SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

Klasifikacija sistema
Diferencijalne jednačine
Funkcija prenosa
- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami
- Graf toka signala

Model u prostoru stanja
- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Analiza

Kontrolabilnost i opservabilnost
Stabilnost sistema
- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a
- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske karakteristike
- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema
Kompenzatori
- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator
Fizičke realizacije
Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 7

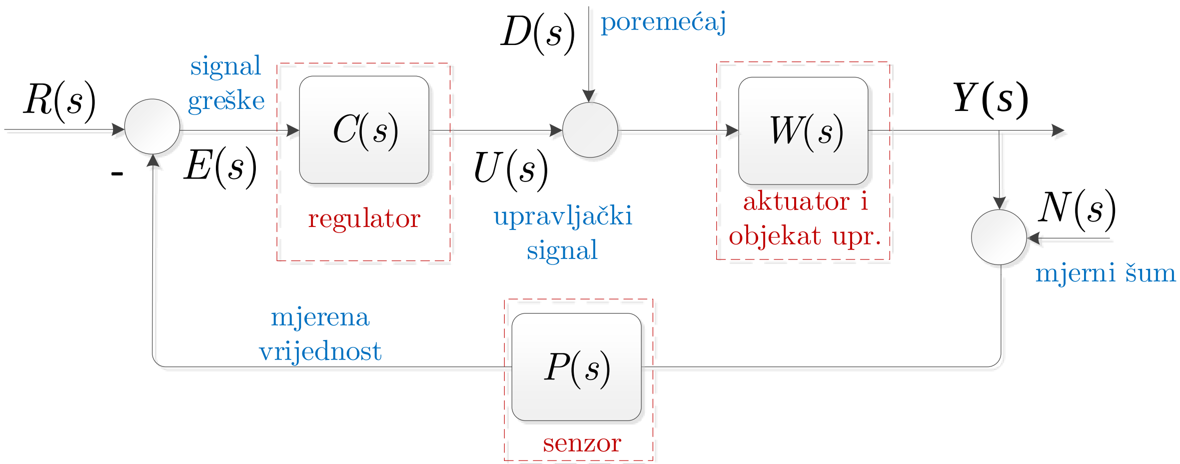
Performanse SAU-a: analiza stacionarnog stanja

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Razumiju uticaj pojačanja na grešku u stacionarnom stanju u uslovima poremećaja i mjernog šuma
- Definišu konstante greške SAU-a i grešku u stacionarnom stanju za različite tipove sistema
- Ispitaju osjetljivost SAU-a na neki parametar od interesa
- Nacrtaju principijelnu šemu i strukturni blok dijagram pozicionog u brzinskog servomehanizma

Osnovna regulaciona kontura

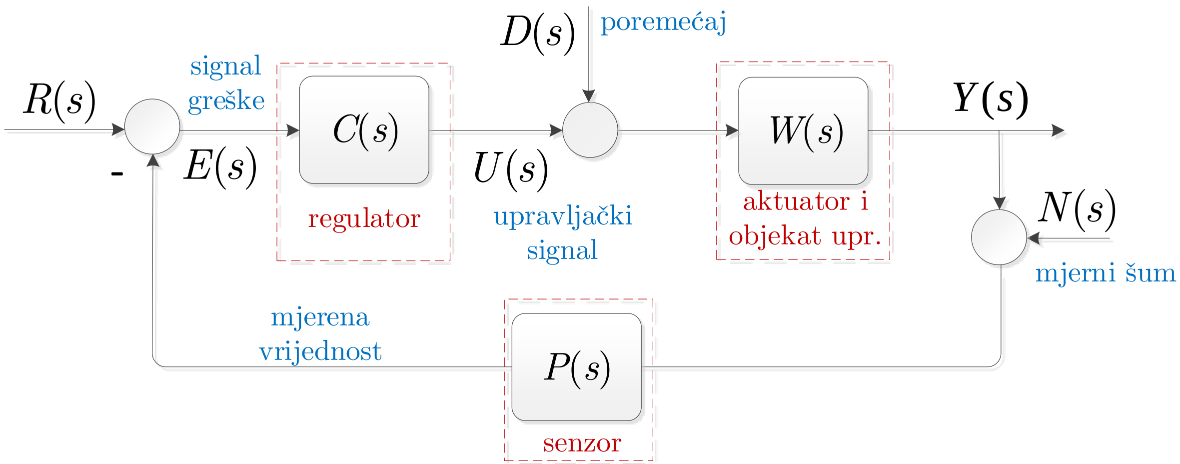


$$y(t) \cong r(t), \forall t$$

Nedostižni cilj SAU-a

Na slici je prikazana osnovna regulaciona kontura SAU-a. Cilj SAU-a je da izlazni signal što vjernije prati referentni signal. Odnosno, regulator koristi razliku između referentne i izmjerene vrijednosti izlaznog signala, na osnovu koje generiše upravljački signal $U(s)$, koji se dalje prosljeđuje aktuatoru i procesu. U nekim problemima upravljanja kao što su regulacija temperature, pritiska ili brzine, referentni signal je konstantan, pa SAU treba da drži izlazni signal na zadatu vrijednost. Sa druge strane, u drugoj, nešto komplikovanijoj klasi upravljačkih problema, referentni signal može da bude promjenljiv, i tada izlazni signal treba da se ponaša onako kako diktira referentni signal.

Osnovna regulaciona kontura

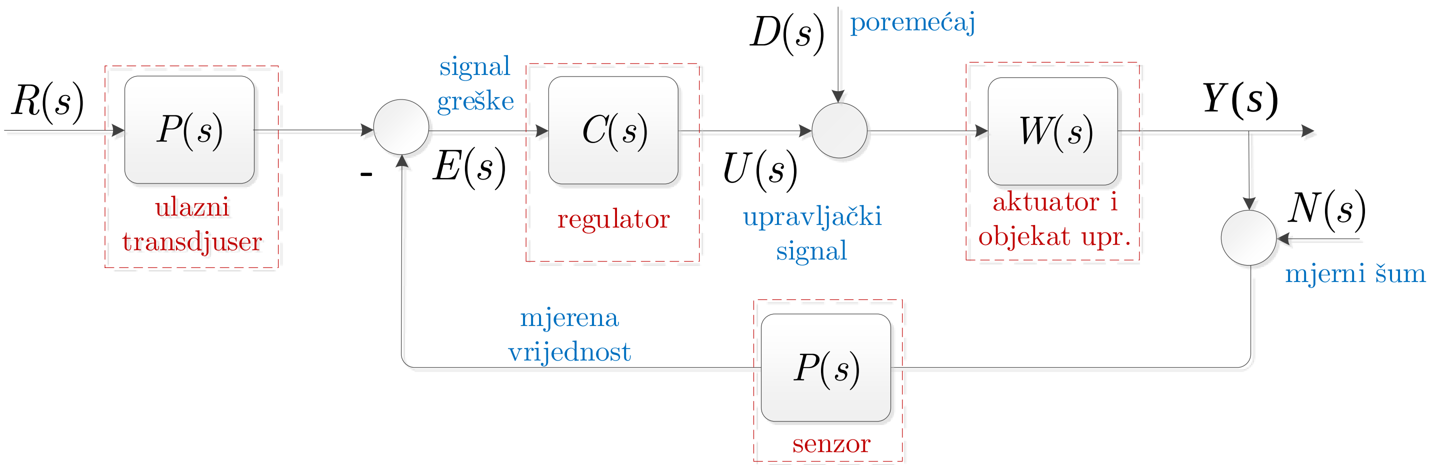


$$y(t) \cong r(t), \forall t$$

Nedostižni cilj SAU-a

Poremećaji su signali koji djeluju na proces, tj. signali koji utiču na vrijednost upravljane veličine, a koje ne možemo direktno da kontrolišemo. U ovoj šemi smo usvojili da poremećaj djeluje na ulaz procesa. Sa druge strane, mjerni šumovi predstavljaju greške u mjerenju upravljane veličine i najčešće su slučajne prirode. Ove greške su posljedica mjerne nesigurnosti samog senzora. S obzirom da su u ovoj šemi modelovani senzor i šum, treba napraviti razliku između signala greške koji obrađuje regulator: $E(s) = R(s) - P(s)Y(s) - P(s)N(s)$, i stvarne greške u praćenju referentnog signala: $E_{ry}(s) = R(s) - Y(s)$.

Osnovna regulaciona kontura

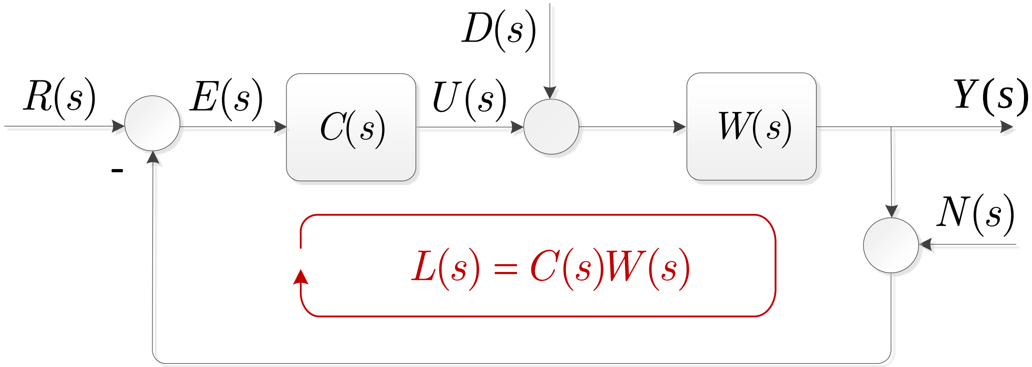


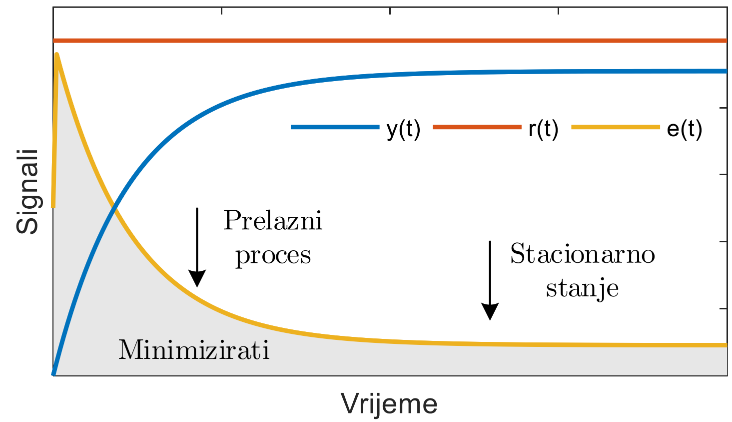
Jasno je da od tačnosti izmjerenog signala zavisi kvalitet upravljanja, jer regulator teži da minimizuje grešku koju on „vidi“. Iako u opštem slučaju senzor ima neku funkciju prenosa $P(s)$ (najčešće čisto pojačanje), to sa stanovišta upravljanja ne predstavlja problem, jer u tom slučaju referentni signal samo treba pomnožiti sa funkcijom prenosa senzora $P(s)$, kao što je prikazano na slici:

$$E(s) = P(s)R(s) - P(s)Y(s) - P(s)N(s) = P(s)(R(s) - Y(s) - N(s)).$$

Iz tog razloga ćemo u nastavku izlaganja smatrati da je $P(s)=1$.

