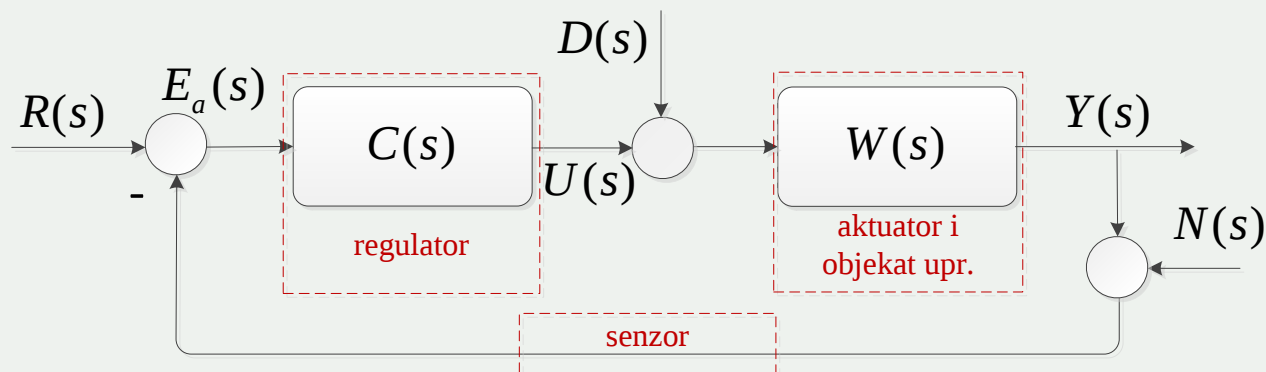
# Osnovna regulaciona kontura



Na slici je prikazana osnovna regulaciona kontura SAU-a. Cilj SAU-a je da izlazni signal prati referentni signal. Odnosno regulator koristi razliku između referentnog i izmjerenog izlaznog signala, na osnovu koje generiše upravljački signal  $U(s)$ , koji se dalje prosljeđuje aktuatoru i procesu.

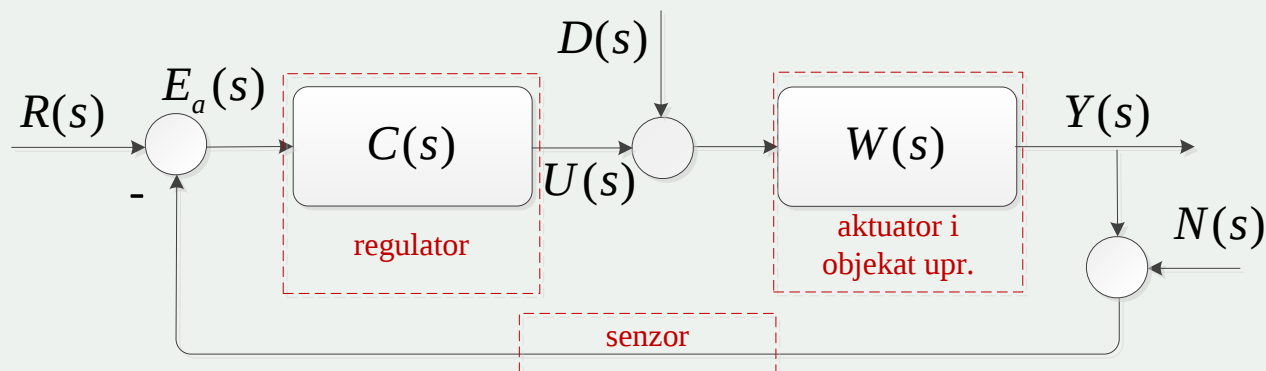
U neki problemima upravljanja kao što su regulacija temperature, pritiska ili brzine, referentni signal je konstantan, pa SAU treba da drži izlazni signal na zadatu vrijednost. Sa druge strane, u drugoj, nešto komplikovanijoj klasi problema, referentni signal može da bude promjenljiv, i tada izlazni signal treba da se ponaša onako kako diktira referentni signal.

# Osnovna regulaciona kontura



Ono što projektovanje regulatora čini komplikovanim jesu poremećaji i mjerni šumovi. Poremećaji su bilo koje smetnje koje djeluju na sami proces. U ovoj šemi smo usvojili da on djeluje da ulaz procesa. Mjerni šumovi predstavljaju greške u mjerenju izlaza i najčešće su slučajne prirode. Ove greške su posljedica mjerne nesigurnosti samog senzora. S obzirom da je u ovoj šemi modelovan i šum, treba napraviti razliku između signala greške  $E(s) = R(s) - Y(s)$  i signala  $E_a(s) = R(s) - Y(s) - N(s)$ . U okviru ovog predavanja bavićemo se statičkim karakteristikama SAU-a, odnosno karakteristikama u stacionarnom stanju. I dalje usvajaći najjednostavniji regulator – pojačavač, ispitaćemo kako njegova vrijednost utiče na grešku u praćenju referentnog signala u stacionarnom stanju.

# Greška u stacionarnom stanju

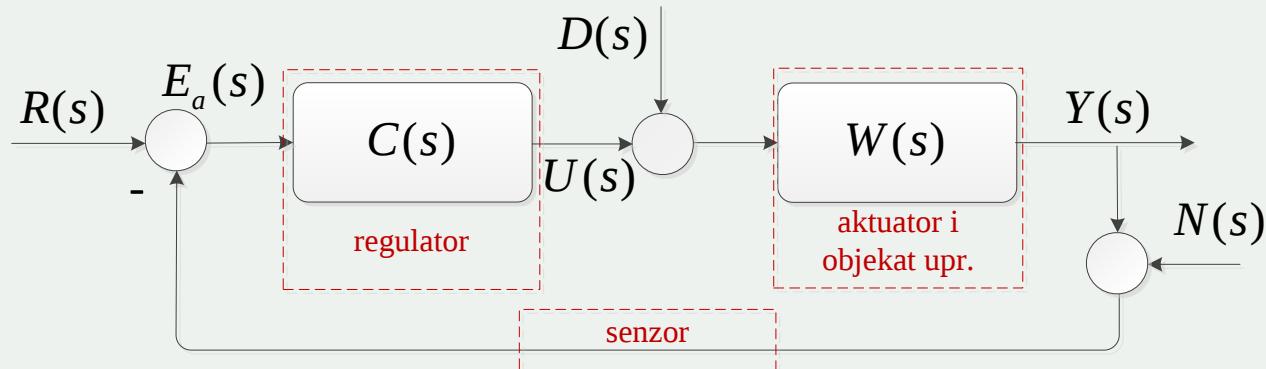


Najprije ćemo posmatrati regulacionu konturu prikazanu na slici. Usvojimo da je  $C(s)=K$ , kako bi zaključili kakve efekte generalno ima pojačanje na signal greške. Primjenjujući princip superpozicije, dobija se da je signal greške jednak:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + KW(s)} R(s) - \frac{W(s)}{1 + KW(s)} D(s) + \frac{KW(s)}{1 + KW(s)} N(s).$$

Za računanje vrijednosti signala u stacionarnom stanju može se primijeniti Laplasova teorema o krajnjoj vrijednosti.

# Greška u stacionarnom stanju

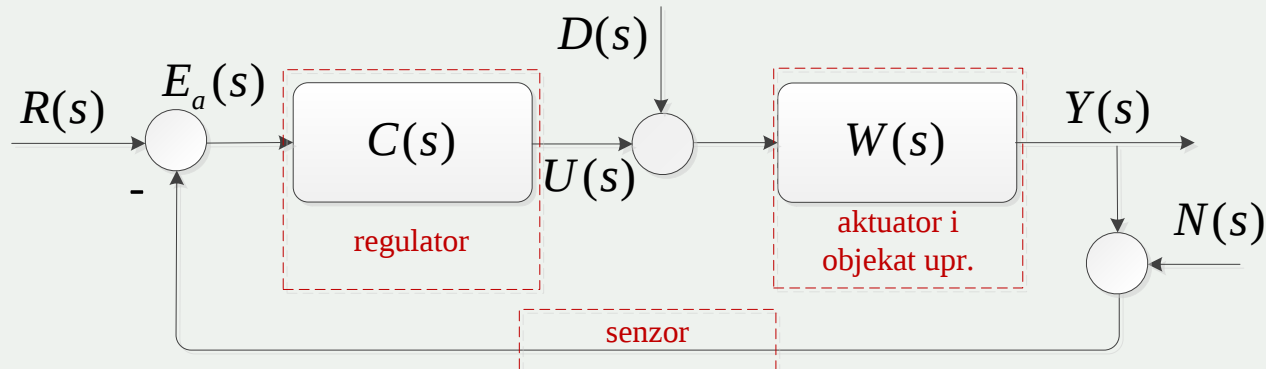


Prema Laplasovoj graničnoj teoremi, signal greške u stacionarnom stanju (u vremenskom domenu) će biti jednak:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + KW(s)} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sW(s)D(s)}{1 + KW(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sKW(s)N(s)}{1 + KW(s)}.$$

Treba napomenuti da teorema o krajnjoj vrijednosti može primijeniti samo na signale koji imaju konačne vrijednosti. Dakle, ako je signal teži ka beskonačnosti (recimo usljed nestabilnosti sistema) primjenom Laplasove teoreme dobićemo pogrešan rezultat. Takođe ako je referetni signal sinusoida, signal greške će takođe biti sinusoidalan, te se ni ovjde ne može primijeniti pomenuto pravilo.

