
SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Predavanje 10

Dizajn kompenzatora u frekvencijskom domenu

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Definišu osnovne komponente kontrolera (statičke i dinamičke performanse)
- ❖ Prepoznaju vezu između karakterističnih veličina sistema u otvorenoj sprezi, karakterističnih veličina spregnutog sistema i karakterističnih veličina u vremenskom domenu.
- ❖ Razmiju uticaj pojačavača i integralnog kompenzatora na frekvencijske karakteristike sistema
- ❖ Izvrše sintezu integralnog kompenzatora u frekvencijskom domenu

Mapa kursa

Modelovanje

Diferencijalne jednačine ✓

Funkcija prenosa ✓

- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami

Model u prostoru stanja ✓

- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Prelazak iz jednog domena u drugi ✓

Analiza

Kontrolabilnost i

opservabilnost ✓

Stabilnost sistema ✓

- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a ✓

- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske ✓

karakteristike

- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema

Kompenzatori

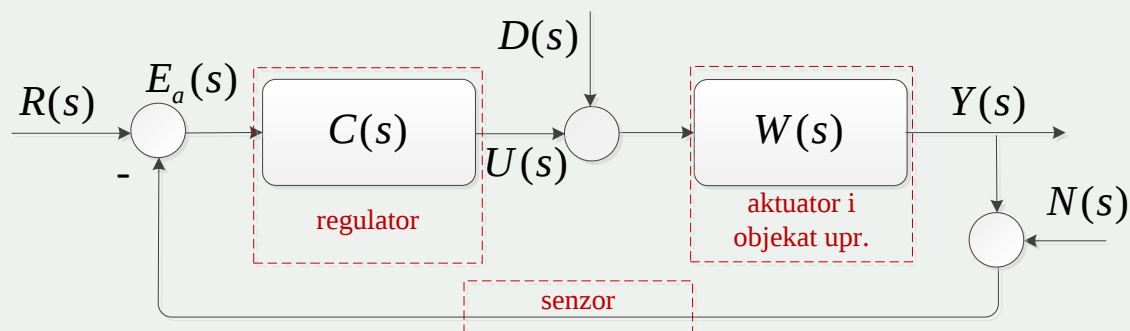
- Pojačavač ←
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator

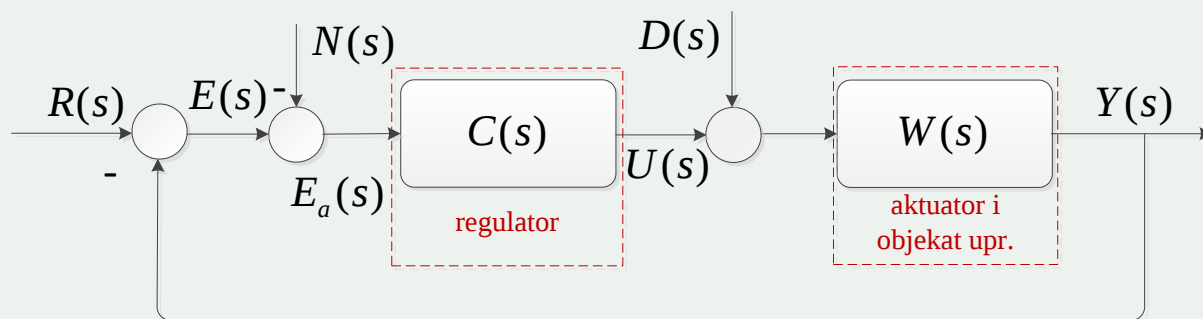
Fizičke realizacije

Primjeri dizajna sistema upravljanja

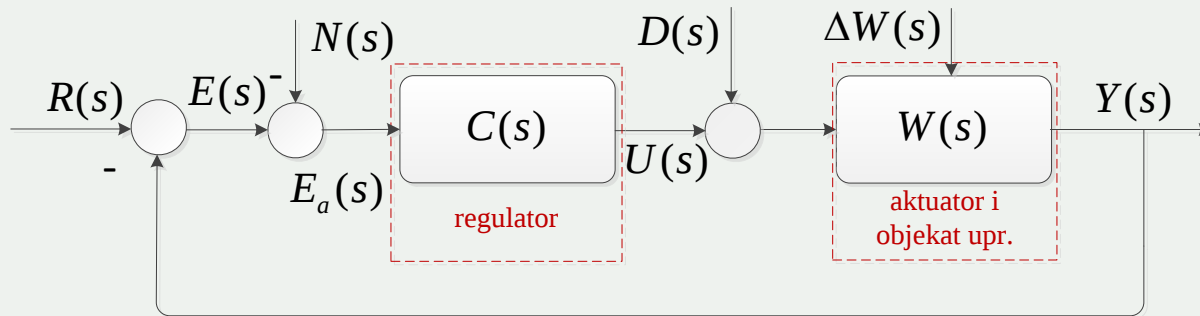
Dizajn SAU-a



Podsjetimo se još jednom osnovne šeme upravljanja, koja izgleda kao na slici iznad, pod uslovom da je senzor idealan, odnosno da ima jediničnu funkciju prenosa. Pošto je cilj SAU-a da minimizuje grešku između referentnog i izlaznog signala, a ne između referentnog i mjenog signala, gornja šema se može ekvivalentirati šemom sa slike ispod.