Greška u praćenju referentnog signala





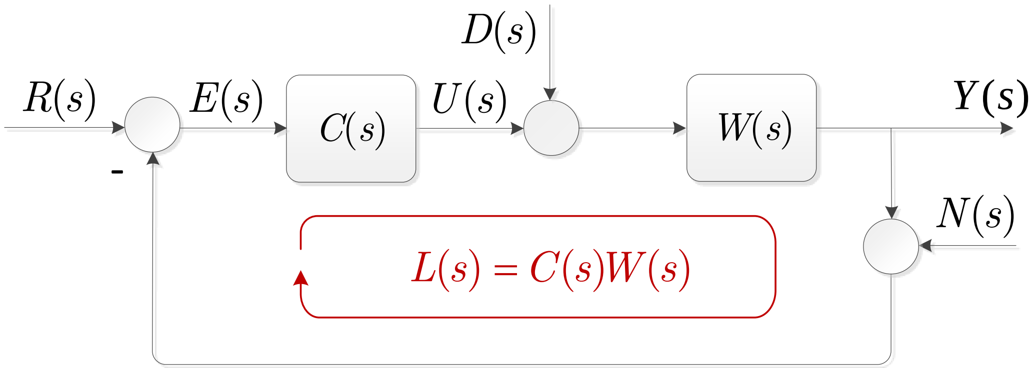
Da bi bolje razumjeli prirodu i benefite povratne sprege, posmatrajmo grešku sistema u praćenju referentnog signala. Primjenjujući princip superpozicije, dobija se vrijednost izlaznog signala:

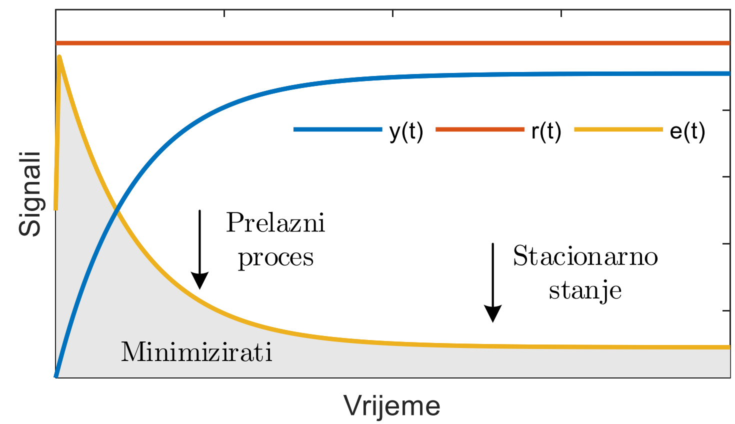
$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}R(s) + W(s)\frac{1}{1+L(s)}D(s) - \frac{L(s)}{1+L(\mathrm{s})}N(s).$$

Odnosno, greška u praćenju referentnog signala je jednaka:

$$E_{ry}(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) - \frac{W(s)}{1+L(s)}D(s) + \frac{L(s)}{1+L(\mathrm{s})}N(s).$$

Greška u praćenju referentnog signala





Karakteristična funkcija $F(s) = 1 + L(s)$ ima fundamentalnu ulogu u analizi SAU-a. Ako u zavisnosti od $F(s)$ definišemo funkciju osjetljivosti i funkciju komplamentarne osjetljivosti:

$$S(s) = \frac{1}{F(s)} \text{ i } S_c(s) = \frac{L(s)}{F(s)},$$

greška u praćenju referentnog signala se može zapisati na sljedeći način:

$$E_{ry}(s) = R(s) - Y(s) = S(s)R(s) - W(s)S(s)D(s) + S_c(s)N(s).$$

Greška u praćenju referentnog signala

Posmatranjem izraza za grešku u praćenju referentnog signala možemo uočiti da smanjivanjem funkcije osjetljivosti smanjujemo uticaj poremaćaja na upravljanje:

$$E_{ry}(s) = R(s) - Y(s) = S(s)R(s) - W(s)S(s)D(s) + S_c(s)N(s).$$

Međutim, treba uočiti da važi:

$$S(s) + S_c(s) = 1,$$

odnosno da ne možemo istovremeno funkciju osjetljivosti i funkciju komplamentarne osjetljivosti dovesti na nulu. Drugim riječima, ukoliko želimo da sistem učinimo robusnijim na poremećaje, istovremeno ćemo ga učiniti i manje robusnim na mjerne šumove.

Funkcija osjetljivosti zavisi od regulatora $C(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)W(s)P(s)},$$

odnosno, odabirom regulatora $C(s)$ možemo da utičemo na funkciju osjetljivosti.

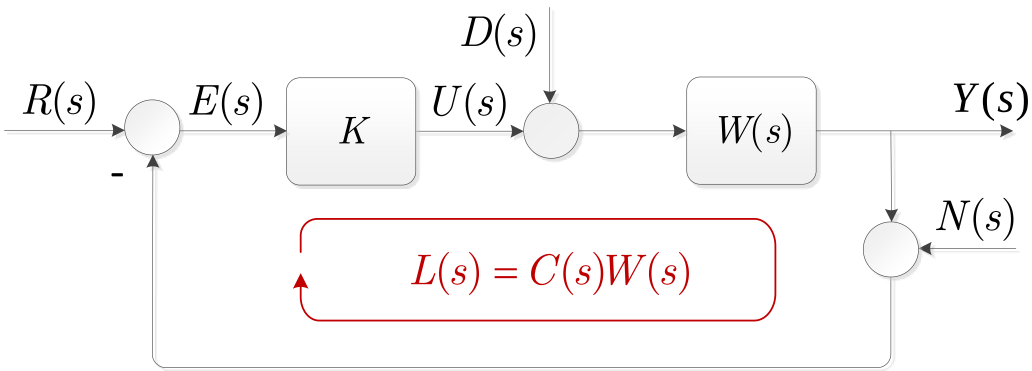
Greška u praćenju referentnog signala

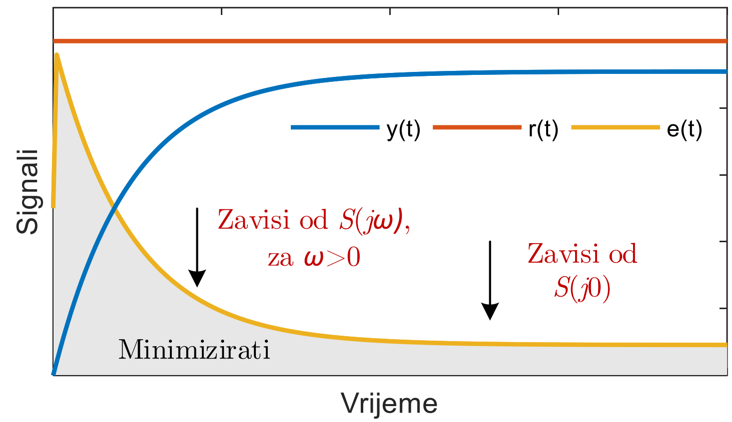
Izraz za grešku možemo posmatrati i u frekvencijskom domenu:

$$E_{ry}(j\omega) = R(j\omega) - Y(j\omega) = S(j\omega)R(j\omega) - W(j\omega)S(j\omega)D(j\omega) + S_c(j\omega)N(j\omega),$$

Funckija osjetljivosti $S(j\omega)$ je „mala“ tamo gdje njen moduo ima malu vrijednost. Jasno je da zbog poremećaja i šumova moramo praviti kompromis između funkcije osjetljivosti i funkcije komplamentarne osjetljivosti. Srećom, referentni signal i poremećaji obično imaju niskofrekvencijski sadržaj, dok šum najčešće napada sve frekvencije ω. Stoga kontroler $C(j\omega)$ treba dizajnirati tako da funkcija osjetljivosti ima malu vrijednost na nižim frekvencijama ω (tamo gdje je signal od interesa), odnosno treba je učiniti dovoljno velikom na visokim frekvencijama, kako bi mjerni šum bio potisnut. Frekvencijskom karakteristikom ćemo se baviti na nekom od narednih predavanja, dok ovdje samo iznosimo ideju o tome kako treba izvršiti dizajn regulatora $C(j\omega)$. U okviru ovog predavanja ćemo posmatrati specijalni slučaj kada je $s{=}j\omega{=}0$, koji je interesantan u slučaju kada referentni signal pripada klasi polinomijalnih signala.

Greška u stacionarnom stanju



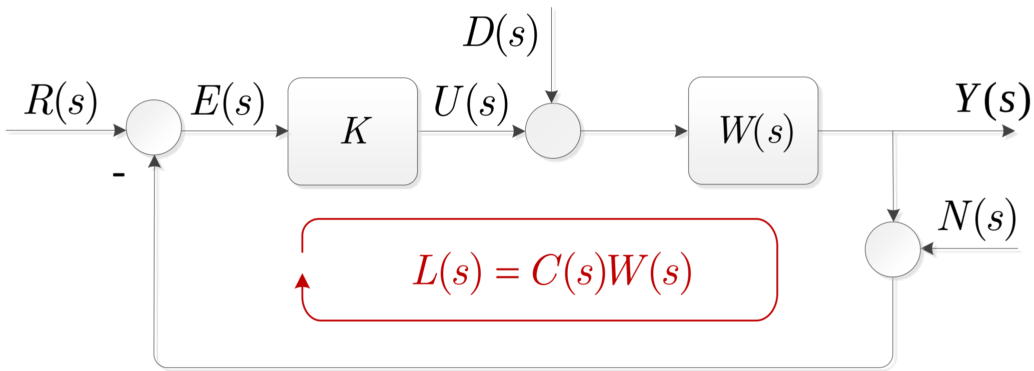


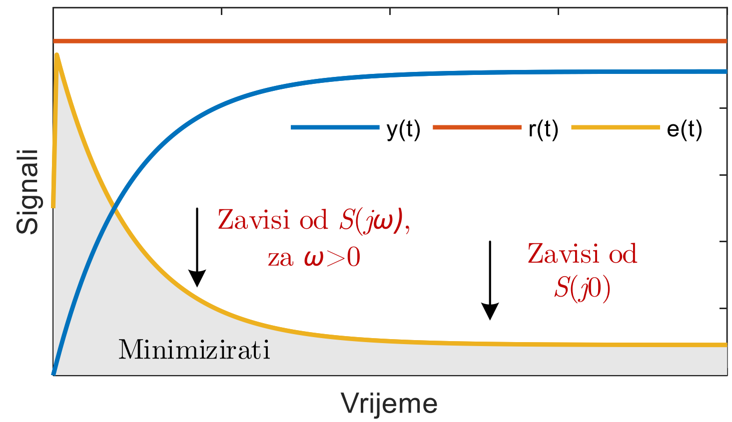
Prema Laplasovoj teoremi o krajnjoj vrijednosti, može se uspostaviti veza između kompleksne funkcije $F(s)$, za $s{=}0$, i njene vrijednosti u vremenskom domenu $f(t)$, za $t = \infty$. Konkretno sa signal greške $E(s)$, možemo zapisati sljedeće:

$$e_{ry}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_{ry}(s) = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+KW(\mathrm{s})} - \lim_{s\to 0}\frac{sW(s)D(s)}{1+KW(\mathrm{s})} + \lim_{s\to 0}\frac{sKW(s)N(s)}{1+KW(\mathrm{s})},$$

pri čemu smo za potrebe analize signala u stacionarnom stanju pretpostavili da je da je $C(s){=}K$ i da je povratna sprega jedinična.