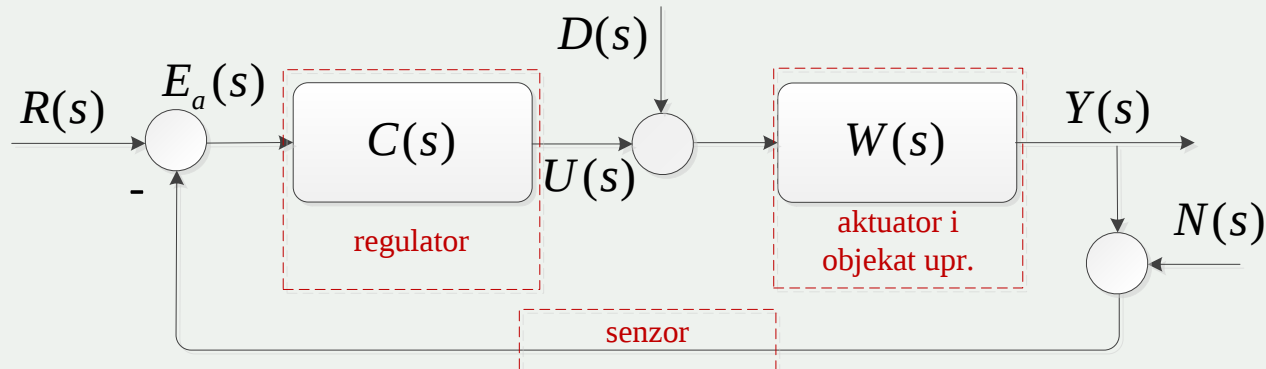
# Greška u stacionarnom stanju



$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + KW(s)} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sW(s)D(s)}{1 + KW(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sKW(s)N(s)}{1 + KW(s)}.$$

Posmatrajući izraz sa signal greške može se uočiti da povećanje pojačanja može imati pozitivne efekte na rad SAU-a. Naime, ako posmatramo samo prvi član sabirka može se uočiti da on opada sa povećanjem pojačanja  $K$ , pod uslovom da je limes konačan. Jer, vidjećemo kasnije, posmatrani limes nekad može da bude beskonačan ili čak nula, bez obzira na vrijednost  $K$ . Slični zaključci važe i za drugi član. Pod uslovom da je limes konačan, sa povećanjem pojačanja greška koja potiče od poremećaja će se smanjivati.

# Greška u stacionarnom stanju



$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + KW(s)} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sW(s)D(s)}{1 + KW(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sKW(s)N(s)}{1 + KW(s)}.$$

Posmatranjem trećeg člana može se uočiti da se sa povećanjem pojačanja  $K$  povećava greška koja potiče od mjernog šuma. Pored toga, sa povećanjem  $K$  smanjuju se margine stabilnosti, odnosno sistem postaje manje stabilan. Ako sagledamo još jedan aspekt, a to je vrijednost upravljačkog signala, zaključujemo da veće vrijednosti  $K$  vode ka većim vrijednostima upravljačkog signala, odnosno većoj potrošnji energije. Zato, prilikom dizajna SAU-a uvijek treba praviti kompromise - ne može se postići da sistem efikasno suzbija poremećaje, a da pritom bude i neosjetljiv na mjerne šumove.

# Greška u stacionarnom stanju

Upoređujući upravljanje sa povratnom spregom sa upravljanjem u otvorenoj sprezi, mogu se istaći sljedeći benefiti povratne sprege:

- povratna sprega prirodno teži da redukuje uticaj poremećaja i smanji grešku u radu sistema;
- povratna sprega može da ustabili nestabilan sistem. Štaviše, odabirom odgovarajućih margina stabilnosti, sistem sa povratnom spregom se može učiniti robusnim na nesigurnosti/greške u modelovanju sistema;
- povratna sprega može da popravi i prelazni proces, odnosno da skрати njegovo trajanje. O prirodi prelaznih procesa govorićemo na narednim predavanjima.

Povratna sprega ima i negativne strane. Jedna od njih je svakako cijena, jer su kvalitetni senzori najskuplje komponente SAU-a. Takođe, sa sensorima dolaze i šumovi, odnosno unošenje netačnosti u sistem upravljanja.

# Statičke konstante greške

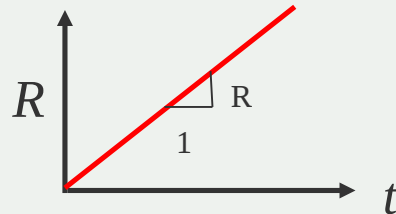
Prilikom dizajna SAU-a obično treba specificirati zahtjeve koje sistem treba da zadovolji. Zahtjevi za ponašanjem sistema u stacionarnom stanju se najčešće specificiraju vidu željene greške u stacionarnim stanju za testne referentne signale, a češće u vidu statičkih konstanti greški, koje takođe nose informaciju o tačnosti rada sistema u stacionarnom stanju.



Ispod su dati testni signali za koje treba utvrditi ponašanje sistema.

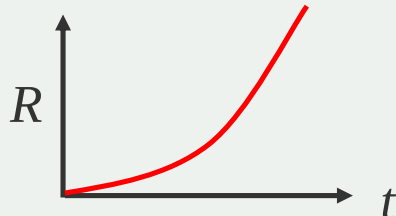
*Step funkcija*

$$r(t) = Ru(t) \quad R(s) = \frac{R}{s}$$



*Rampa funkcija*

$$r(t) = Rtu(t) \quad R(s) = \frac{R}{s^2}$$

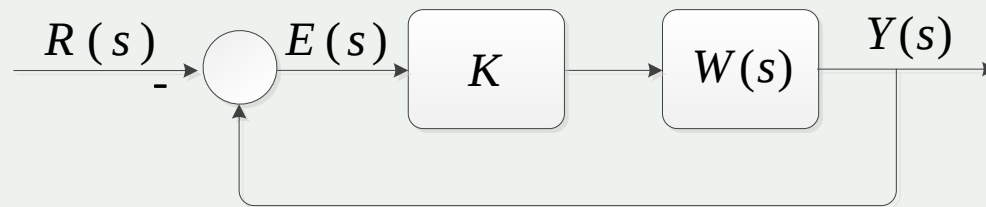


*Parabolična funkcija*

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2}u(t) \quad R(s) = \frac{R}{s^3}$$

# Statičke konstante greške

Statičke konstante se definišu za sisteme sa jediničnom povratnom spregom, jer na toj šemi  $E(s)$  predstavlja razliku između referentne i željene vrijednosti. Sve komplikovanije strukture se mogu svesti na ovakvu šemu.



Signal greške  $E(s)$  u  $s$  domenu i njegova krajnja vrijednost u vremenskom domenu su jednaki:

$$E(s) = R(s) - G(s)R(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + KW(s)} R(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + KW(s)} R(s)$$

# Konstanta položaja

Od sistema upravljanja se često zahtijeva da se izlazni signal drži na nekoj zadatoj konstantnoj vrijednosti. Na primjer, SAU nekad treba da održava konstantnu temperaturu, pritisak, brzinu ili da zauzme neku zadatu poziciju u prostoru (ugaonu ili linearnu). Iz tog razloga se kao jedan od testnih signala usvaja step funkcija. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal step funkcija  $Rh(t)$  je:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + KW(s)} \frac{R}{s} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} KW(s)} = \frac{R}{1 + K_p}.$$

Vrijednost  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KW(s)$  se zove **konstanta položaja** ili **poziciona konstanta**, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za konstantne referentne signale (greška u pozicioniranju kod pozicionih SAU-a). Napomenimo, da je u ovom razmatranju u direktnoj grani pored procesa postoji i regulator  $K$ , da bi se naznačilo da se poziciona konstanta može podešavati. Odnosno, u direktnu granu se mogu ubaciti potrebni elementi u cilju podešavanja pozicione konstante SAU-a na željenu vrijednost.