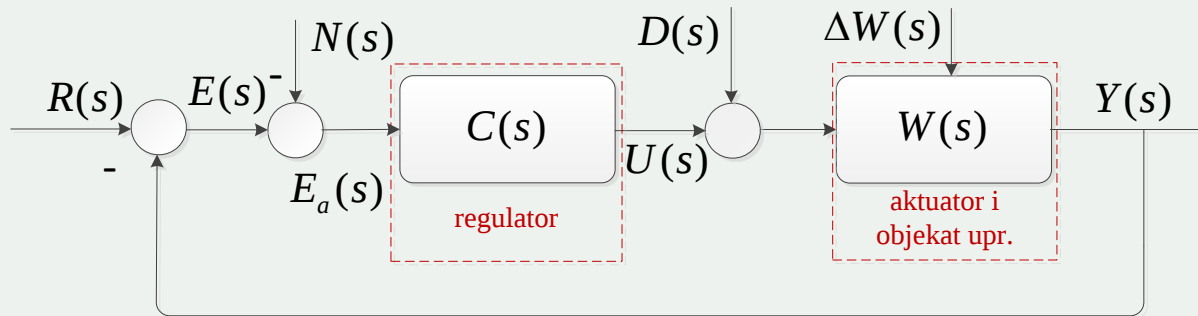
Dizajn SAU-a



Cilj upravljanja je minimizacija greške $e(t)=r(t)-y(t)$:

- bez obzira na poremećaje koji djeluju na sistem,
- bez obzira na greške u modelovanju sistema $W(s)$,
- bez obzira na mjerne šumove,
- bez obzira na dinamiku sistema (spor, nestabilan, itd.).

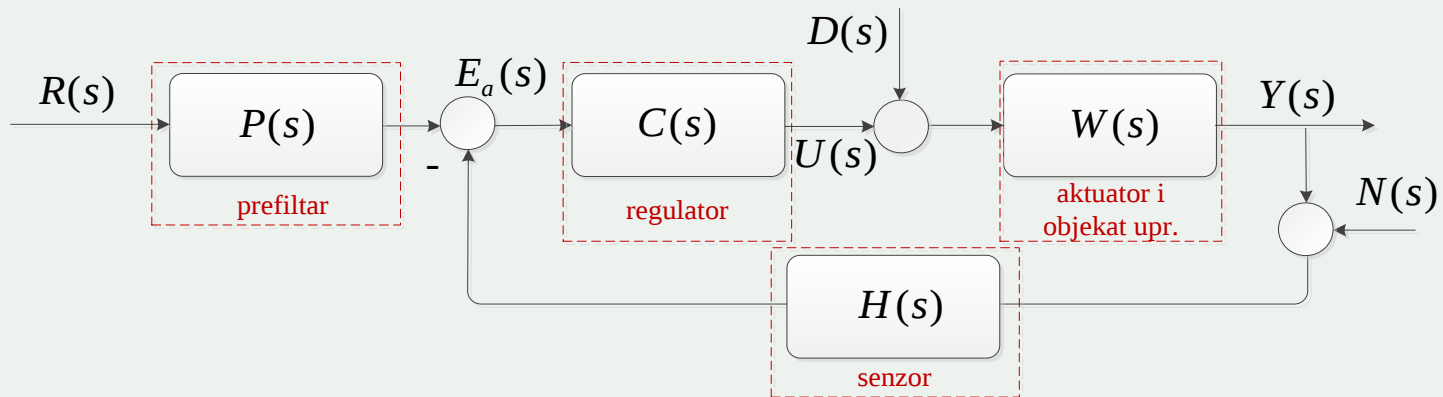
Dizajn SAU-a



Da bi postigli ovaj cilj treba dizajnirati regulator (kontroler) koji treba da zadovolji više zahtjeva:

- stabilnost u nominalnim uslovima (bez šuma, poremećaja, itd.),
- stabilnost u slučaju perturbacija modela,
- statičke performanse (odgovarajuća konstanta greške),
- dinamičke performanse (preskok, vrijeme smirenja),
- redukcija uticaja šuma (odgovarajući propusni opseg),
- fizička izvodljivost (kauzalnost kontrolera).

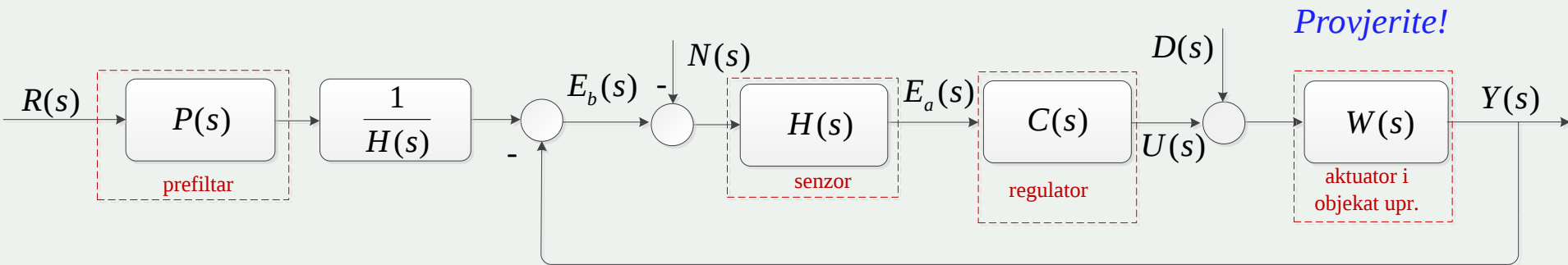
Dizajn SAU-a



U opštijem slučaju kada senzor ima neku dinamiku $H(s)$, koristi se takozvana šema sa dva stepena slobode (2DOF), kod koje se pored kontrolera koristi i komponenta koja se zove prefilter $P(s)$. Zadatak prefiltra je, između ostalog, poništavanje dinamike senzora $H(s)$. Sjetimo se primjera pozicionog servomehanizma, kod kojeg je mjerena pozicija pretvarana u napon preko potencijometra konstante k_p . U tom primjeru je referentni signal također množen sa istom konstantom, koja je u stvari predstavljala neku vrstu prefiltra.