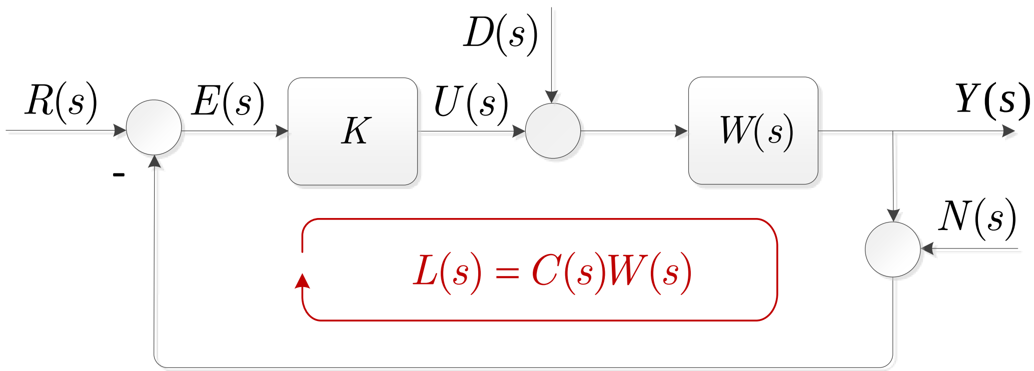
Greška u stacionarnom stanju

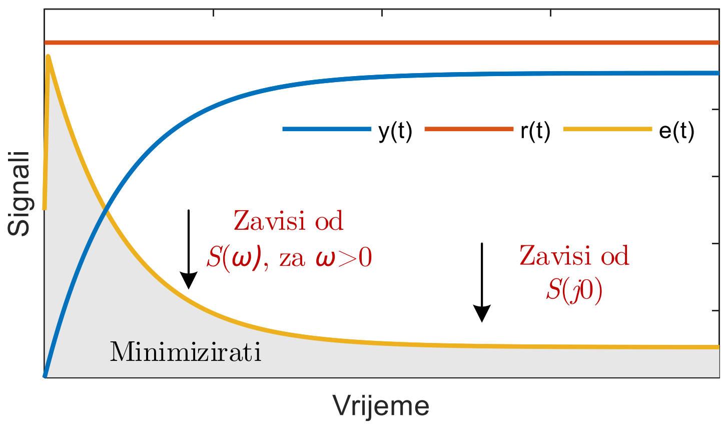




Treba napomenuti da se teorema o krajnjoj vrijednosti može primijeniti samo na signale koji imaju konačne vrijednosti. Dakle, svi polovi funkcije $E_{ry}(s)$ moraju ležati u lijevoj poluravni s-ravni (tada je $e_{ry}(\infty)=0$). Izuzetak predstavlja slučaj kada funckija $E_{ry}(s)$ ima pol u koordinatnom početku (tada je $e_{ry}(\infty)=const$). Ako funkcija $E_{ry}(s)$ ima višestruke polove u koordinatnom početku, tada, stogo matematički govoreći, granična vrijednost ne postoji, ali ćemo primjenom granične teoreme na $E_{ry}(s)$ tu informaciju i dobiti ($e_{ry}(\infty)= \infty$). U svim ostalim slučajevima primjenom Laplasove teoreme dobićemo pogrešan rezultat.

Greška u stacionarnom stanju

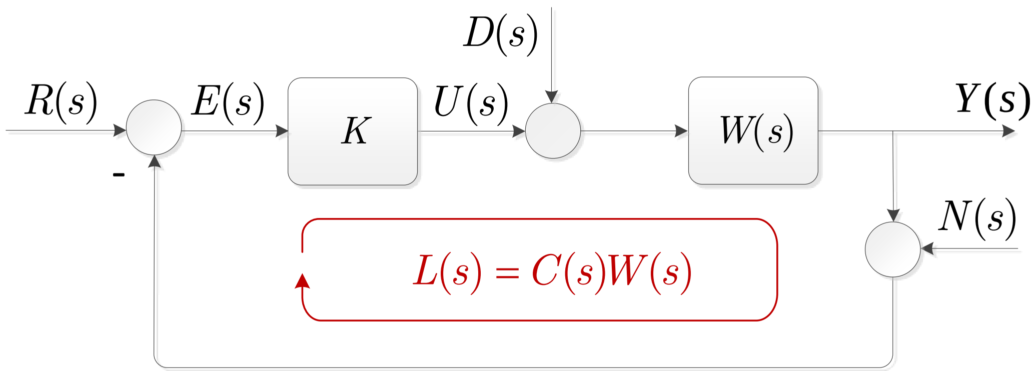


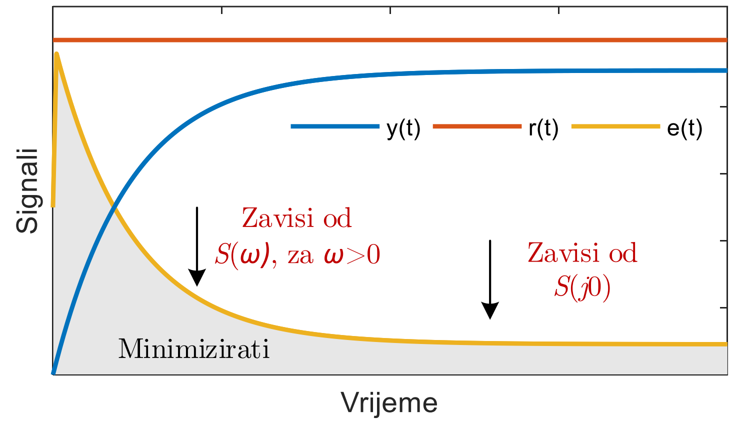


$$e_{ry}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_{ry}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+KW(\mathrm{s})} - \lim_{s\to 0} \frac{sW(s)D(s)}{1+KW(\mathrm{s})} + \lim_{s\to 0} \frac{sKW(s)N(s)}{1+KW(\mathrm{s})},$$

Sada se vratimo posmatranju izraza za vrijednost signala greške u stacionarnom stanju $e_{ry}(\infty)$. Može se uočiti da se sa povećanjem pojačanja K smanjuju vrijednosti prvog i drugog sabirka (smanjuje se funkcija osjetljivosti na frekvenciji $\omega=0$), odnosno smanjuje se greška u praćenju referentnog signala i redukuje se uticaj poremećaja. Naravno ovaj zaključak važi u slučaju da su ispunjeni uslovi za primjenu granične teoreme.

Greška u stacionarnom stanju





$$e_{ry}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE_{ry}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+KW(\mathrm{s})} - \lim_{s\to 0} \frac{sW(s)D(s)}{1+KW(\mathrm{s})} + \lim_{s\to 0} \frac{sKW(s)N(s)}{1+KW(\mathrm{s})},$$

Sa druge strane, sa povećanjem pojačanja K povećava se vrijednost trećeg člana, odnosno greška koja potiče od mjernog šuma. Pored toga, sa povećanjem K smanjuju se margine stabilnosti, odnosno sistem postaje manje stabilan. Ako SAU sagledamo i sa aspekta upravljačkog signala, možemo zaključiti da će za veće vrijednosti K vrijednost upravljačkog signala biti veća $(U(s) = KE(s))$, odnosno biće veća potrošnja energije. Zato, prilikom dizajna SAU-a uvijek treba praviti kompromise.

Greška u stacionarnom stanju

Upoređujući upravljanje sa povratnom spregom sa upravljanjem u otvorenoj sprezi, mogu se istaći sljedeći benefiti povratne sprege:

- povratna sprega prirodno teži da redukuje uticaj poremećaja i smanji grešku u radu sistema;
- povratna sprega može da ustabili nestabilan sistem. Štaviše, odabirom odgovarajućih margina stabilnosti, sistem sa povratnom spregom se može učitniti robusnim na nesigurnosti/greške u modelovanju sistema;
- povratna sprega može da popravi i prelazni proces, odnosno da skrati njegovo trajanje. O prirodi prelaznih procesa govorićemo na narednim predavanjima.

Povratna sprega ima i negativne strane. Jedna od njih je svakako cijena, jer su kvalitetni senzori najskuplje komponente SAU-a. Takođe, sa senzorima dolaze i šumovi, odnosno unošenje netačnosti u sistem upravljanja.

Primjer- Laplasova granična teorema

Posmatrajmo dva sistema:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \text{ i } G_2(s) = \frac{1}{s-1}.$$

i četiri različita ulazna signala: $h(t)$, $th(t)$, $e^{-t}h(t)$ i $e^{t}h(t)$. Laplasove transformacije ovih signala su respektivno:

$$X_1(s) = \frac{1}{s},\ X_2(s) = \frac{1}{s^2},\ X_3(s) = \frac{1}{s+1} \text{ i } X_4(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Odzivi sistema G_1 i G_2 na X_1 su: $Y_{11}(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ i $Y_{21}(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$.

Ako primijenimo graničnu teoremu, dobićemo vrijednosti odziva u stacionarnom stanju:

$$y_{11}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+1)} = 1 \text{ i } y_{21}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s-1)} = -1.$$

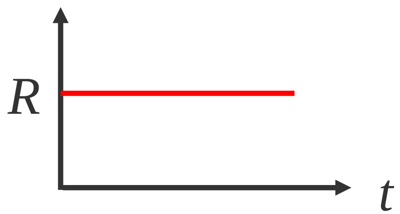
Međutim, drugi rezultat je netačan, jer je sistem nestabilan, pa izlaz konvergira ka beskonačnosti, što znači da se ne može primijeniti granična teorema.
Isprobajte ostale kombinacije, a zatim rezultat potvrdite tako što ćete simulirati odziv sistema na sljedeći način:

```
s=tf('s');X1=1/s;G1=1/(s+1);impulse(X1*G1)
```

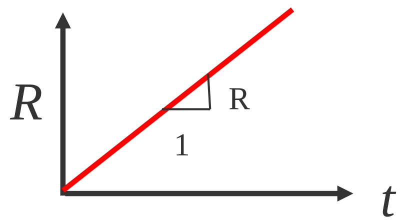
Statičke konstante greške

Prilikom dizajna SAU-a obično treba specificirati zahtijeve koje sistem treba da zadovolji. Zahtijevi za ponašanjem sistema u stacionarnom stanju se najčešće specificiraju u vidu željene greške u stacionarnim stanju za testne referentne signale, a češće u vidu statičkih konstanti greški, koje takođe nose informaciju o tačnosti rada sistema u stacionarnom stanju.