# Konstanta položaja

Greška SAU-a sa jediničnom povratnom spregom zavisi od **tipa funkcije povratnog prenosa**. Ako funkcija povratnog prenosa nema astatizam onda za nju kažemo da je **tipa 0**. Ukoliko funkcija povratnog prenosa ima astatizam prvog reda, onda se radi o sistemu **tipa 1**, odnosno o sistemu **tipa 2**, ako funkcija prenosa ima astatizam drugog reda, i tako dalje.

Napomenimo još jednom da pod funkcijom povratnog prenosa nazivamo funkciju prenosa u otvorenoj sprezi. Ako je spregnut samo objekat bez regulatora, onda je funkcija povratnog prenosa jednaka funkciji prenosa objekta  $W(s)$ . Dodavanjem regulatora  $C(s)$  mi u stvari modifikujemo funkciju povratnog prenosa, njen tip i konstantu položaja, odnosno nova funkcija povratnog prenosa je  $C(s)W(s)$ .

Kako smo konstantu položaja definisali kao graničnu vrijednost funkcije povratnog prenosa kada  $s$  teži nuli, jasno je da njena vrijednost zavisi od reda astatizma. Kod sistema nultog tipa konstanta položaja ima konačnu vrijednost, pa samim tim SAU sa jediničnom povratnom spregom prati konstantni referentni signal sa konačnom greškom. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatizam bilo kojeg reda, greška SAU-a u praćenju referentnog konstantnog signala je jednaka nuli.

# Konstanta brzine

Od sistema upravljanja se nekad zahtijeva da prati referentni signal koji linearno raste. Iz tog razloga se kako jedan od testnih signala usvaja rampa funkcija, odnosno pomoću nje se testira sposobnost sistema da razvije neku brzinu. Primjer takvog SAU-a je antenski sistem koji treba da se okreće konstantom brzinom i prati satelit koji se rotira oko zemlje, ili sistem sa solarnim panelima koji u toku dana treba da prati pomjeraj sunca, kako bi si maksimalno iskoristila sunčeva energija. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal rampa funkcija  $Rth(t)$  je:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + KW(s)} \frac{R}{s^2} = \frac{R}{s + \lim_{s \rightarrow 0} sKW(s)} = \frac{R}{K_v}.$$

Vrijednost  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKW(s)$  se zove **konstanta brzine**, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za linearno rastuće referentne signale (greška SAU-a u praćenju zadate brzine). Konstanta brzine je jednaka 0, ukoliko je funkcija povratnog prenosa tipa 0, što znači da takvi sistemi ne mogu da prate referentnu brzinu. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatizam prvog reda konstanta brzine je konačna, odnosno ona je jednaka beskonačno kod sistema koji imaju astatizme višeg reda.

# Konstanta ubrzanja

Ako se od sistema upravljanja zahtijeva da prati referentni signal koji ima neko konstantno ubrzanje, onda kao testni signal treba usvojiti parabolični signal. Jedan primjer takvog SAU-a bi bio radarski sistem koji treba da prati projektil koji razvija neko ubrzanje. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal parabolična funkcija  $Rt^2/2h(t)$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + KW(s)} \frac{R}{s^3} = \frac{R}{s^2 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2 KW(s)} = \frac{R}{K_a}.$$

Vrijednost  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} sKW(s)$  se zove **konstanta ubrzanja**, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za parabolične referentne signale (greška SAU-a u praćenju zadatog ubrzanja). Konstanta ubrzanja je jednaka 0, ako je funkcija povratnog prenosa tipa 0 ili 1, i takvi sistemi ne mogu da razviju željeno ubrzanje. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatizam drugog reda konstanta ubrzanja je konačna, odnosno takvi sistemi prate parabolične referentne signale sa nekom konačnom greškom. Na kraju, ako sistem koji je spregnut jediničnom povratnom spregom ima astatizam trećeg ili većeg reda, tada je konstanta ubrzanja beskonačna.

# Statičke konstante greške SAU-a

Ispod su date vrijednosti statičkih konstanti greški i vrijednosti grešaka u stacionarnom stanju, za različite testne signale i tipove sistema.

$$C(s)W(s) = \frac{k(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_m s)}{s^j(1 + \tau_{d1} s)(1 + \tau_{d2} s) \dots (1 + \tau_{dn} s)}$$

*step    rampa    parabola*

| Tip ( $j$ ) | $K_p$    | $K_v$    | $K_a$    | $e(\infty)$        | $e(\infty)$     | $e(\infty)$     |
|-------------|----------|----------|----------|--------------------|-----------------|-----------------|
| 0           | $k$      | 0        | 0        | $\frac{1}{1 + Kp}$ | $\infty$        | $\infty$        |
| 1           | $\infty$ | $k$      | 0        | 0                  | $\frac{1}{K_v}$ | $\infty$        |
| 2           | $\infty$ | $\infty$ | $k$      | 0                  | 0               | $\frac{1}{K_a}$ |
| 3           | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0                  | 0               | 0               |

# Primjer – sistem nultog tipa

Na slici je prikazan SAU čiji je zadatak praćenje referentne konstantne pozicije. Odrediti konstante greške i grešku u stacionarnom stanju, ako je ulazni signal jediničana step funkcija. Odrediti pojačanje  $K$  koje treba dodati u direktnoj grani tako da greška u praćenju step funkcije bude 0.01. Kolika je nova konstanta položaja sistema?

Konstanta položaja sistema je:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = 9$$

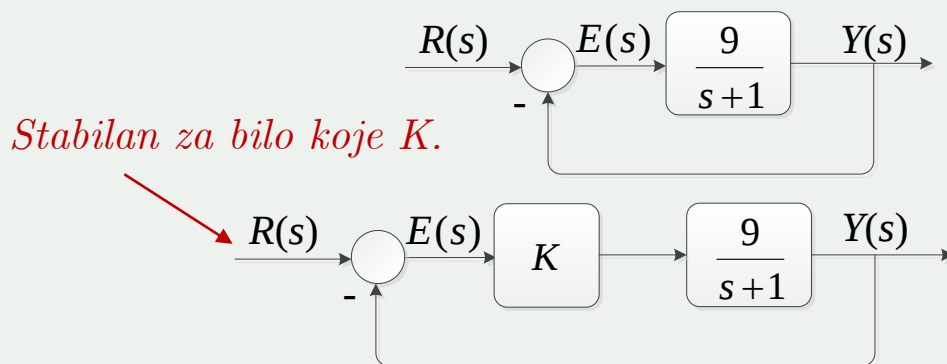
dok je greška jednaka:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+9} = 0.1.$$

Kako je željena greška sistema  $e^*(\infty) = 0.01$ , u direktnu granu treba dodati pojačanje da bi se ta greška smanjila. Iz uslova:

$$e^*(\infty) = 0.01 = \frac{1}{1+K_p^*} \quad \text{se dobija da je željena konstanta pojačanja } K_p^* = 99,$$

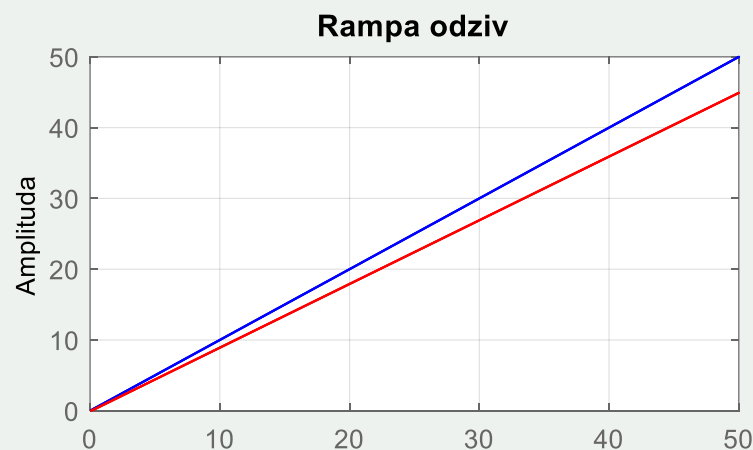
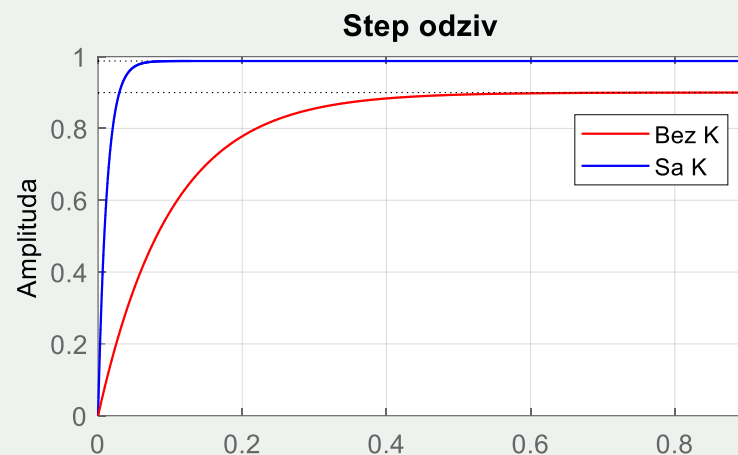
odnosno u direktnoj grani treba dodati pojačanje  $K=99/9=11$ . Konstante brzine u ubrzanja su jednake nuli.