Dizajn SAU-a

Prethodna šema se može svesti na šemu sa jediničnom povratnom spregom, kao što je prikazano na slici ispod.



Dakle, ako želimo da poništimo funkciju prenosa senzora $H(s)$, prefiltar treba odabrati tako da važi $P(s)=H(s)$. Tada se čitava šema svodi na referentnu šemu sa jediničnom povratnom spregom: signal $E_b(s)$ će biti jednak stvarnom signalu greške (razlici između referentnog i izlaznog signala), dok je funkcija povratnog prenosa $C(s)H(s)W(s)$. Odnosno, regulator $C(s)$ funkcije prenosa procesa, aktuatora i senzora vidi kao jednu funkciju prenosa $H(s)W(s)$.

Statičke performanse

Zahtijev sa praćenjem referentnog signala iz klase polinomjalnih signala se zadovoljava korišćenjem kontrolera:

$$C(s) = \frac{K}{s^h},$$

gdje h definiše tip kontrolera, dok je K pojačanje kontrolera. Na primjer, ukoliko želimo da SAU prati rampa funkciju bez greške, tada h ima vrijednost 2 (pod uslovom da objekat upravljanja nema astatizam), dok se K nalazi iz zahtijeva za konstantom ubrzanja ili greške u praćenju paraboličnog signala. Treba imati u vidu da povećavanje reda astatizma destabiliše sistem u otvorenoj sprezi, što implicira veće vrijednosti upravljačkog signala u zatvorenoj sprezi. Iako linearna teorija ne postavlja ograničenja u pogledu vrijednosti upravljačkih signala, treba uzeti u obzir da u praksi regulatori i aktuatori ne mogu da daju proizvoljne vrijednosti, već postoje radni opsezi u kojima je njihova karakteristika linearna.

Dinamičke performanse

Za poboljšavanje tranzijenta koristi se sljedeći tip kontrolera:

$$C(s) = \frac{\prod_k \left(\frac{j\omega}{a_k} + 1 \right) \prod_z \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_{nz}^2} + \frac{j2\zeta_z \omega}{\omega_{nz}} + 1 \right)}{\prod_i \left(\frac{j\omega}{a_i} + 1 \right) \prod_l \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_{nl}^2} + \frac{j2\zeta_l \omega}{\omega_{nl}} + 1 \right)}.$$

Parametre kontrolera treba odabrati tako da SAU bude stabilan i da ima odgovarajući prelazni proces. Pojačanje ovog kontrolera je jedinično, što znači da ne utiče na grešku u stacionarnom stanju. Prvo se vrši projektovanje kontrolera kojim se podešava željena vrijednost greške i tip sistema, a zatim se biraju parametri ovog kontrolera. Najčešće se koriste kontroleri koji imaju jedan prosti pol i jednu prostu nulu u lijevoj poluravni s -ravni, odnosno redna veza više njih.

Dinamičke performanse

Za poboljšavanje relativne stabilnosti i smanjenje preskoka u vremenskom domenu koristi se lag (eng. phase lag) ili integralni kompenzator koji ima funkciju prenosa:

$$G_i(s) = \frac{\frac{s}{b} + 1}{\frac{s}{a} + 1}, |a| < |b|,$$

pri čemu se pol nalazi bliže koordinanom početku u odnosu na nulu. Naziv lag potiče zbog negativne fazne karakteristike, što će kasnije biti pokazano. Sa druge strane amplitudska karakteristika na određenom opsegu učestanosti ima karakteristiku sličnu integratoru, pa otuda naziv integralni kompenzator. Konačno, lag regulator se najčešće naziva kompenzatorom zbog načina na koji se vrši njegova sinteza (kompenzuje se frekvencijska karakteristika sistema u otvorenoj sprezi).

Dinamičke performanse

Drugi tip regulatora koji se često koristi je lead (eng. phase lead) ili diferencijalni kompenzator:

$$G_i(s) = \frac{\frac{s}{a} + 1}{\frac{s}{b} + 1}, |a| < |b|.$$

Ovaj kompenzator ima istu funkciju prenosa kao i integralni kompenzator. Razlika je u tome što se kod njega nula nalazi bliže koordinatnom početku. Diferencijalni kompenzator se najčešće koristi za povećavanje propusnog opsega, skraćivanje vremena uspona i vremena smirenja. Naziv lead potiče zbog pozitivne fazne karakteristike, dok amplitudska karakteristika na određenom opsegu učestanosti ima karakteristiku sličnu diferencijatoru, pa se zato zove i diferencijalni kompenzator.