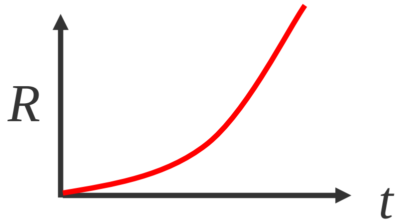
Ispod su dati testni signali za koje treba utvrditi ponašanje sistema.



Step funkcija $\quad r(t) = Ru(t) \quad R(s) = \dfrac{R}{s}$



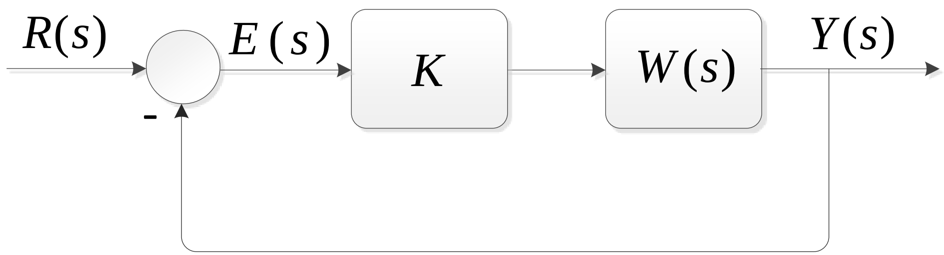
Rampa funkcija $\quad r(t) = Rtu(t) \quad R(s) = \dfrac{R}{s^2}$



Parabolična funkcija $\quad r(t) = \dfrac{Rt^2}{2}u(t) \quad R(s) = \dfrac{R}{s^3}$

Statičke konstante greške

Statičke konstante se definišu za sisteme sa jediničnom povratnom spregom, jer na toj šemi $E(s)$ predstavlja razliku između referentne i željene vrijednosti. Sve komplikovanije strukture se mogu svesti na ovakvu šemu.



Signal greške $E(s)$ u s domenu i njegova krajnja vrijednost u vremenskom domenu su jednaki:

$$E(s) = R(s) - G(s)R(s),$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + KW(s)} R(s),$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + KW(s)} R(s).$$

Konstanta položaja

Od sistema upravljanja se često zahtijeva da se izlazni signal drži na nekoj zadatoj konstantnoj vrijednosti. Na primjer, SAU nekad treba da održava konstantnu temperaturu, pritisak, brzinu ili da zauzme neku zadatu poziciju u prostoru (ugaonu ili linearnu). Iz tog razloga se kao jedan od testnih signala usvaja step funkcija. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal step funkcija $Rh(t)$ je:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KW(s)}\frac{R}{s} = \frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0} KW(s)} = \frac{R}{1+K_p}.$$

Granična vrijednost $K_p = \lim\limits_{s\to 0} KW(s)$ se zove konstanta položaja ili poziciona konstanta, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za konstantne referentne signale (greška u pozicioniranju kod pozicionih SAU-a). Napomenimo, da je u ovom razmatranju u direktnoj grani pored procesa postoji i regulator K, da bi se naznačilo da se poziciona konstanta može podešavati. Odnosno, u direktnu granu se mogu ubaciti potrebni elementi u cilju podešavanja pozicione konstante SAU-a na željenu vrijednost.

Konstanta položaja

Greška SAU-a sa jediničnom povratnom spregom zavisi od tipa funkcije povratnog prenosa. Ako funkcija povratnog prenosa nema astatizam, onda za nju kažemo da je tipa 0. Ukoliko funkcija povratnog prenosa ima astatizam prvog reda, onda se radi o sistemu tipa 1, odnosno o sistemu tipa 2, ako funkcija prenosa ima astatizam drugog reda, i tako dalje.

Napomenimo još jednom da pod funkcijom povratnog prenosa nazivamo funkciju prenosa u otvorenoj petlji. Ako je jediničnom spregom spregnut samo objekat bez regulatora, onda je funkcija povratnog prenosa jednaka funkciji prenosa objekta $W(s)$. Dodavanjem regulatora $C(s)$ mi u stvari modifikujemo funkciju povratnog prenosa, njen tip i konstantu položaja, odnosno nova funkcija povratnog prenosa će biti $C(s)W(s)$.

Kako smo konstantu položaja definisali kao graničnu vrijednost funkcije povratnog prenosa kada s teži nuli, jasno je da njena vrijednost zavisi od reda astatizma. Kod sistema nultog tipa konstanta položaja ima konačnu vrijednost, pa samim tim SAU sa jediničnom povratnom spregom prati konstantni referentni signal sa konačnom greškom. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatazim bilo kojeg reda, greška SAU-a u praćenju referentnog konstantnog signala će biti jednaka nuli.

Konstanta brzine

Od sistema upravljanja se nekad zahtijeva da prati referentni signal koji linearno raste. Iz tog razloga se kako jedan od testnih signala usvaja rampa funkcija, odnosno pomoću nje se testira sposobnost sistema da razvije neku brzinu. Primjer takvog SAU-a je antenski sistem koji treba da se okreće konstantom brzinom i prati satelit koji se rotira oko zemlje, ili sistem sa solarnim panelima koji u toku dana treba da prati pomjeraj sunca, kako bi si maksimalno iskoristila sunčeva energija. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal rampa funkcija $Rth(t)$ je:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KW(s)} \frac{R}{s^2} = \frac{R}{s + \lim_{s\to 0} sKW(s)} = \frac{R}{K_v}.$$

Vrijednost $K_v = \lim_{s\to 0} sKW(s)$ se zove konstanta brzine, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za linearno rastuće referentne signale (greška SAU-a u praćenju zadate brzine). Konstanta brzine je jednaka 0, ukoliko je funkcija povratnog prenosa tipa 0, što znači da takvi sistemi ne mogu da prate referentnu brzinu. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatizam prvog reda konstanta brzine je konačna, odnosno ona je jednaka beskonačno kod sistema koji imaju astatizme višeg reda.

Konstanta ubrzanja

Ako se od sistema upravljanja zahtijeva da prati referentni signal koji koji ima neko konstantno ubrzanje, onda kao testni signal treba usvojiti parabolični signal. Jedan primjer takvog SAU-a bi bio radarski sistem koji treba da prati projektil koji razvija neko ubrzanje. Vrijednost signala greške u slučaju kada je referentni signal parabolična funkcija $Rt^2/2h(t)$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KW(s)} \frac{R}{s^3} = \frac{R}{s^2 + \lim\limits_{s\to 0} s^2 KW(s)} = \frac{R}{K_a}.$$

Vrijednost $K_a = \lim\limits_{s\to 0} sKW(s)$ se zove konstanta ubrzanja, iz razloga što je preko nje definisana greška sistema za parabolične referentne signale (greška SAU-a u praćenju zadatog ubrzanja). Konstanta ubrzanja je jednaka 0, ako je funkcija povratnog prenosa tipa 0 ili 1, i takvi sistemi ne mogu da razviju željeno ubrzanje. Ako funkcija povratnog prenosa ima astatizam drugog reda konstanta ubrzanja je konačna, odnosno takvi sistemi prate parabolične referentne signale sa nekom konačnom greškom. Na kraju, ako sistem koji je spregnut jediničnom spregom ima astatizam trećeg ili većeg reda, tada je konstanta ubrzanja beskonačna.

Statičke konstante greške SAU-a

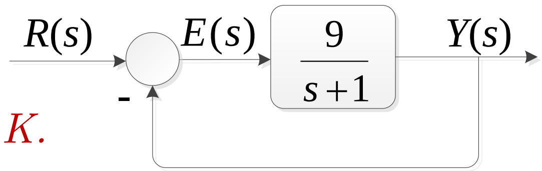
Ispod su date vrijednosti statičkih konstanti greški i vrijednosti grešaka u stacionarnom stanju, za različite testne signale i tipove sistema.

$$C(s)W(s) = \frac{k(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s).......(1+\tau_m s)}{s^j(1+\tau_{d1} s)(1+\tau_{d2} s).......(1+\tau_{dn} s)}$$

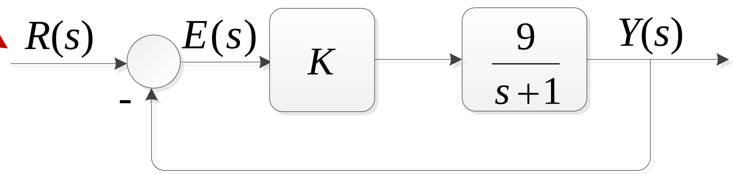
Tip (j)	K_p	K_v	K_a	$e(\infty)$ *step*	$e(\infty)$ *rampa*	$e(\infty)$ *parabola*
0	k	0	0	$\frac{1}{1+Kp}$	∞	∞
1	∞	k	0	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	∞	∞	k	0	0	$\frac{1}{K_a}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

Primjer – sistem nultog tipa

Na slici je prikazan SAU čiji je zadatak praćenje referentne konstantne pozicije. Odrediti konstante greške i grešku u stacionarnom stanju, ako je ulazni signal jediničana step funkcija. Odrediti pojačanje K koje treba dodati u direktnoj grani tako da greška u praćenju step funkcije bude 0.01. Kolika je nova konstanta položaja sistema?



Stabilan za bilo koje K.



Konstanta položaja sistema je:

$$K_p = \lim_{s\to 0} W(s) = 9$$

dok je greška jednaka:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+9} = 0.1.$$

Kako je željena greška sistema $e^*(\infty) = 0.01$, u direktnu granu treba dodati pojačanje da bi se ta greška smanjila. Iz uslova:

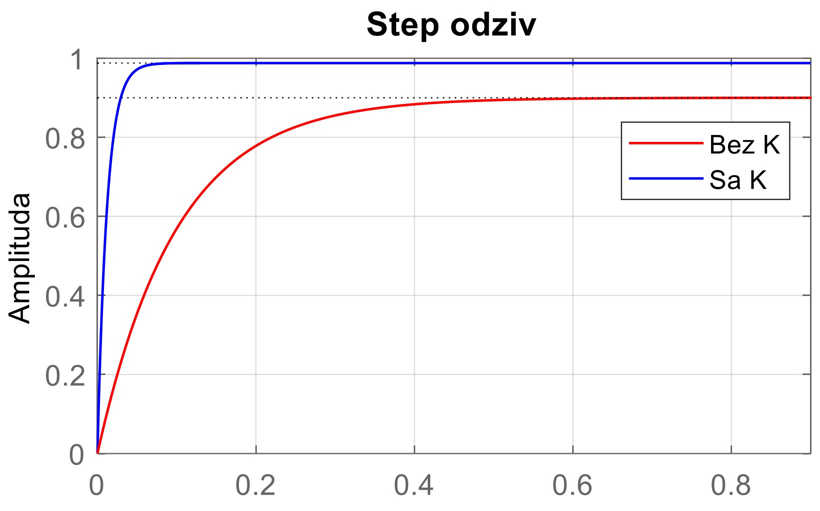
$$e^*(\infty) = 0.01 = \frac{1}{1+K_p^*}$$ se dobija da je željena konstanta pojačanja $K_p^* = 99$,

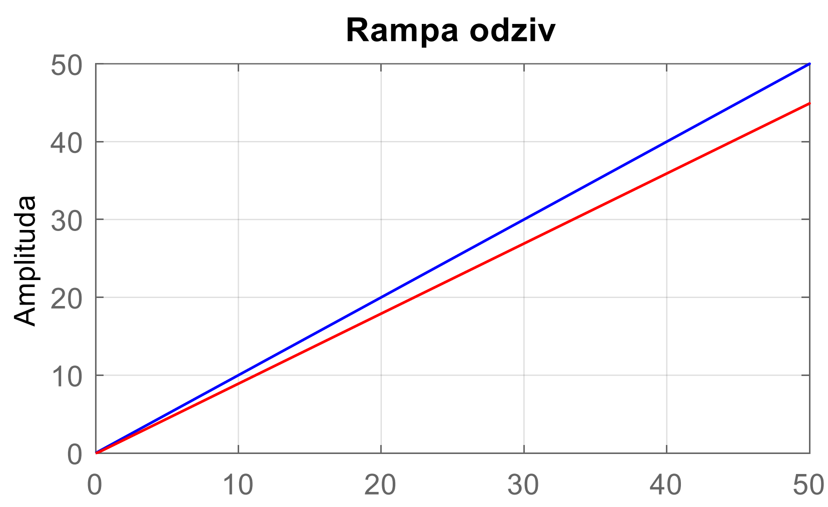
odnosno u direktnoj grani treba dodati pojačanje K=99/9=11. Konstante brzine u ubrzanja su jednake nuli.