# Primjer – sistem nultog tipa

Na prvoj slici je prikazan step odziv spregnutih sistema bez pojačanja i sa pojačanjem (kompenzovani). Može se uočiti da je u drugom slučaju ispunjen zahtjev sa željenom greškom. Na drugoj slici je prikazan odziv sistema na rampa funkciju. Kako sistem u otvorenoj sprezi nema astatizam, spregnuti sistem ne može da prati referentni signal.

```
>> s=tf('s');  
>> W=9/(s+1);  
>> G=feedback(W,1);  
>> step(G), hold on  
>> G1=feedback(9*W,1);  
>> step(G1,'r'), figure(2)  
>> step(1/s,'b'), % referenti signal  
>> hold on  
>> step(G/s,'r') % odziv na rampu
```



# Primjer – sistem prvog tipa

Odrediti statičke konstante greške za SAU prikazan na slici. Nakon toga, odrediti grešku u stacionarnom stanju za tri ulazna signala:  $2h(t)$ ,  $2th(t)$  i  $2t^2h(t)$ .

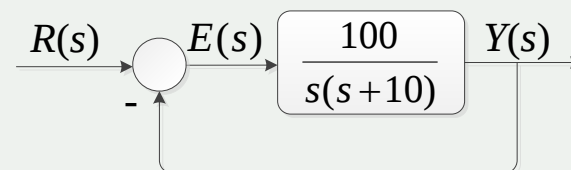
Pošto sistem ima astatizam u otvorenoj sprezi, bez računanja možemo zaključiti da su konstante položaja i ubrzanja jednake:  $K_p = \infty$  i  $K_a = 0$ . Samim tim greške u praćenju konstantnog i paraboličnog referentnog signala su 0 i  $\infty$ , respektivno.

Konstanta brzine je jednaka:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s(s+10)} = 10.$$

Greška u praćenju signala  $2th(t)$  je konačna i iznosi:

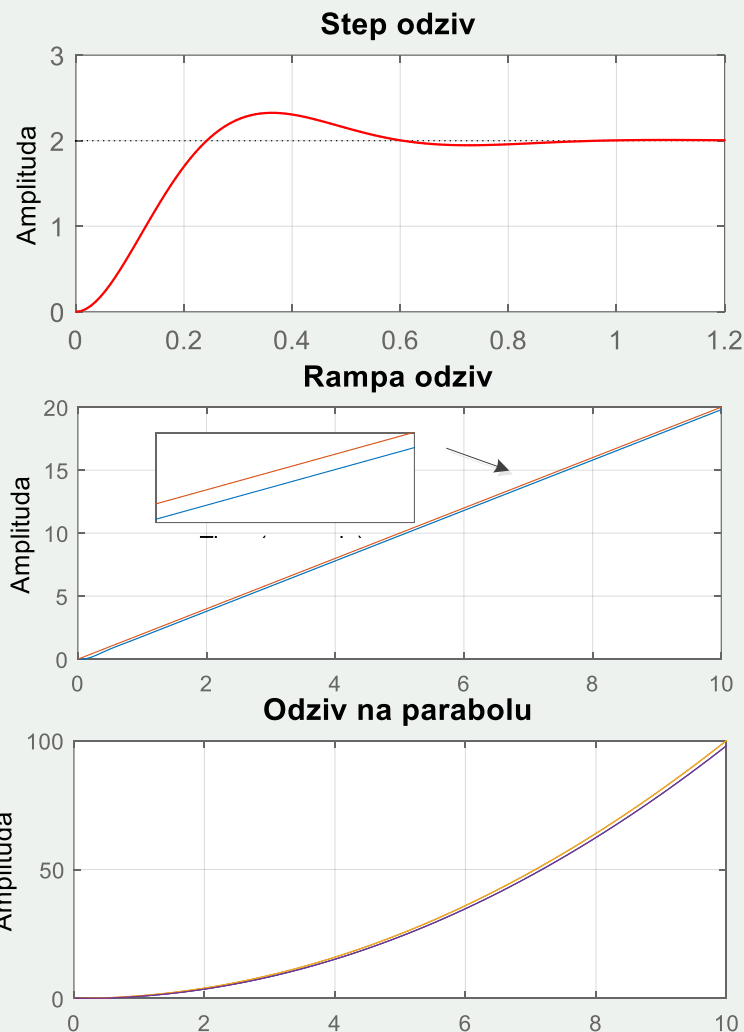
$$e(\infty) = \frac{2}{K_v} = 0.2.$$



# Primjer – sistem prvog tipa

Na slikama je prikazan step odziv spregnutog sistema za step, rampa i parabolni ulaz, respektivno. Može se uočiti da sistem dostiže zadatu step komandu bez greške, dok postoji konačna greška u praćenju rampa funkcije. Sistem ne može da prati parabolni ulaz, odnosno signal greške će konvergirati ka beskonačnosti u trećem slučaju.

```
>> s=tf('s');  
>> W=100/s/(s+10);  
>> G=feedback(W,1);  
>> step(2*G), figure(2)  
>> step(2/s*G,10), hold on  
>> step(2/s,10), figure(3)  
>> step(2/s^2*G,10), hold on  
>> step(2/s^2,10)
```



# Nejedinična povratna sprega

---

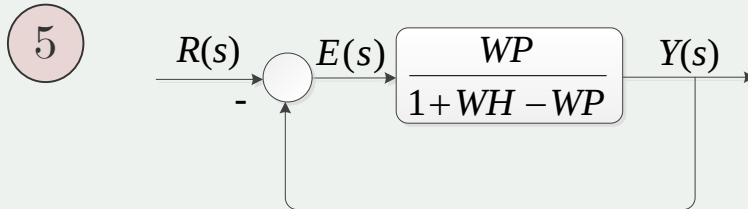
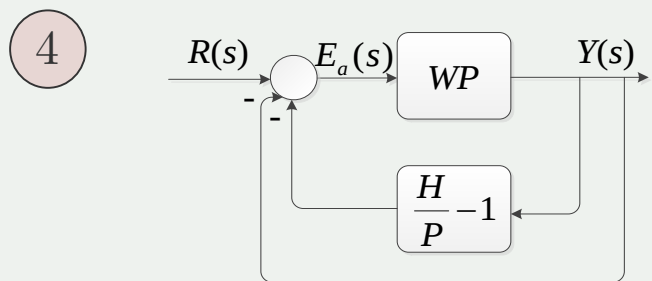
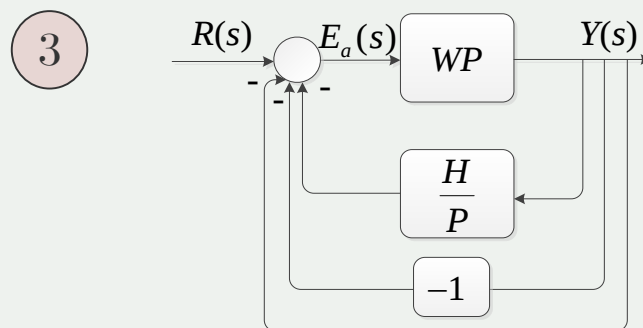
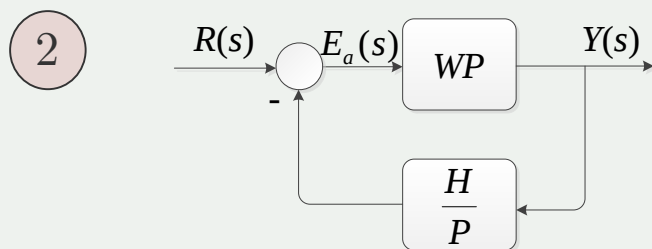
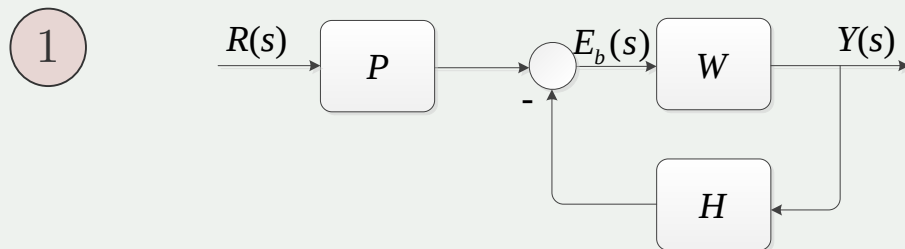
SAU obično nema jediničnu povratnu spregu, iz razloga što senzor ne mora biti idealan, već može imati neko pojačanje ili čak dinamiku. Takođe, nekad se u povratnoj grani se može ubaciti komponenta koja vrši obradu i prilagođenje mjenog signala. Pored toga, mogu postajati i komponente koje vrše prilagođenje referentnog signala (vidjećemo kasnije da je ta komponenta u stvari potencijometar kod servomehanizama). Kod ovakvih SAU-a izlaz iz sabirača (signal greške) ne predstavlja stvarni signal greške, odnosno ne predstavlja razliku između referentnog i stvarnog izlaznog signala. Da bi se analizirao stvarni signal greške, definisale konstante greške i odredio tip funkcije povratnog prenosa, SAU se prvo mora svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.