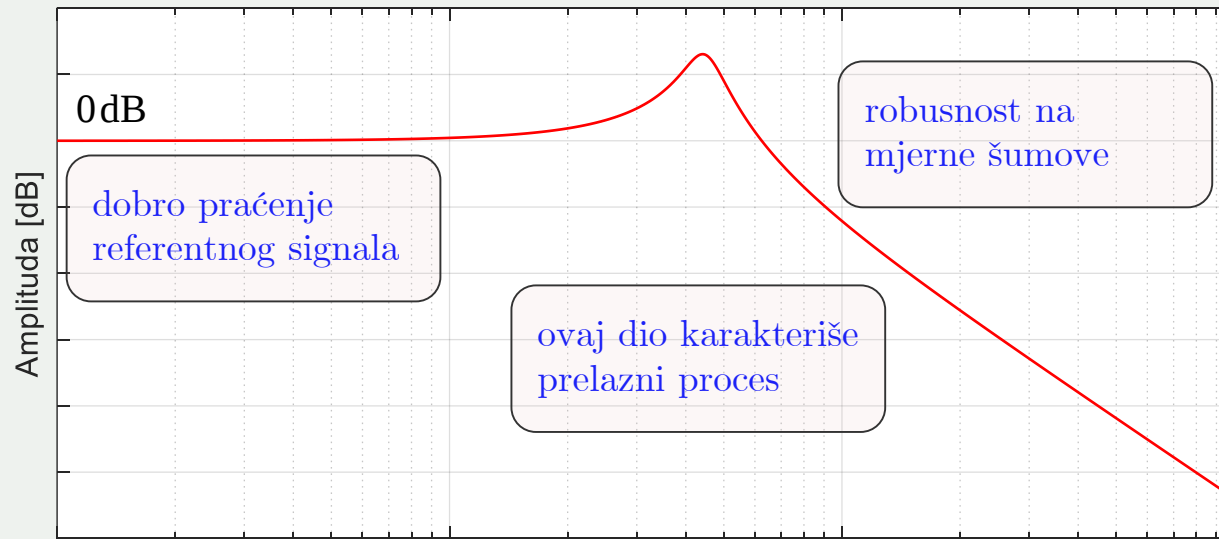
Sinteza regulatora

Kompenzatori se mogu dizajnirati na više načina: analitički, u kompleksnom domenu i frekvencijskom domenu. Analitički pristup je jednostavan ukoliko je funkcija prenosa u otvorenoj sprezi prvog ili drugog reda. U kompleksnom domenu se kompenzatori mogu dizajnirati pomoću metode koja se zove geometrijsko mjesto korijena (GMK). Kod ove metode dominantni polovi sistema se podešavaju na željenu vrijednost. GMK metoda neće biti obrađena u okviru ovog kursa.

Treći način za sintezu kompenzatora je u frekvencijskom domenu. Pomoću ove metode se funkcija povratnog prenosa modifikuje tako da ima željeni oblik, uzimajući u obzir njen uticaj na frekvencijsku karakteristiku spregnutog sistema, odnosno performanse u vremenskom domenu. Upravo, zbog ovakvog načina dizajna, ove komponente SAU-a se nazivaju kompenzatorima, jer se njima kompenzuje funkcija prenosa u otvorenoj sprezi.

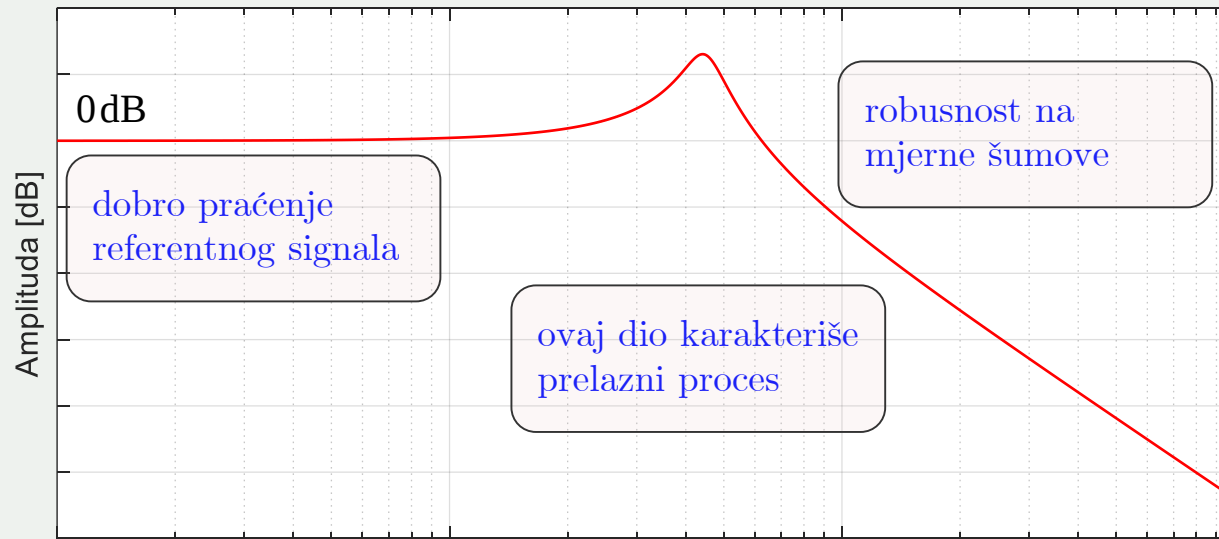
Performanse u frekvencijskom domenu

Kako bi se obezbijedilo dobro praćenje referentnog signala amplitudska karakteristika spregnutog sistema na niskim učestanostima treba da ima jedinično pojačanje, odnosno 0dB na decibelskoj skali. Na visokim učesnostima, van propusnog opsega amplituda treba da ima vrijednosti što bliže nuli, odnosno $-\infty$ dB, kako bi spregnuti sistem bio robusniji na mjerne šumove.