Primjer – sistem nultog tipa

Na prvoj slici je prikazan step odziv spregnutih sistema bez pojačanja i sa pojačanjem (kompenzovani). Može se uočiti da je u drugom slučaju ispunjen zahtjev sa željenom greškom. Na drugoj slici je prikazan odziv sistema na rampa funkciju. Kako sistem u otvorenoj sprezi nema astatizam, spregnuti sistem ne može da prati referentni signal.

```
>> s=tf('s');
>> W=9/(s+1);
>> G=feedback(W,1);
>> step(G), hold on
>> G1=feedback(9*W,1);
>> step(G1,'r'), figure(2)
>> step(1/s,'b'), % referenti signal
>> hold on
>> step(G/s,'r') % odziv na rampu
```

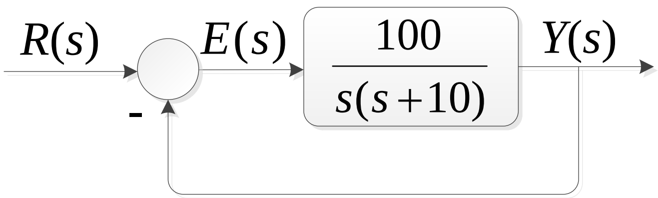




Primjer – sistem prvog tipa

Odrediti statičke konstante greške za SAU prikazan na slici. Nakon toga, odrediti grešku u stacionarnom stanju za tri ulazna signala: $2h(t)$, $2th(t)$ i $2t^2h(t)$.

Pošto sistem ima astatizam u otvorenoj sprezi, bez računanja možemo zaključiti da su konstante položaja i brzine jednake: $K_p=\infty$ i $K_a=0$. Samim tim greške u praćenju konstantnog i paraboličnog referentnog signala su 0 i ∞, respektivno.



Konstanta brzine je jednaka:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sW(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{100}{s(s+10)} = 10.$$

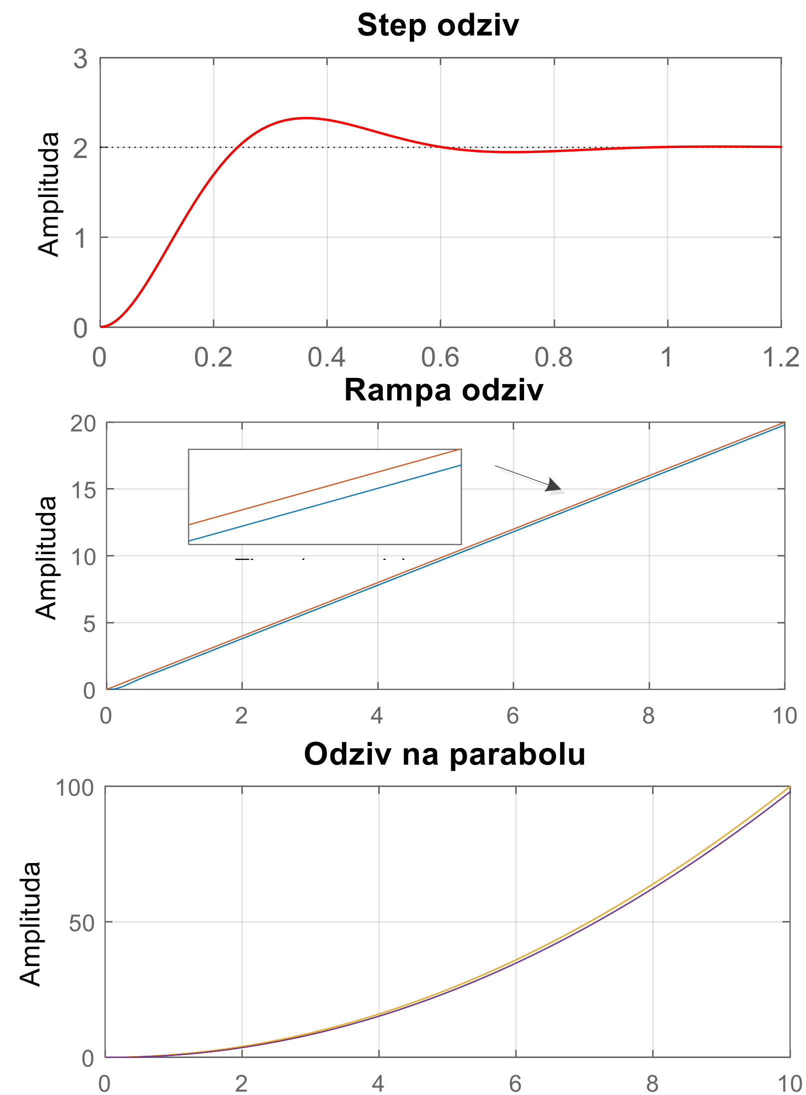
Greška u praćenju signala $2th(t)$ je konačna i iznosi:

$$e(\infty) = \frac{2}{K_v} = 0.2.$$

Primjer – sistem prvog tipa

Na slikama je prikazan step odziv spregnutog sistema za step, rampa i parabolični ulaz, respektivno. Može se uočiti da sistem dostiže zadatu step komandu bez greške, dok postoji konačna greška u praćenju rampa funkcije. Sistem ne može da prati parabolični ulaz, odnosno signal greške će konvergirati ka beskonačnosti u trećem slučaju.

```
>> s=tf('s');
>> W=100/s/(s+10);
>> G=feedback(W,1);
>> step(2*G), figure(2)
>> step(2/s*G,10), hold on
>> step(2/s,10), figure(3)
>> step(2/s^2*G,10), hold on
>> step(2/s^2,10)
```



Nejedinična povratna sprega

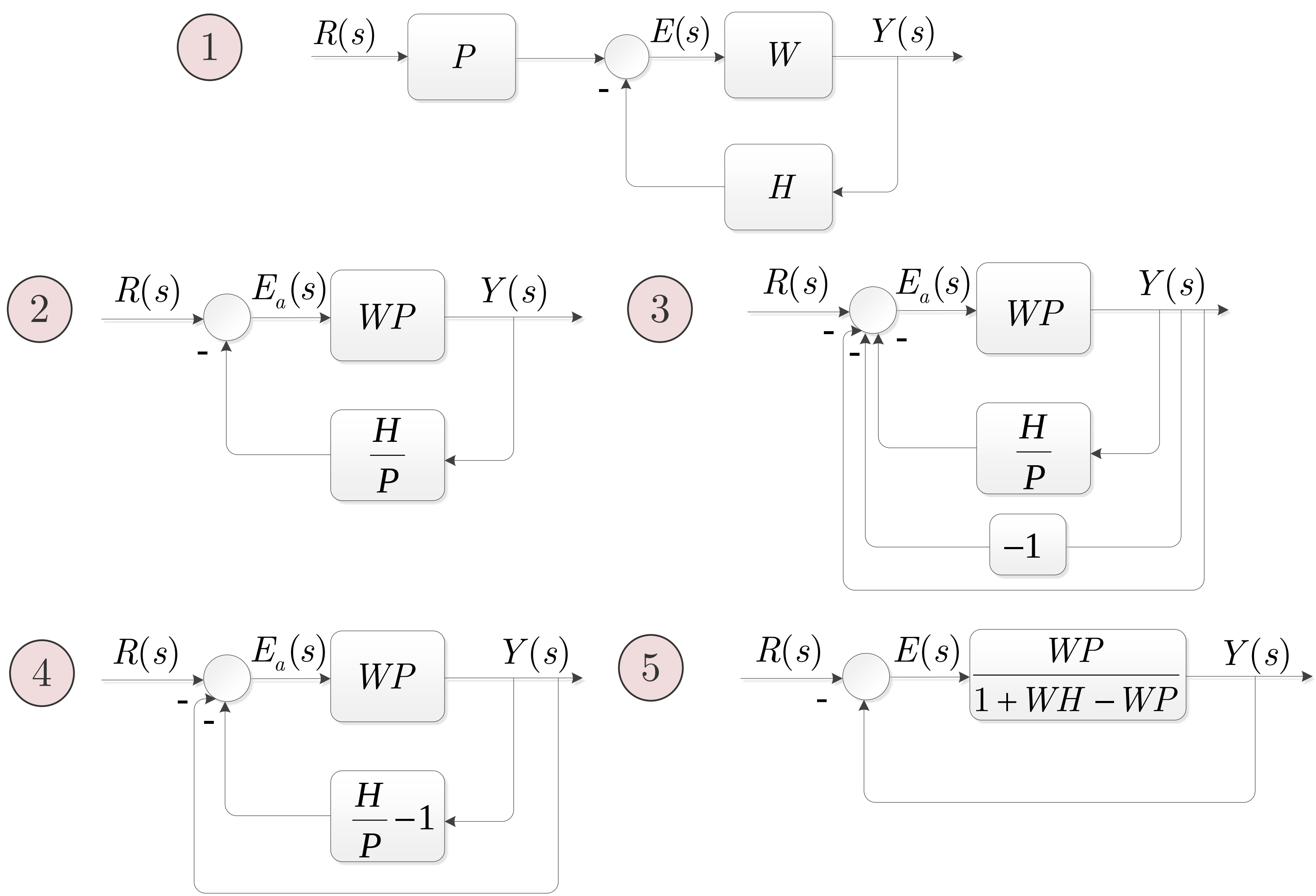
SAU obično nema jediničnu povratnu spregu, iz razloga što senzor ne mora biti idealan, već može imati neko nejedinično pojačanje ili čak dinamiku. Takođe, nekad se u povratnoj grani može ubaciti komponenta koja vrši obradu i prilagođenje mjerenog signala. Pored toga, mogu postajati i komponente koje vrše prilagođenje referentnog signala (vidjećemo kasnije da je ta komponenta u stvari potenciometar kod servomehanizama). Kod ovakvih SAU-a izlaz iz sabirača (signal greške koji obrađuje regulator) ne predstavlja razliku između referentnog i stvarnog izlaznog signala. Da bi se analizirao stvarni signal greške, definisale konstante greške i odredio tip funkcije povratnog prenosa, SAU se prvo mora svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.