Jedan način za svođenje SAU-a na jediničnu (negativnu) povratnu spregu je taj što će se prvo pronaći funkcije prenosa čitavog sistema  $G(s)$ , a nakon toga se funkcija povratnog prenosa računa na osnovu relacije:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)}.$$

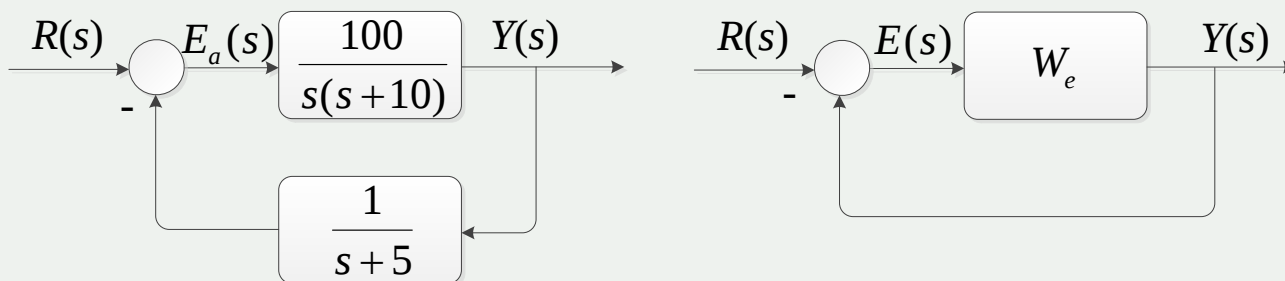
Drugi način je prikazan na narednom slajdu.

# Nejedinična povratna sprega



# Primjer – nejedinična povratna sprega

Za SAU prikazan na slici odrediti onu konstantu greške koja ima konačnu vrijednost i odgovarajuću grešku u stacionarnom stanju.



SAU treba prvo svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.

Funkcija prenosa sistema je:

$$G(s) = \frac{W}{1 + WP} = \frac{100s + 500}{s^3 + 15s^2 + 50s + 100}$$

$$W_e(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{100s + 500}{s^3 + 15s^2 - 50s - 400}$$

Konstanta položaja je  $-5/4$ , a greška u praćenju step funkcije iznosi  $-4$ .

```
>> syms s
>> W=100/s/(s+10);
>> H=1/(s+5);
>> G=simplify(W/(1+W*H))
>> >> W=simplify(G/(1-G))
W = -(100*s + 500)/(- s^3 -
15*s^2 + 50*s + 400)
```

# Osjetljivost SAU-a

---

Proces, predstavljen funkcijom prenosa  $W(s)$ , bez obzira na svoju prirodu (fiziku, strukturu) je podložan uticajima promjenljive okoline, starenja, promjeni (nepoznavanju) stvarnih vrijednosti parametara i drugim prirodnim uticajima koji utiču na upravljanje. Kod sistema bez povratne sprege svi ovi uticaji rezultiraju u promjeni izlaznog signala i netačnom radu sistema. Kod sistema sa povratnom spregom se ta promjena izlaznog signala registruje i automatski se mijenja upravljački signal u cilju korekcije i dovođenja izlaznog signala na željenu vrijednost. Iz navedenih razloga je **osjetljivost** SAU-a na promjene parametara sistema od primarnog značaja, a najveća prednost SAU sa povratnom spregom se ogleda u činjenici da oni redukuju tu osjetljivost.

Idealno bi bilo da sistem ima nultu osjetljivost na promjenu nekog parametra, što bi značilo da promjena tog parametra uopšte ne utiče na ponašanje sistema.

# Osjetljivost SAU-a

Na primjer, razmotrimo funkciju  $F=K/(K+a)$ . Za  $K=10$  i  $a=100$ , vrijednost funkcije je  $F=0.091$ . Ako se parametar  $a$  poveća na vrijednost 300, tada će vrijednost funkcije  $F$  biti 0.032. Odnosno, za promjenu parametra  $a$  za 200% posto, vrijednost funkcije  $F$  se promijeni za -65%.

Osjetljivost neke funkcije  $F$  na promjenu parametra  $P$  se upravo definiše kao odnos procentulane promjene funkcije  $F$  i procentualne promjene parametra  $P$ , ali za neko infinitezimalno  $P$ .

$$S_{F,P} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta F / F}{\Delta P / P} = \frac{P}{F} \frac{\partial F}{\partial P}$$

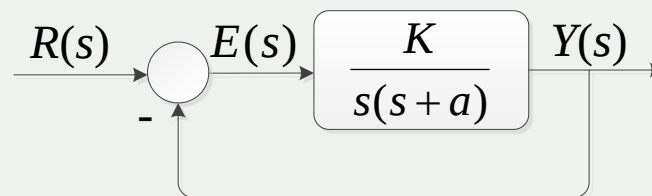
U praksi, ukoliko je osjetljivost neke karakteristike od interesa (na primjer greške) na promjenu nekog parametra velika, onda prilikom realizacije SAU-a treba kupiti kvalitetnije komponente - one kojima se parametri vremenom ne mijenjaju ili sporo mijenjaju.

# Primjer- osjetljivost SAU-a

Za SAU dat na slici, odrediti osjetljivost funkcije prenosa spregnutog sistema na promjenu parametra  $a$ . Kolika je osjetljivost sistema u otvorenoj sprezi?

Funkcija spregnutog prenosa je jednaka:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}.$$



Osjetljivost funkcije  $G$ , na promjenu parametra je po definiciji jednaka:

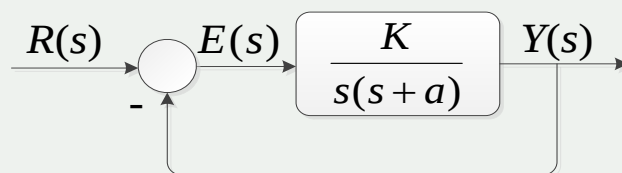
$$S_{G,a} = \frac{a}{G} \frac{\partial G}{\partial a} = -\frac{as}{s^2 + as + K}.$$

Posmatrajući dobijenu osjetljivost, može se zaključiti da se ona može smanjiti povećanjem pojačanja  $K$  u direktnoj grani.

```
>> syms s a K
>> W=K/s/(s+a)
>> G=simplify(W/(1+W))
G = K/(s^2 + a*s + K)
>> S=simplify(a/G*diff(G,a))
S = -(a*s)/(s^2 + a*s + K)
```

# Primjer- osjetljivost SAU-a

Za SAU prikazan na slici ispitati osjetljivost greške u stacionarnom stanju na promjene parametara  $a$  i  $K$ .