Performanse u frekvencijskom domenu

Karakteristika spregnutog sistema na srednjim učestanostima karakteriše prelazni proces. Veći rezonantni vrhovi znače da će biti i veći preskok u vremenskom domenu. Sa druge strane, veći propusni opseg implicira kraće vrijeme uspona, a i vremena smiranjje (za istu vrijednost rezonantnog vrha).



Veza sa funkcijom povratnog prenosa

Sinteza kompenzatora u frekvencijskom domenu se zasniva na modifikovanju frekvencijske karakteristike u otvorenoj sprezi (eng. loop shaping), kako bi spregnuti sistem imao željene karakteristike. Naravno, najprije treba napraviti vezu između frekvencijske karakteristike u otvorenoj i zatvorenoj sprezi.

Bitne karakterisitke sistema u otvorenoj sprezi, koje utiče na karakteristike/ponašanje sistema sa zatvorenom spregom su:

- margine stabilnosti (pretek pojačanja i pretek faze),
- presječne učestanosti preteka faze i preteka pojačanja,
- statičke konstante greške (konstanta položaja, brzine, itd.).

Dizajn regulatora u frekvencijskom domenu se svodi na podešavanje ovih veličina, jer one direktno utiču na performanse spregnutog sistema u smislu prelaznog procesa i stacionarnog stanja.

Pretek faze i pretek pojačanja

Pretek faze i pretek pojačanja smo definisali na Nikvistovoj krivoj kako mjere relativne stabilnosti, odnosno veličine koje govore koliko je sistem udaljen od kritične tačke $(-1, j0)$. Prilikom projektovanja SAU-a preteke faze i pojačanja treba ostaviti dovoljno velike, jer se time obezbjeđujemo na greške u modelovanju sistema u otvorenoj sprezi, kao i na promjene parametara modela. Preteci pojačanja i faze kod minimalno faznih sistema se mogu očitati i sa Bodeovih dijagrama.

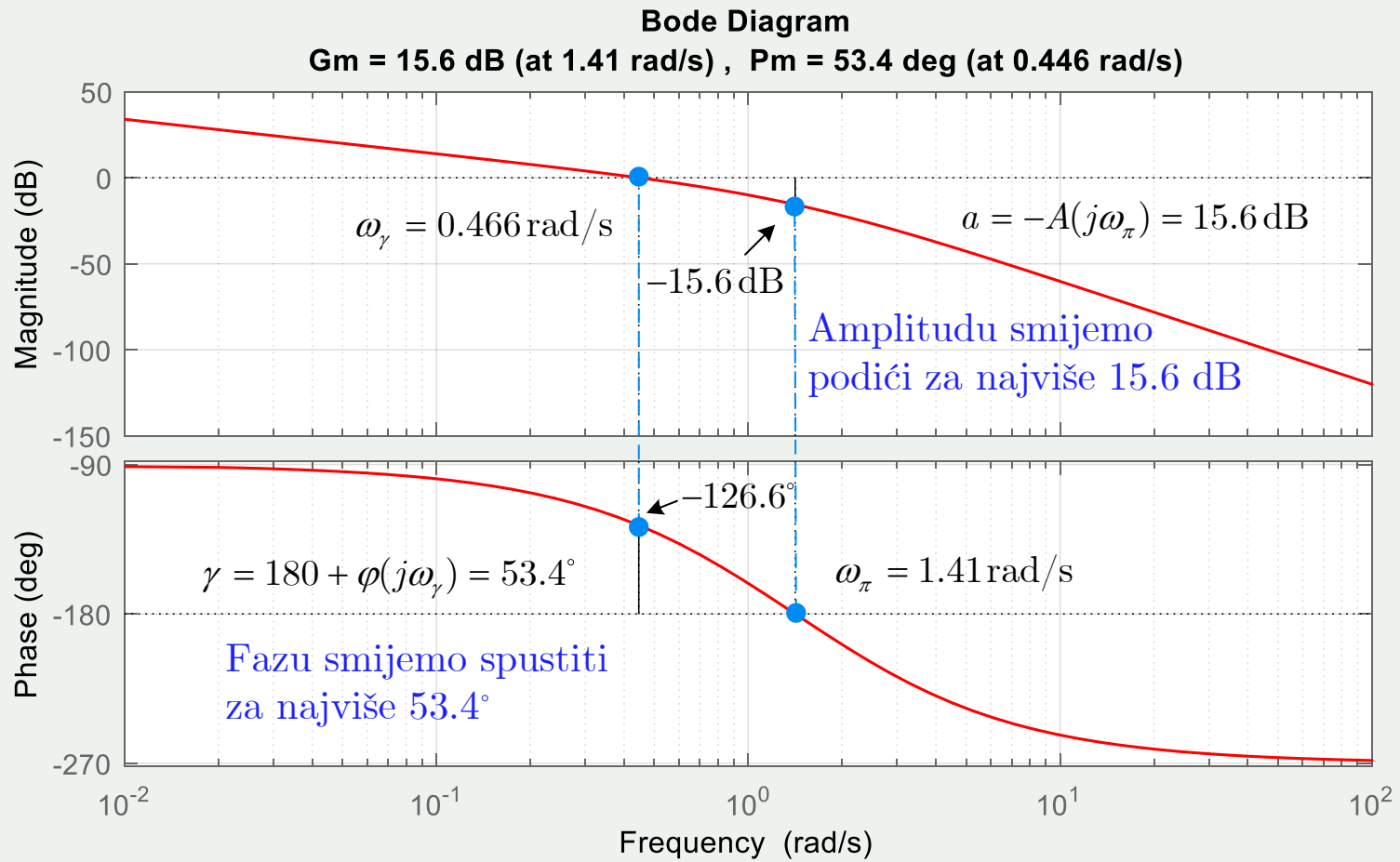
Po definiciji, pretek pojačanja γ je recipročna vrijednost amplitudske karakterisitke na učestanosti na kojoj faza iznosi -180° :