Jedan način za svođenje SAU-a na jediničnu (negativnu) povratnu spregu je taj što se prvo odredi funkcija prenosa čitavog sistema $G(s)$, a nakon toga se funkcija povratnog prenosa računa na osnovu relacije:

$$W_e(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)}.$$

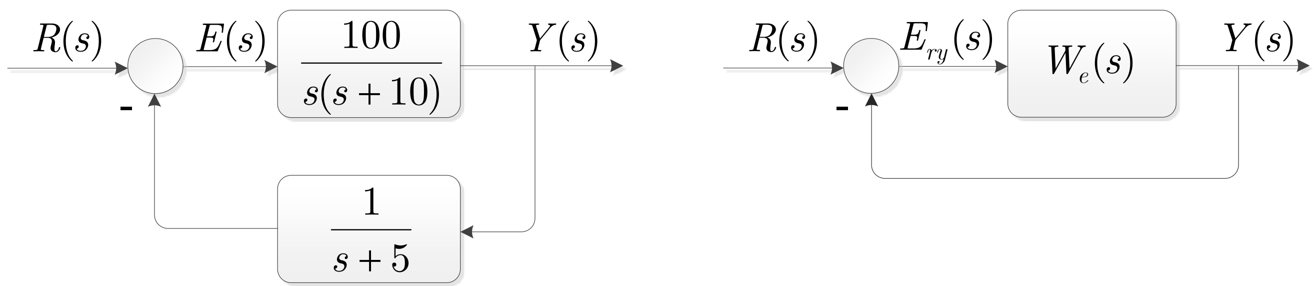
Drugi način je prikazan na narednom slajdu.

Nejedinična povratna sprega



Primjer – nejedinična povratna sprega

Za SAU prikazan na slici odrediti onu konstantu greške koja ima konačnu vrijednost i odgovarajuću grešku u stacionarnom stanju.



SAU treba prvo svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.

Funckija prenosa sistema je:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{W}{1+WP} = \frac{100s+500}{s^3+15s^2+50s+100}$$

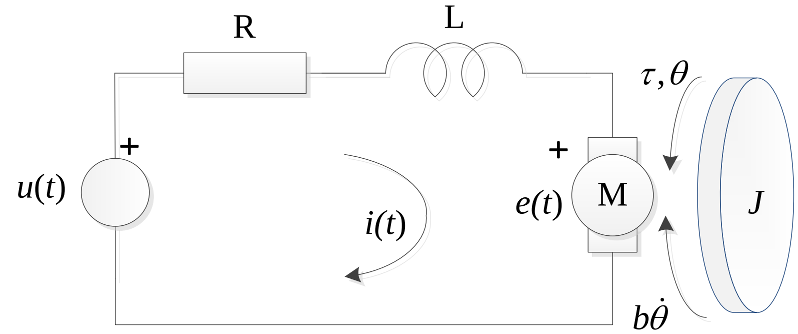
$$W_e(\mathrm{s}) = \frac{G(\mathrm{s})}{1-G(\mathrm{s})} = \frac{100s+500}{s^3+15s^2-50s-400}$$

```
>> syms s
>> W=100/s/(s+10);
>> H=1/(s+5);
>> G=simplify(W/(1+W*H))
>> >> W=simplify(G/(1-G))
W = -(100*s + 500)/(- s^3 - 15*s^2 +
50*s + 400)
```

Konstanta položaja je -5/4, a greška u praćenju step funkcije iznosi -4.

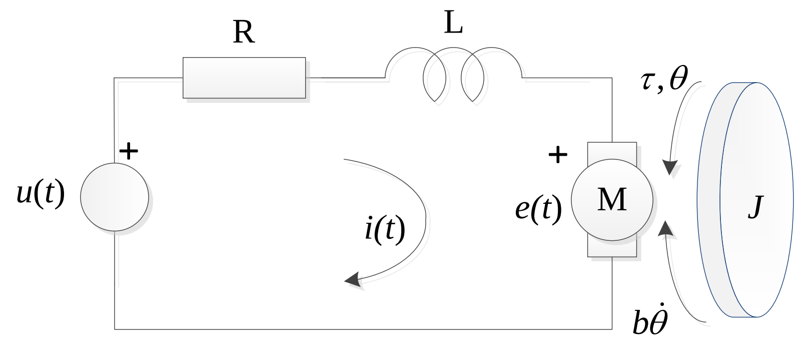
Upravljanje jednosmjernim motorom

Jednosmjerni motor je mašina jednosmjerne struje koja pretvara električnu energiju u mehaničku. U njemu postoje dva nezavisna namotaja provodnika i shodno tome dva električna kola. Jedan namotaj



se nalazi na fiksnom dijelu motora i zato se zove namotaj statora, dok se drugi namotaj nalazi na dijelu motora koji rotira i zbog toga se naziva namotaj rotora. Mi ovdje nećemo ulaziti u konstrukcijske detalje jednosmjernih motora, već ćemo princip rada objasniti na osnovu principijelne šeme prikazane na slici. Struja koja protiče kroz namotaje statora $i_s(t)$ generiše elektromagnetno polje u unutrašnjosti motora i u prvoj aproksimaciji možemo smatrati da je fluks ovog polja direktno proporcionalan jačini struje, odnosno: $\Phi(t) \sim ki_s(t)$ druge strane, kako je na krajeve rotora priključen jednosmjerni napon, on će u kolu rotora (koje je takođe modelirano rednom vezom otpornosti R i induktivnosti L) izazvati postojanje struje $i(t)$.

Upravljanje jednosmjernim motorom



Proticanje električne struje kroz namotaje rotora, pri čemu se cio rotor nalazi u prostoru u kome postoji elektromagnetno polje fluksa $\Phi(t)$ uzrokovaće pojavu pokretačkog momenta koji će težiti da pokrene rotor. Vrijednost ovog pokretačkog momenta je proporcionalna proizvodu fluksa i jačini struje:

$$\tau(t) \sim \Phi(t)i(t) = k_m i(t).$$

Konačno, usled obrtanja rotorskog namotaja ugaonom brzinom ω u prostoru u kome postoji elektromagnetno polje, na krajevima namotaja rotora indukovaće se elektromotorna sila koja je proporcionalna brzini obrtaja osovine rotora i fluksu elektromagnetnog polja:

$$e(t) \sim \Phi(t)\omega(t) = k_m \omega(t).$$

Ova indukovana elektromotorna sila se često naziva kontra-elektromotornom silom, jer je njen polaritet uvijek takav da se suprotstavlja naponu koji izaziva struju kroz namotaj.

Upravljanje jednosmjernim motorom

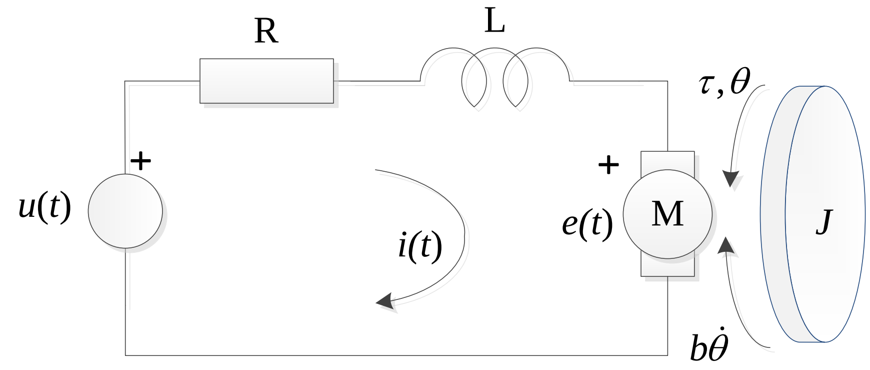
Na osnovu prethodnih razmatranja i principijelne šeme motora mogu se napisati sljedeće jednačine:

$$J\dot{\omega} + b\omega = k_m i$$

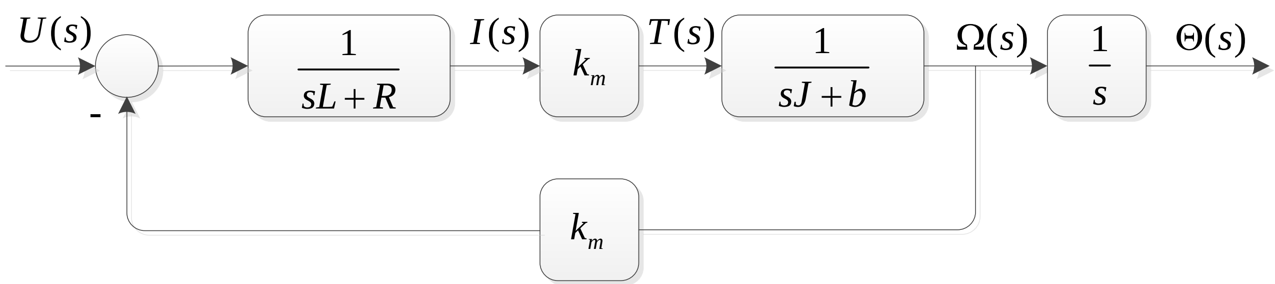
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_m\omega$$

$$(Js + b)\Omega(s) = k_m I(s)$$

$$(Ls + R)I(s) = U(s) - k_m\Omega(s).$$



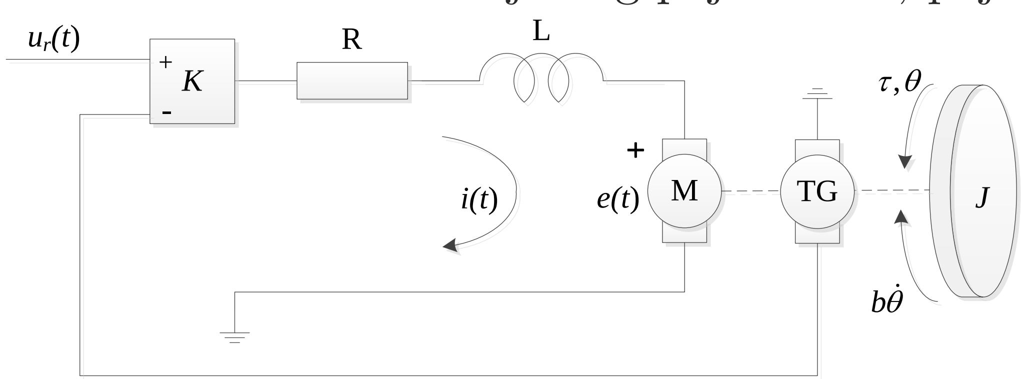
Na osnovu jednačina u Laplasovom domenu, može se nacrtati strukturni blok dijagram motora. Ugaoni pomjeraj je jednak integralu ugaone brzine.