Konstanta brzine je jednaka  $K_v = \frac{K}{a}$ , dok je greška u stacionarnom stanju:

$$e(\infty) = \frac{a}{K}.$$

Osjetljivost greške u stacionarnom stanju na promjene parametara  $a$  i  $K$  je:

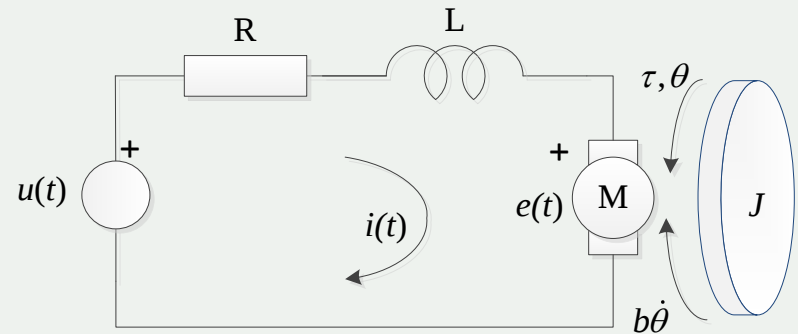
$$S_{e(\infty),K} = \frac{K}{e(\infty)} \frac{\partial e(\infty)}{\partial K} = -1 \quad S_{e(\infty),a} = \frac{a}{e(\infty)} \frac{\partial e(\infty)}{\partial a} = 1$$

Može se uočiti da parametri  $K$  i  $a$  ne utiču na osjetljivost greške. Rezultat -1 znači da je greška obrnuto proporcionalna parametru  $K$ , dok rezultat 1 ima značenje da je greška direktno proporcionalna parametru  $a$ .

# Upravljanje jednosmjernim motorom

Jednosmerni motor je mašina jednosmjerne struje koja pretvara električnu energiju u mehaničku. U njemu postoje dva nezavisna namotaja provodnika i shodno tome dva električna kola. Jedan namotaj

se nalazi na fiksnom dijelu motora i zato se zove namotaj statora, dok se drugi namotaj nalazi na dijelu motora koji rotira i zbog toga se naziva namotaj rotora. Mi ovdje nećemo ulaziti u konstrukcijske detalje jednosmernih motora, već ćemo princip rada objasniti na osnovu principijelne šeme prikazane na slici. Struja koja protiče kroz namotaje statora  $i_s(t)$  generiše elektromagnetno polje u unutrašnjosti motora i u prvoj aproksimaciji možemo smatrati da je fluks ovog polja direktno proporcionalan jačini struje, odnosno:  $\Phi(t) \sim k i_s(t)$  druge strane, kako je na krajeve rotora priključen jednosmjerni napon, on će u kolu rotora (koje je takođe modelirano rednom vezom otpornosti  $R$  i induktivnosti  $L$ ) izazvati postojanje struje  $i(t)$ .



# Upravljanje jednosmjernim motorom

Proticanje električne struje kroz namotaje rotora, pri čemu se cio rotor nalazi u prostoru u kome postoji elektromagnetno polje fluksa  $\Phi(t)$  uzrokuje pojavu pokretačkog momenta koji će težiti da pokrene

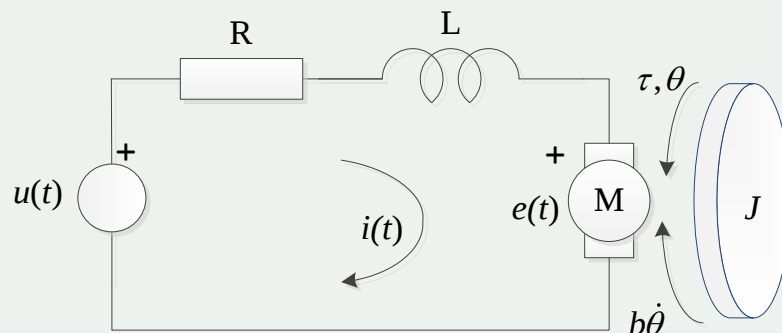
rotor. Vrijednost ovog pokretačkog momenta je proporcionalna proizvodu fluksa i jačini struje:

$$\tau(t) \sim \Phi(t)i(t) = k_m i(t).$$

Konačno, usled obrtanja rotorskog namotaja ugaonom brzinom  $\omega$  u prostoru u kome postoji elektromagnetno polje, na krajevima namotaja rotora indukuje se elektromotorna sila koja je proporcionalna brzini obrtaja osovine rotora i fluksu elektromagnetnog polja:

$$e(t) \sim \Phi(t)\omega(t) = k_m \omega(t).$$

Ova indukovana elektromotorna sila se često naziva kontra-elektromotornom silom, jer je njen polaritet uvijek takav da se suprotstavlja naponu koji izaziva struju kroz namotaj.



# Upravljanje jednosmjernim motorom

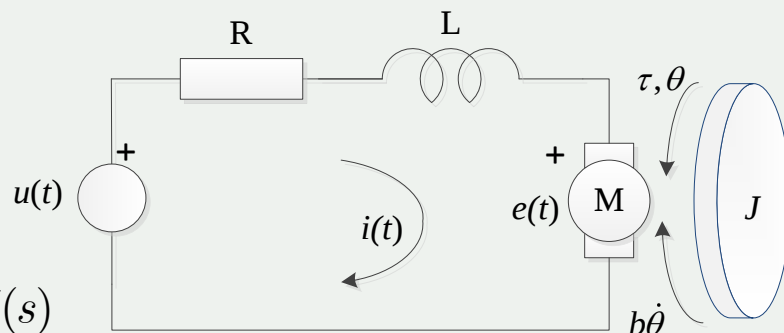
Na osnovu prethodnih razmatranja i principijelne šeme motora mogu se napisati sljedeće jednačine:

$$J\dot{\omega} + b\omega = k_m i$$

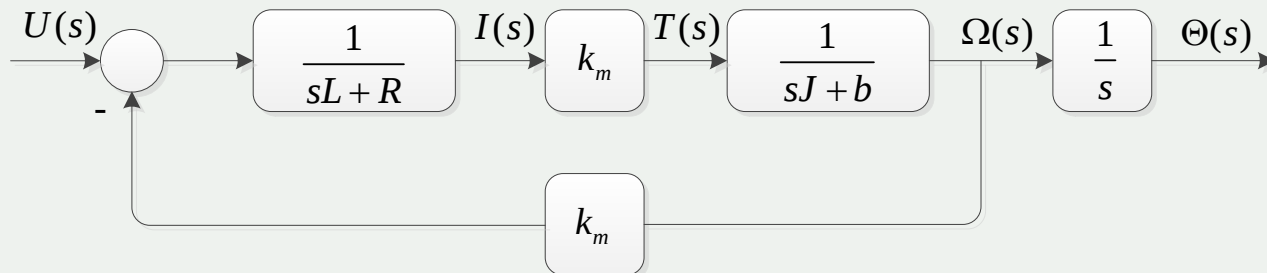
$$L \frac{di}{dt} + Ri = u - k_m \omega$$

$$(Js + b)\Omega(s) = k_m I(s)$$

$$(Ls + R)I(s) = U(s) - k_m \Omega(s).$$



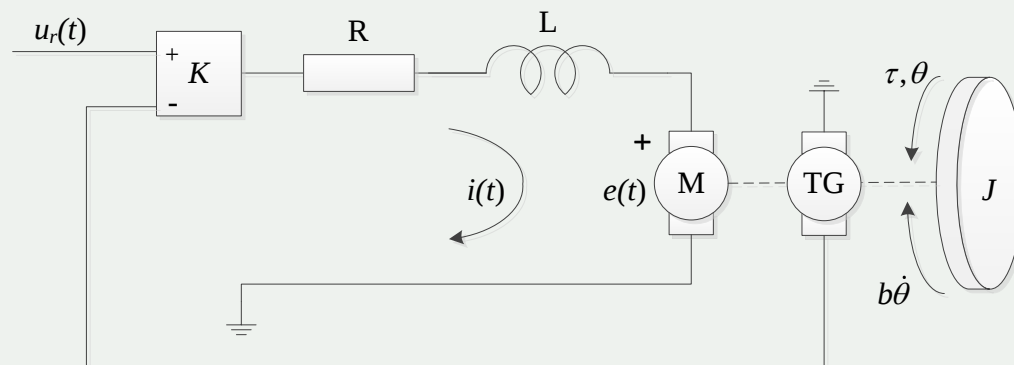
Na osnovu jednačina u Laplasovom domenu, može se nacrtati strkutni blok dijagram motora. Ugaoni pomjeraj je jednak integralu ugaone brzine.