$$a = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|}, \text{ za } \varphi(j\omega_\pi) = -180^\circ \text{ ili u dB } a = -20 \log |W(j\omega_\pi)|.$$

Pretek faze se definiše kao maksimalni ugao za koji se smije zarotirati Nikvistova kriva u negativnom smjeru, a da sistem sa NJPS ostane stabilan:

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(j\omega_\gamma), \text{ za } A(j\omega_\gamma) = 1 \text{ ili } A(j\omega_\gamma) = 0\text{dB}.$$

Pretek faze i pretek pojačanja



Pretek faze i pretek pojačanja

Ako su preteci faze i pojačanje veći od nule, sistem sa jediničnom povratnom spregom će biti stabilan. Odnosno, ako su ove veličine manje od nule, sistem sa NJPS će biti nestabilan.

Za sistem drugog reda, pretek faze se može dovesti u vezu sa faktorom relativnog prigušenja i preskokom:

$$\zeta \approx \gamma / 100, \text{ za } \zeta < 70^\circ,$$

pri čemu smo preskok već ranije definisali:

$$\Pi = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \%.$$

Ove relacije se mogu primijeniti i za sisteme većeg reda, pri čemu je su veze tačnije ukoliko su dodatni polovi i nule dovoljno udaljeni od dominantnih polova. Svakako, date formule se dobre za početno podešavanje parametra regulatora, pa se postupak može iterativno ponavljati, ukoliko specifikacije u vremenskom domenu nijesu zadovoljene.

Pretek faze i pretek pojačanja

Bitno je zapamtiti pravilo da se sa povećanjem preteka faze povećava faktor relativnog prigušenja, a samim tim se smanjuje preskok u vremenskom domenu. Rezonatni vrh spregnutog sistema je približno jednak:

$$M_r \approx \frac{1}{2 \sin(\gamma / 2)}.$$

Konačno, presječna učestanost preteka faze se može povezati sa propusnim opsegom spregnutog sistema. Naime, aproksimativno važi sljedeća veza:

$$\omega_B \cong [1.25, 2] \omega_\gamma.$$

Povećavanjem presječne učestanosti preteka faze, povećava se propusni opseg sistema, a samim tim se skraćuju vrijeme uspona. Vrijeme smirenja je takođe obrnuto proporcionalno propusnom opsegu, ali i faktoru relativnog prigušenja.

Pretek faze i pretek pojačanja

Još jedna korisna aproksimacija koja važi za sistem drugog reda, odnosno za sistem većeg reda sa dominantnim kompleksnim polovima, je veza između presječne frekvencije preteka faze i prirodne neprigušene učestanosti spregnutog sistema:

$$\omega_n \approx \omega_\gamma.$$

Na osnovu ove veze se može napraviti procjena vremena smirenja:

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \approx \frac{4}{0.01 \gamma \omega_\gamma}.$$

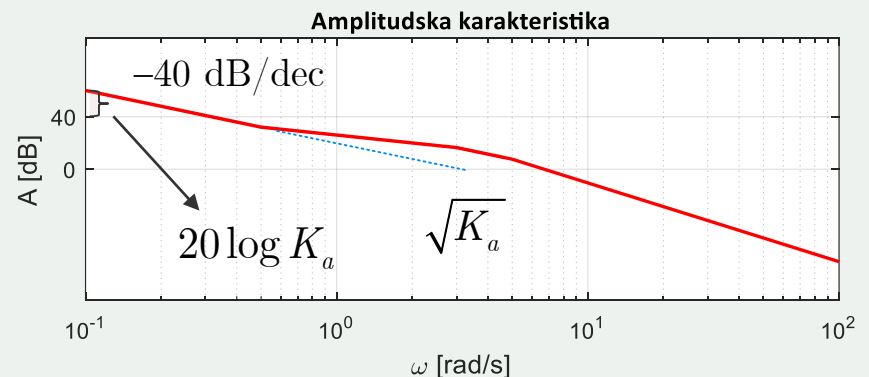
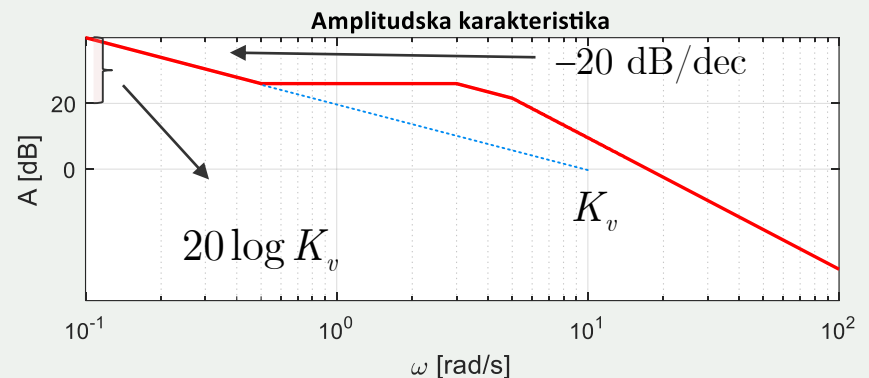
Vrijeme uspona se je proporcionalno propusnom opsegu i može se estimirati pomoću formule:

$$T_r \approx \frac{1 + 1.1\zeta + 1.14\zeta^2}{\omega_\gamma} \cong [1.6 - 2.2] \omega_B,$$

pri čemu je za manje vrijeme uspona bliže donjoj granici gornje opsega.

Konstante greške

Ako funkcija prenosa u otvorenoj sprezi nema astatizam, tada je amplituduska karakteristika na niskim frekvencijama ravna i ima vrijednost $20\log K_p$, gdje je K_p konstanta položaja. Ukoliko funkcija prenosa ima astatizam prvog reda, tada se za nju definiše konstanta brzine K_v . Konstanta brzine predstavlja tačku presjeka početne prave nagiba -20 dB/dec sa ω osom. Takođe, konstanta brzine u dB se može odrediti iz razlike amplitudske karakteristike na 0.1 rad/s i 20 dB (za $K_v=1$ karakteristika počinje od 20 dB). Na sličan način se određuje konstanta ubrzanja K_a .



Primjer – veza između funkcija W i G

Funkcija prenosa sistema u otvorenoj sprezi je jednaka:

$$W = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Presječna učestanost preteka faze i pretek faze su jednaki: 53.4° i 0.466 rad/s. Rezonantni vrh je jednak (u običnim vrijednostima):

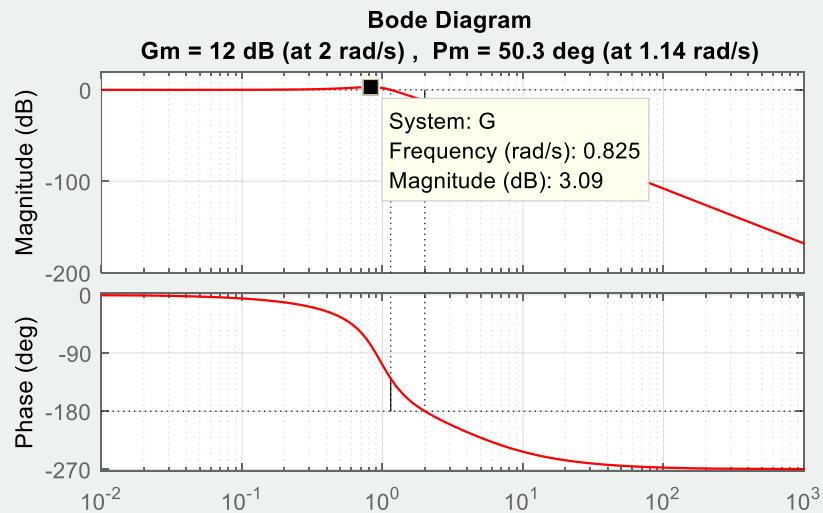
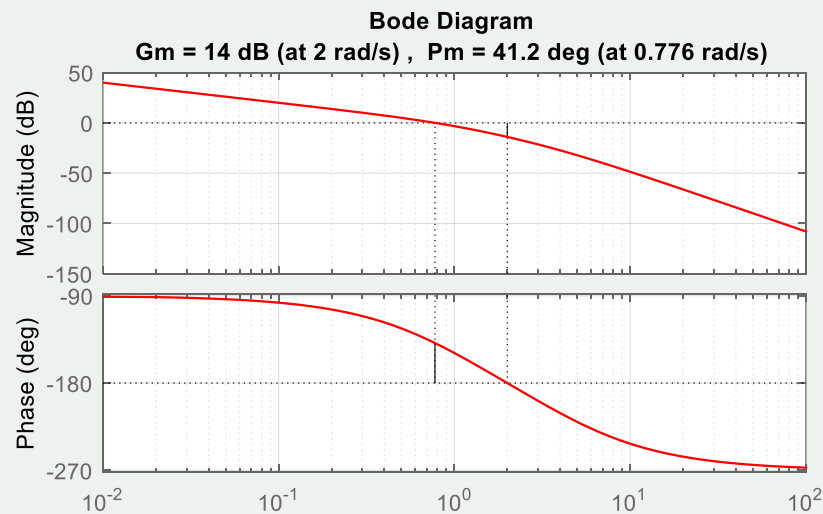
$$M_r \approx 2 \sin(\gamma / 2) \approx 1.1128.$$