Funkcija prenosa sistema je jednaka: $G(s) = \dfrac{\Omega(s)}{U(s)} = \dfrac{k_m}{JLs^2 + (bL + JR)s + bR + k_m^2}.$

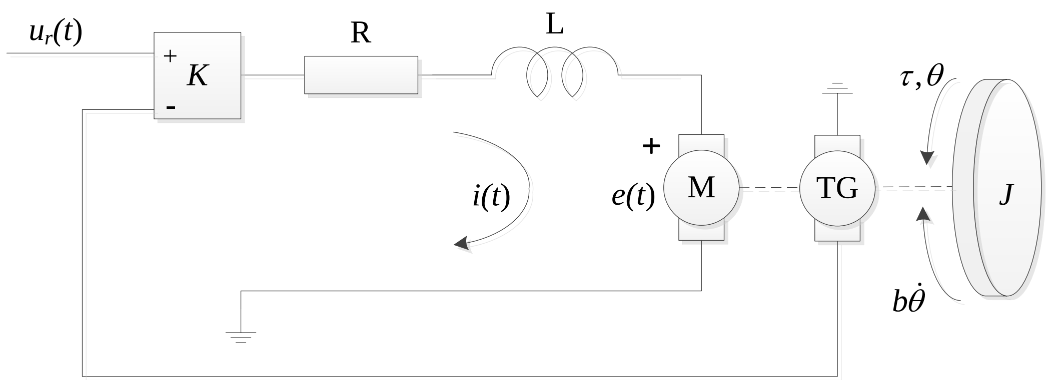
Brzinski servomehanizam

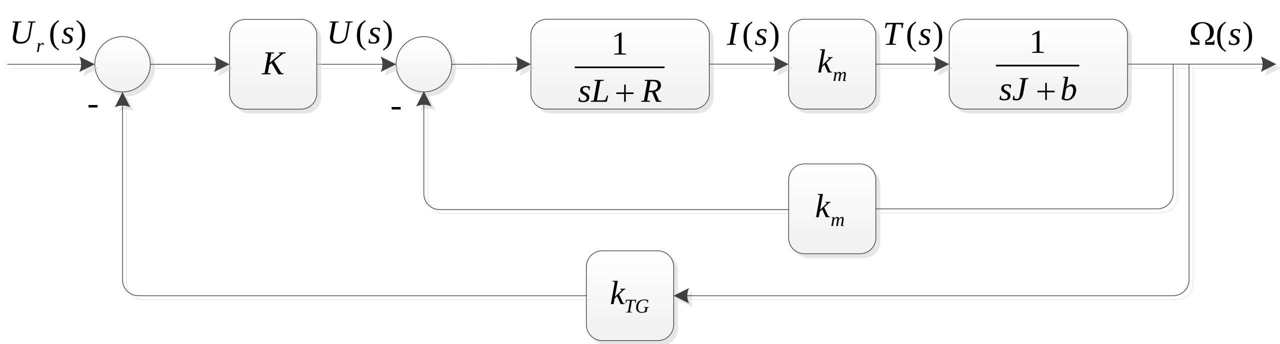
Brzinom motora se može upravljati u otvorenoj sprezi. Ulazni napon, odnosno upravljački signal treba proračunati na osnovu poznatog modela motora i željene brzine. Međutim, bilo kakva varijacija u parametrima modela ili poremećaj dovešće do odstupanja od željene izlazne brzine. Ukoliko želimo da, u cilju poboljšanja kvaliteta rada sistema, implementiramo negativnu povratnu spregu, neophodno je da upotrijebimo uređaj koji će mjeriti brzinu okretanja osovine rotora i da tu izmjerenu vrijednost da vratimo u cilju korekcije napona rotora. Takav uređaj se naziva tahogenerator. Vrlo je jednostavan i on na svom izlazu generiše naponski signal koji je proporcionalan brzini okretanja osovine. Principijelna šema takvog sistema prikazana je na slici ispod. Referentni signal se zadaje u vidu željenog napona, jer tahogenerator mjerenu brzinu konvertuje u naponsku veličinu. Ova razlika se dovodi na ulaz diferencijalnog pojačavača, pojačanja K.



Brzinski servomehanizam

Na slici ispod je dat i strukurni blok dijagram sistema sa povratnom spregom. Sa je k_{TG} označena konstanta proporcionalnosti tahogeneratora ($u = k_{\mathrm{TG}}\omega$). Sistemi automatskog upravljanja kod kojih se reguliše brzina ili pozicija nekog mehanizma koji pokreće motor u literaturi se često mogu sresti i pod nazivom servomehanizmi (serve – služiti).





Primjer - brzinski servomehanizam

Za neke vrijednosti parametara, funkcija prenosa motora je jednaka:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{0.0384\ s + 0.64}.$$

Napomena: kada ja induktivnost namotoja mala, ona se može zanemariti, pa se DC motor može modelovati kao proces prvog reda.

Ako se vrši upravljanje brzinom i ako je konstanta tahogeneratora jednaka jedinici:

a) Ispitati koliko pojačanje se smije unijeti u direktnu granu, a da spregnuti sistem bude stabilan.

b) Koliki napon treba dovesti na ulaz motora da bi se on okretao brzinom od 0.5 rad/s?

c) Ako se po brzini zatvori povratna sprega, kako greška u praćenju referentnog signala vrijednosti 0.5 rad/s zavisi od vrijednosti pojačavača? Pretpostavimo da se ovaj signal pomoću potenciometra pretvara u referentni napon od 0.5V.

d) Odrediti pojačanje K tako da signal greške bude jednak 0.1 rad/s. Kolika je vrijednost upravljačkog signala u ovom slučaju?

e) Kako poremećaj od 0.1V utiče na grešku sistema? Kako pojačanje utiče na ovu grešku?

Primjer - brzinski servomehanizam

a) Na osnovu Nikvistove krive se dobija da će sistem biti stabilan za bilo koje pojačanje iz opsega (-32.0513, ∞).

b) Pojačanje motora je 0.0313, što znači da u otvorenoj sprezi na njegov ulaz treba dovesti napon 0.5/ 0.0313=16 V, da bi se vratilo rotiralo brzinom 0.5 rad/s.

c) Signal greške je jednak:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{R(s)}{1 + KW(\mathrm{s})} = \frac{0.5}{1 + 0.0313K}$$

d) Izjednačavanjem gornjeg izraza sa 0.1, dobija se da je K= 127.7955

Upravljački signal je jednak $u(\infty)=Ke(\infty)=$ 12.7796V. Primijetimo ako ovaj napon primijenimo na motor u otvorenoj sprezi, brzina motora će biti jednaka 0.4 rad/s.

e) Poremećaj generalno povećava grešku (po apsolutnoj vrijednosti).

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{R(s)}{1 + KW(\mathrm{s})} - \lim_{s\to 0} \frac{W(s)D(s)}{1 + KW(\mathrm{s})} = \frac{0.5}{1 + 0.0313K} - \frac{0.1 \times 0.0313}{1 + 0.0313K}$$

Pozicioni servomehanizam

Ukoliko želimo da upravljamo pozicijom motora pomoću povratne sprege potreban nam je senzor za mjerenje ugaone pozicije vratila. Jedan od često korišćenih senzora je potenciometar, koji u stvari predstavlja pretvarač ugaone pozicije motora u naponski signal.

Princip rada potenciometra je vrlo jednostavan. Dugačak provodnik otpornosti R je namotan na torusnu podlogu, pri čemu je jedan kraj vezan za jednosmjerni napon, dok je drugi kraj provodnika uzemljen. Po unutrašnjosti potenciometra, vezan za osovinu koja može da rotira, kreće se klizač i zavisno od njegove pozicije, napon na kraju osovine v_{out} se mijenja. Što je ugao veći, klizač je bliži jednosmjernom izvoru napona, pa je i napon na klizaču veći:

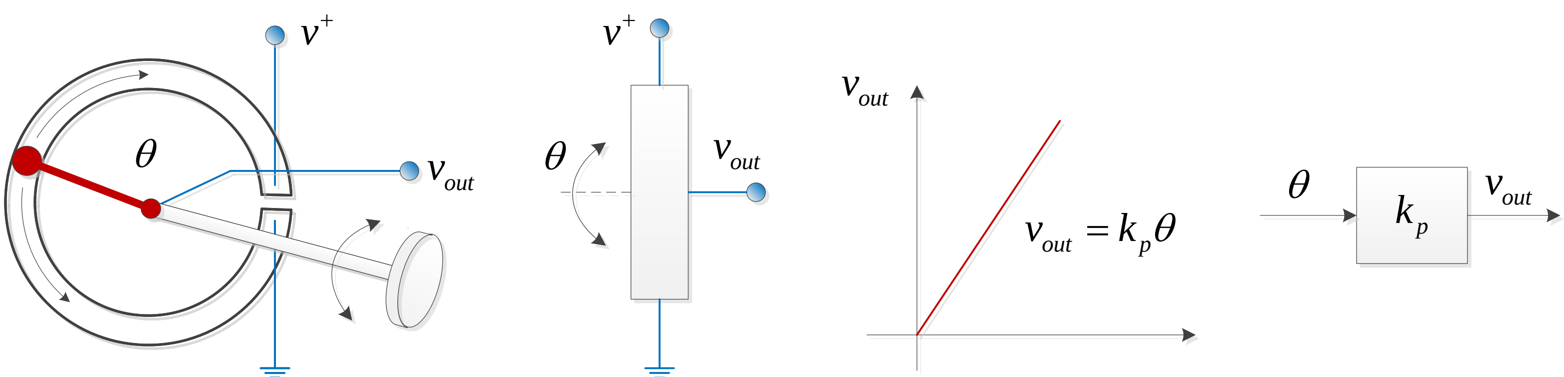
$$v_{out} = \frac{R_\theta}{R} v^+ = \frac{\frac{\theta}{2\pi} R}{R} v^+ = \frac{v^+}{2\pi}\theta = k_p \theta.$$

Drugim rečima, veza između napona na izlazu potenciometra i ugaone pozicije osovine je linearna, sa nekom konstantom proporcionalnosti k_p.

Pozicioni servomehanizam

Na slici a) ispod je ilustrovan princip rada potenciometra. Slika b) predstavlja simbol potenciometra koji ćemo korisiti na principijelnim šemama, dok je na slici c) prikazana karakteristika potenciometra. Na slici d) je prikazan blok dijagram potenciometra.