Funkcija prenosa sistema je jednaka:  $G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k_m}{JLs^2 + (bL + JR)s + bR + k_m^2}.$

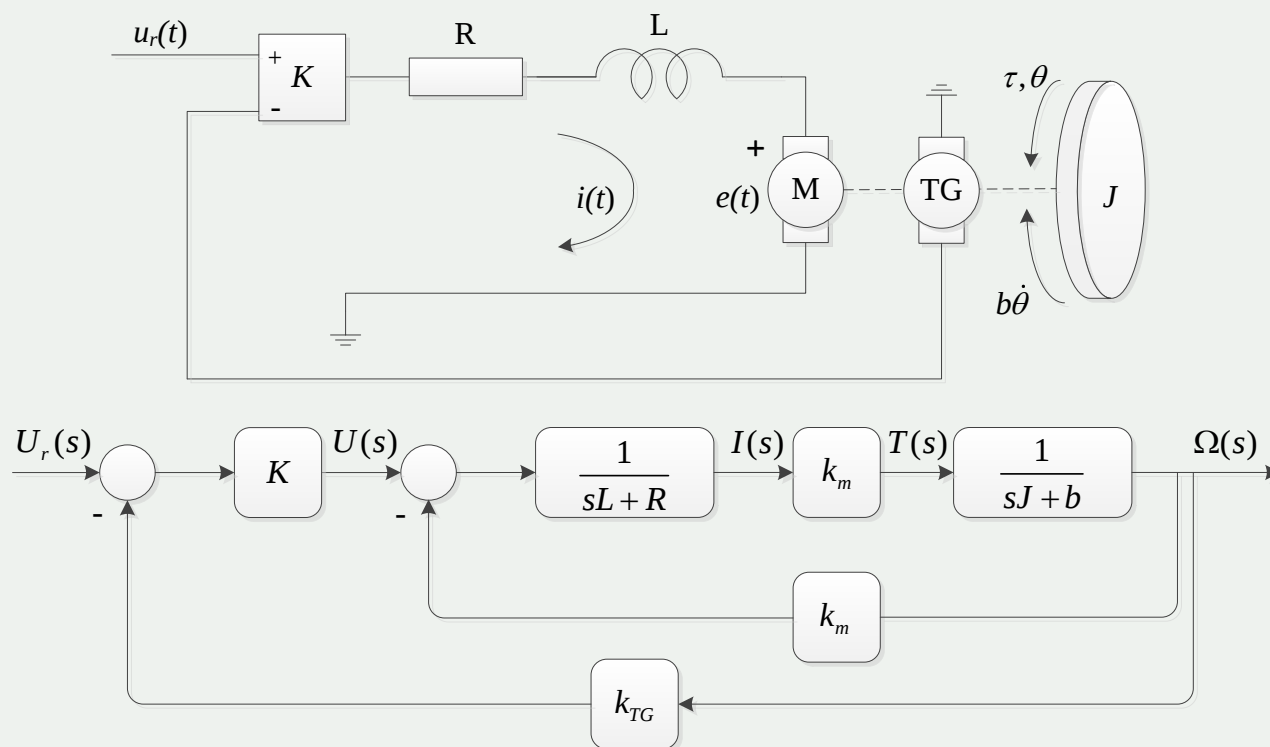
# Brzinski servomehanizam

Brzinom motora se može upravljati u otvorenoj sprezi. Ulazni napon, odnosno upravljački signal treba proračunati na osnovu poznatog modela motora i željene brzine. Međutim, bilo kakva varijacija u parametrima modela ili poremećaj dovešće do odstupanja od željene izlazne brzine. Ukoliko želimo da u cilju poboljšanja kvaliteta rada sistema, ugradimo negativnu povratnu spregu, neophodno je da upotrijebimo uređaj koji će mjeriti brzinu okretanja osovine rotora i da tu izmjerenu vrijednost vratimo u cilju korekcije napona rotora. Takav uređaj postoji i naziva se **tahogenerator**. Vrlo je jednostavan i on na svom izlazu generiše naponski signal koji je proporcionalan brzini okretanja osovine. Principijelna šema takvog sistema prikazana je na slici ispod. Referentni signal se zadaje u vidu željenog napona, jer tahogenerator mjerenu brzinu konvertuje u naponski veličinu. Ova razlika se dovodi na ulaz diferencijalnog pojačavača, pojačanja  $K$ .



# Brzinski servomehanizam

Na slici ispod je dat i strukurni blok dijagram sistema sa povratnom spregom. Sa je  $k_{TG}$  označena konstanta proporcionalnosti tahogeneratora ( $u = k_{TG}\omega$ ). Sistemi automatskog upravljanja kod kojih se reguliše brzina ili pozicija nekog mehanizma koji pokreće motor u literaturi se često mogu sresti i pod nazivom **servomehanizmi** (serve – služiti).



# Primjer - brzinski servomehanizam

Za neke vrijednosti parametara, funkcija prenosa motora je jednaka:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{0.0384 s + 0.64}.$$

Napomena: kada ja induktivnost namotoja mala, ona se može zanemariti, pa se DC motor može modelovati kao proces prvog reda.

Ako se vrši upravljanje brzinom i ako je konstanta tahogeneratora jednaka jedinici:

- a) Ispitati koliko pojačanje se smije unijeti u direktnu granu, a da spregnuti sistem bude stabilan.
- b) Koliki napon treba dovesti na ulaz motora da bi se on okretao brzinom od 0.5 rad/s?
- c) Ako se po brzini zatvori povratna sprega, kako greška u praćenju referentnog signala vrijednosti 0.5 rad/s zavisi od vrijednosti pojačavača? Pretpostavimo da se ovaj signal pomoću potencijometra pretvara u referentni napon od 0.5V.
- d) Odrediti pojačanje  $K$  tako da signal greške bude jednak 0.1 rad/s. Kolika je vrijednost upravljačkog signala u ovom slučaju?
- e) Kako poremećaj od 0.1V utiče na grešku sistema? Kako pojačanje utiče na ovu grešku?

# Primjer - brzinski servomehanizam

- a) Na osnovu Nikvistove krive se dobija da će sistem biti stabilan za bilo koje pojačanje iz opsega  $(-32.0513, \infty)$ .
- b) Pojačanje motora je 0.0313, što znači da u otvorenoj sprezi na njegov ulaz treba dovesti napon  $0.5 / 0.0313 = 16$  V, da bi se vratilo rotiralo brzinom 0.5 rad/s.
- c) Signal greške je jednak:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + KW(s)} = \frac{0.5}{1 + 0.0313K}$$

- d) Izjednačavanjem gornjeg izraza sa 0.1, dobija se da je  $K = 127.7955$

Upravljački signal je jednak  $u(\infty) = Ke(\infty) = 12.7796$  V. Primijetimo ako ovaj napon primijenimo na motor u otvorenoj sprezi, brzina motora će biti jednaka 0.4 rad/s.

- e) Poremećaj generalno povećava grešku (po apsolutnoj vrijednosti).

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + KW(s)} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s)D(s)}{1 + KW(s)} = \frac{0.5}{1 + 0.0313K} - \frac{0.1 \times 0.0313}{1 + 0.0313K}$$

# Pozicioni servomehanizam

Ukoliko želimo da upravljamo pozicijom motora pomoću povratne sprege potreban nam je senzor za mjerenje ugaone pozicije vratila. Jedan od često korišćenih senzora je potencijometar, koji u stvari predstavlja pretvarač ugaone pozicije motora u naponski signal.

Princip rada potencijometra je vrlo jednostavan. Dugačak provodnik otpornosti  $R$  namotan na torusnu podlogu, pri čemu je jedan kraj vezan za jednosmjerni napon, dok je drugi kraj provodnika uzemljen. Po unutrašnjosti potencijometra, vezan za osovinu koja može da rotira, kreće se klizač i zavisno od njegove pozicije, napon na kraju osovine  $v_{out}$  se mijenja. Što je ugao veći, klizač je bliži jednosmjernom izvoru napona, pa je i napon na klizaču veći:

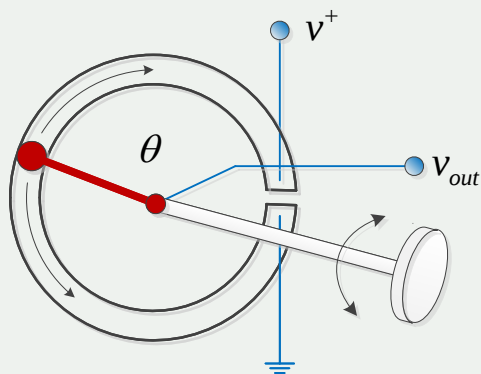
$$v_{out} = \frac{R_{\theta}}{R} v^+ = \frac{\frac{\theta}{2\pi} R}{R} v^+ = \frac{v^+}{2\pi} \theta = k_p \theta$$

Drugim rečima, veza između napona na izlazu potencijometra i ugaone pozicije osovine je linearna, sa nekom konstantom proporcionalnosti  $k_p$ .