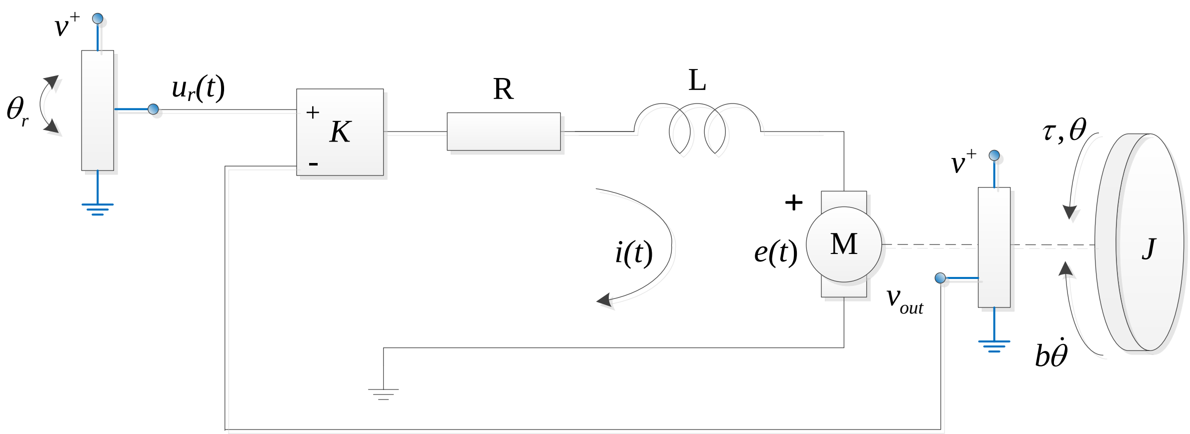
Mana potenciometra je što omogućava mjerenje ugla u rasponu do jednog punog kruga. Pa, samim tim na ovaj način možemo da upravljamo pozicijom samo u tom opsegu. Postoje razne vrste senzora ugaone pozicije. Ovdje je usvojen potenciometar iz razloga da bi se studentima približio koncept mjerenja izlaza i zatvaranja sprege.



a) *b)* *c)* *d)*

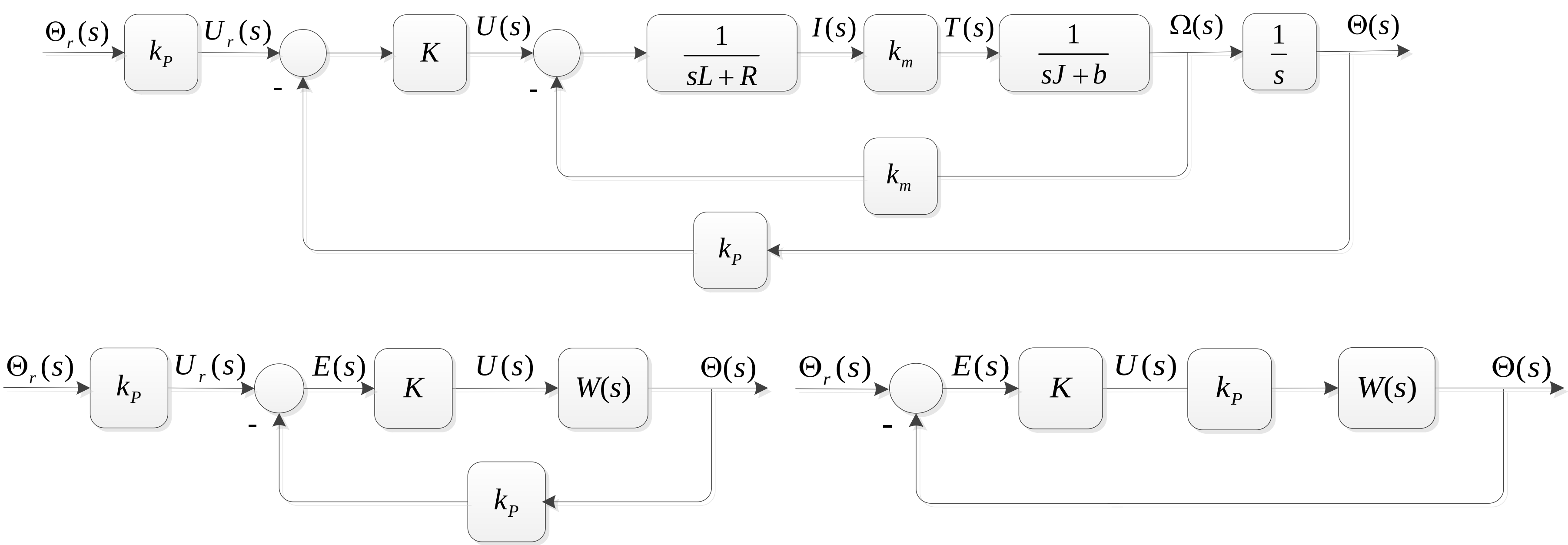
Pozicioni servomehanizam

Principijelna šema pozicionog servomehanizma je prikazana na slici ispod. Dakle, na vratilo motora treba postaviti potenciometar. Kako se motor rotira, na izlazu potenciometra ćemo dobiti informaciju o veličini ugla rotacije u vidu naponskog signala. Referentni signal i mjereni signal se vode na ulaz diferencijalnog pojačavača, koji razliku između ova dva signala uvećava K puta. Referentni signal treba takođe zadati u vidu napona, a to se može odraditi takođe preko potenciometra koji ima istu karakteristiku kao potenciometar na motoru, kao bi poređenje pretvorenih veličina bilo ravnopravno.



Pozicioni servomehanizam

Konačno, na slici ispod je prikazan strukturni blok dijagram pozicionog servomehanizma, koji se koristi za analizu sistema. Motor (aktuator) i opterećenje koje se rotira se može ekvivalentirati jednom funkcijom prenosa $W(s)$, a dalje se čitava šema može svesti na strukturu sa jediničnom povratnom spregom.



Primjer - pozicioni servomehanizam

Za neke vrijednosti parametara, funkcija prenosa motora je jednaka:

$$W(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{s(0.0384s + 0.64)}.$$

Napomena: kada ja induktivnost namotoja mala, ona se može zanemariti, pa se DC motor može modelovati kao proces drugog reda (veza između napona i pozicije)

Ako se vrši upravljanje brzinom i ako je konstanta tahogeneratora jednaka jedinici:

a) Ispitati koliko pojačanje se smije unijeti u direktnu granu, a da spregnuti sistem bude stabilan.

b) Koliki napon treba dovesti na ulaz motora da bi se obrnuo za ugao 30 rad?

c) Ako se po poziciji zatvori povratna sprega, kako greška u praćenju referentnog signala vrijednosti 50 rad zavisi od vrijednosti pojačavača? Pretpostavimo da se ovaj signal pomoću potenciometra pretvara u referentni napon od 0.5V.

d) Kako poremećaj od 0.1V utiče na grešku sistema? Kako pojačanje utiče na ovu grešku?

Osjetljivost SAU-a na promjene parametara

Proces, predstavljen funkcijom prenosa $W(s)$, bez obzira na svoju prirodu (fiziku, strukturu) je podložan uticajima promjenljive okoline, starenja, promjeni (nepoznavanju) stvarnih vrijednosti parametara i drugim prirodnim uticajima koji utiču na upravljanje. Kod sistema bez povratne sprege svi ovi uticaji rezultiraju u promjeni izlaznog signala i netačnom radu sistema.

Kod sistema sa povratnom spregom se ta promjena izlaznog signala registruje i automatski se mijenja upravljački signal u cilju korekcije i dovođenja izlaznog signala na željenu vrijednost. Iz navedenih razloga je osjetljivost SAU-a na promjene parametara sistema od primarnog značaja, a najveća prednost SAU-a sa povratnom spregom se ogleda u činjenici da oni redukuju tu osjetljivost.

Idealno bi bilo da sistem ima nultu osjetljivost na promjenu nekog parametra, što bi značilo da promjena tog parametra uopšte ne utiče na ponašanje sistema.

Osjetljivost SAU-a na promjene parametara

Na primjer, posmatrajmo funkciju $F = K/(K+a)$. Za $K=10$ i $a=100$, vrijednost funkcije je $F=0.091$. Ako se parametar a poveća na vrijednost 300, tada će vrijednost funkcije F biti 0.032. Odnosno, za promjenu parametra a za za 200% posto, vrijednost funkcije F se promijeni za -65%.

Osjetljivost neke funkcije F na promjenu parametra P se upravo definiše kao odnos procentualne promjene funkcije F i procentualne promjene parametra P, ali za neko infinitezimalno malo P:

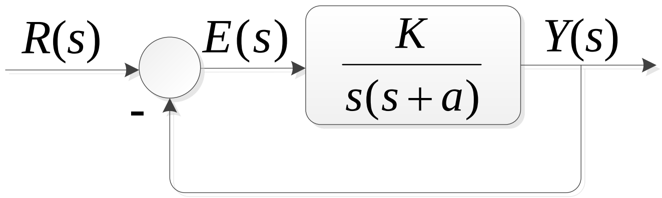
$$S_{F,P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta F \,/\, F}{\Delta P \,/\, P} = \frac{P}{F} \frac{\partial F}{\partial P}.$$

U praksi, ukoliko je osjetljivost neke karakteristike od interesa (na primjer greške) na promjenu nekog parametra velika, onda prilikom realizacije SAU-a treba kupiti kvalitetnije komponente - one kojima se parametri vremenom ne mijenjaju ili sporo mijenjaju.

Primjer- osjetljivost SAU-a

Za SAU dat na slici, odrediti osjetljivost funkcije prenosa spregnutog sistema na promjenu parametra a. Kolika je osjetljivost sistema u otvorenoj sprezi?

Funkcija spregnutog prenosa je jednaka:



Osjetljivost funkcije G, na promjenu parametra je po definiciji jednaka:

$$G(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{K}{s^2 + as + K}.$$

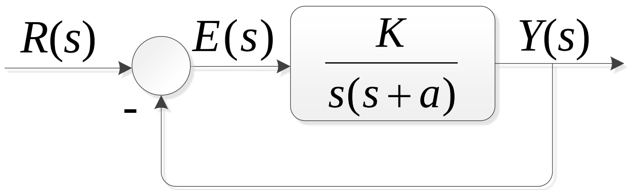
Posmatrajući dobijenu osjetljivost, može se zaključiti da se ona može smanjiti povećanjem pojačanja K u direktnoj grani.

$$S_{G,a} = \frac{a}{G}\frac{\partial G}{\partial a} = -\frac{as}{s^2 + as + K}.$$

```
>> syms s a K
>> W=K/s/(s+a)
>> G=simplify(W/(1+W))
G = K/(s^2 + a*s + K)
>> S=simplify(a/G*diff(G,a))
S = -(a*s)/(s^2 + a*s + K)
```

Primjer- osjetljivost SAU-a

Za SAU prikazan na slici ispitati osjetljivost greške u stacionarnom stanju na promjene parametara a i K.



Konstanta brzine je jednaka $K_v = \dfrac{K}{a}$, dok je greška u stacionarnom stanju:

$$e(\infty) = \frac{a}{K}.$$

Osjetljivost greške u stacionarnom stanju na promjene parametara a i K je:

$$S_{e(\infty),K} = \frac{K}{e(\infty)} \frac{\partial e(\infty)}{\partial K} = -1 \qquad S_{e(\infty),a} = \frac{a}{e(\infty)} \frac{\partial e(\infty)}{\partial a} = 1.$$

Može se uočiti da parametri K i a ne utiču na osjetljivost greške. Rezultat -1 znači da je greška obrnuto proporcionalna parametru K, dok rezultat 1 ima značanje da je greška direktno proporcionalna parametru a.