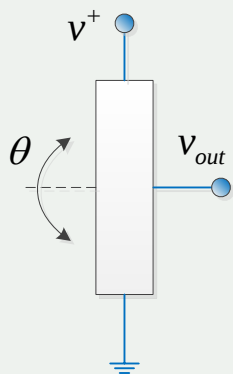
# Pozicioni servomehanizam

Na slici a) ispod je ilustrovan princip rada potencijometra. Slika b) predstavlja simbol potencijometra koji ćemo koristiti na principijelnim šemama, dok je na slici c) prikazana karakteristika potencijometra. Na slici d) je prikazan blok dijagram potencijometra.

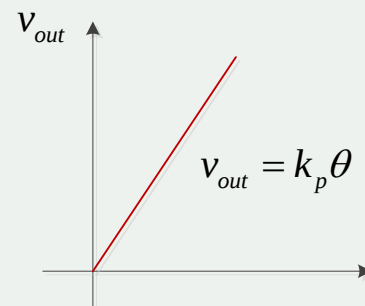
Mana potencijometra je što omogućava mjerenje ugla u rasponu do jednog punog kruga. Pa, samim tim na ovaj način možemo da upravljamo pozicijom samo u tom opsegu. Postoje razne vrste senzora ugaone pozicije. Ovdje je usvojen potencijometar iz razloga da bi se studentima približio koncept mjerenja izlaza i zatvaranja sprege.



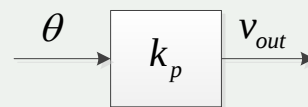
a)



b)



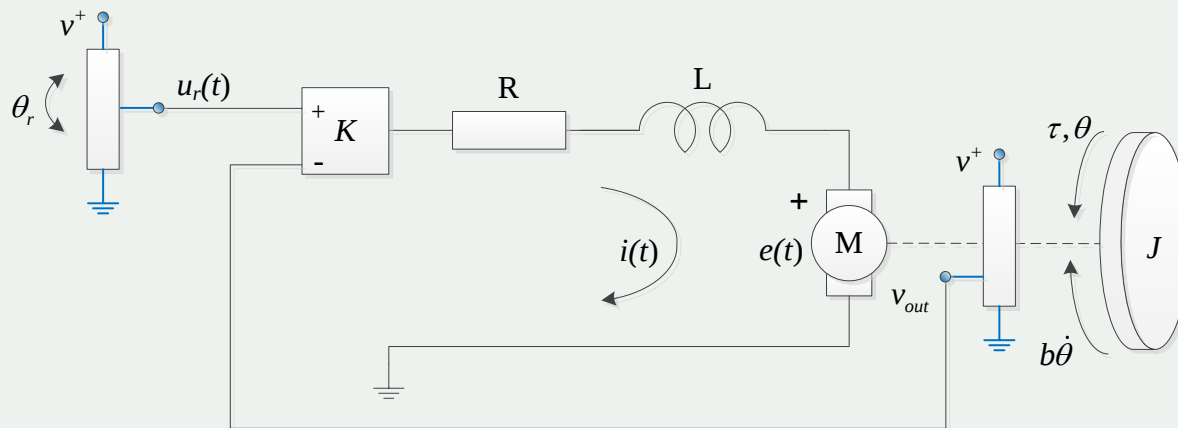
c)



d)

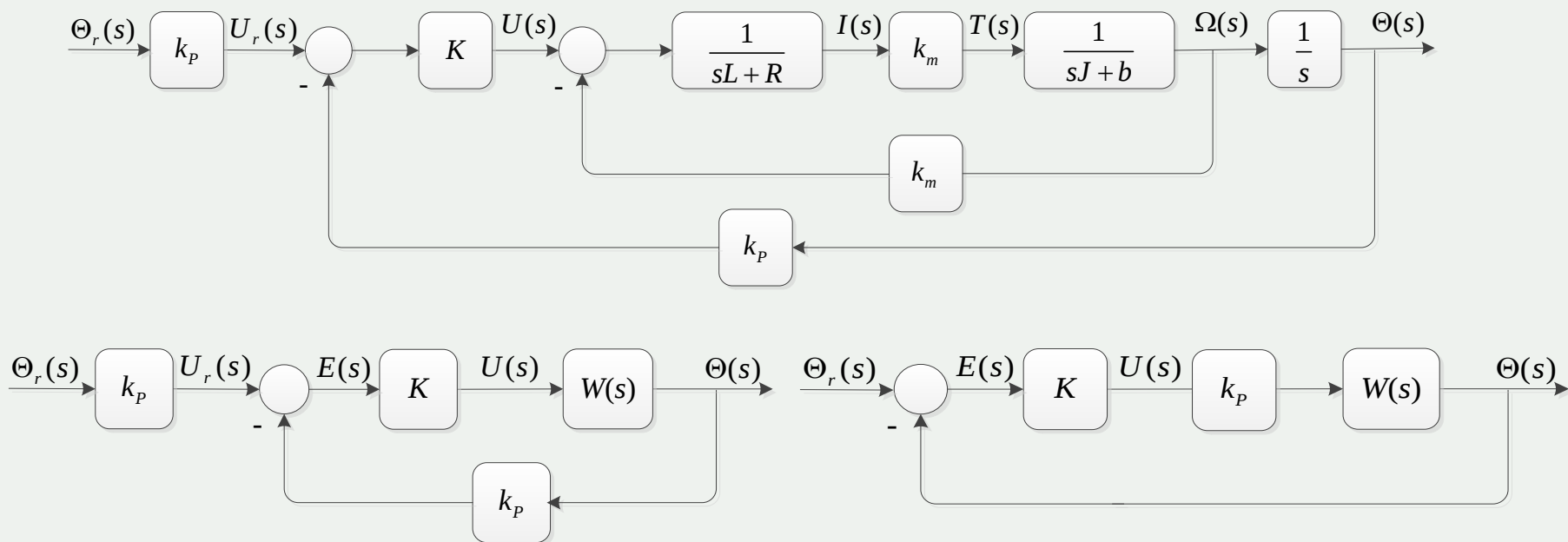
# Pozicioni servomehanizam

Principijelna šema pozicionog servomehanizma je prikazana na slici ispod. Dakle, na vratilo motora treba postaviti potencijometar. Kako se motor rotira, na izlazu potencijometra ćemo dobiti informaciju o veličini ugla rotacije u vidu naponskog signala. Referentni signal i mjereni signal se vode na ulaz diferencijalnog pojačavača, koji razliku između ova dva signala uvećava  $K$  puta. Referentni signal treba također zadati u vidu napona, a to se može odraditi također preko potencijometra koji ima istu karakteristiku kao potencijometar na motoru, kao bi poređenje pretvorenih veličina bilo ravnopravno.



# Pozicioni servomehanizam

Konačno, na slici ispod je prikazan strukturni blok dijagram pozicionog servomehanizma, koji se koristi za analizu sistema. Motor (aktuator) i opterećenje koje se rotira se može ekvivalentirati jednom funkcijom prenosa  $W(s)$ , a dalje se čitava šema može svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.



# Primjer - pozicioni servomehanizam

Za neke vrijednosti parametara, funkcija prenosa motora je jednaka:

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{s(0.0384s + 0.64)}.$$

Napomena: kada ja induktivnost namotoja mala, ona se može zanemariti, pa se DC motor može modelovati kao proces drugog reda (veza između napona i pozicije)

Ako se vrši upravljanje brzinom i ako je konstanta tahogeneratora jednaka jedinici:

- a) Ispitati koliko pojačanje se smije unijeti u direktnu granu, a da spregnuti sistem bude stabilan.
- b) Koliki napon treba dovesti na ulaz motora da bi se obnruo za ugao 30 rad?
- c) Ako se po poziciji zatvori povratna sprega, kako greška u praćenju referentnog signala vrijednosti 50 rad zavisi od vrijednosti pojačavača? Pretpostavimo da se ovaj signal pomoću potencijometra pretvara u referentni napon od 0.5V.
- d) Kako poremećaj od 0.1V utiče na grešku sistema? Kako pojačanje utiče na ovu grešku?