Propusni opseg bi trebalo da bude u opsegu:

$$\begin{aligned} \omega_B &\approx [1.25, 2]\omega_\gamma \approx 1.25, 2] \times 0.466 \text{ rad/s} \\ &\approx [0.5825, 0.9320] \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Faktor relativnog prigušenja je približno jednak:

$$\zeta \approx \gamma / 100 = 0.534.$$



Primjer – veza između funkcija W i G

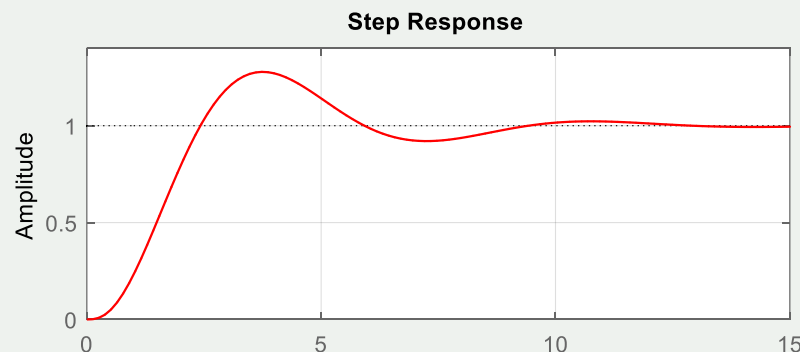
Očekivano vrijeme smirenja je:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{0.01\gamma\omega_\gamma} = \frac{4}{0.534 \times 0.466} = 16.07s,$$

dok bi vrijeme uspona trebalo da bude jednako:

$$T_r \approx \frac{1 + 1.1\zeta + 1.14\zeta^2}{\omega_\gamma} = \frac{1 + 1.1 \times 0.534 + 1.14 \times 0.534^2}{0.466} = 4.1s.$$

Na slici desno je prikazan step odziv sregnutog sistema, a ne prethodnom slajdu Bodeovi dijagrami sistema u otvorenoj sprezi i sa zatvorenom spregom. Poklapanje sa tačnim vrijednostima karakterističnih veličina zavisi od toga koliko je treći pol udaljen od dominantnih polova.



```
>> s=tf('s');  
>> W=3086/(s^2+145.5*s+86.14)/s  
>> margin(W);  
>> figure(2)  
>> margin(G);  
>> G=feedback(K*W,1)  
>> figure(3),  
>> step(G)  
>> bandwidth(G)  
>> stepinfo(G)
```

Primjer – konstante greške

Na slici su prikazane amplitudske karakteristike dva sistema. Odrediti konstante greške i grešku spregnutog sistema u praćenju referentnog step signala.

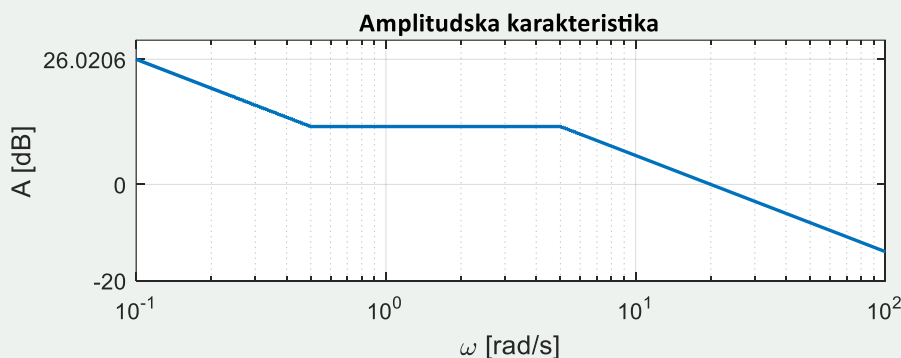
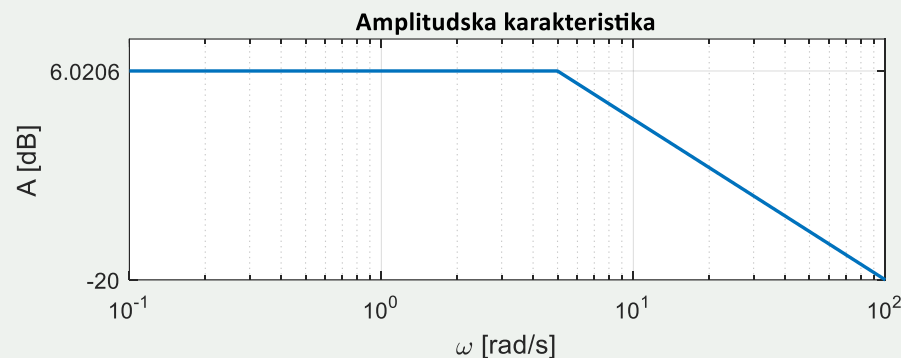
Sa dijagrama se može zaključiti da prvi sistem nema astatizma, a da drugi sistem ima astatizma prvog reda. Shodno, tome konstanta položaja prvog sistema je jednaka:

$$20 \log K_p = 6 \rightarrow K_p = 2,$$

dok su konstante brzine i ubrzanja jednake nuli. Konstanta brzine drugog sistema se računa iz uslova:

$$\begin{aligned} 26 - 20 \log \frac{\omega}{0.1} &= 0 \\ \rightarrow K_v &= 0.1 \times 10^{\frac{26}{20}} = 2. \end{aligned}$$

Konstanta položaja drugog sistema je beskonačno, a konstanta ubrzanja nula.



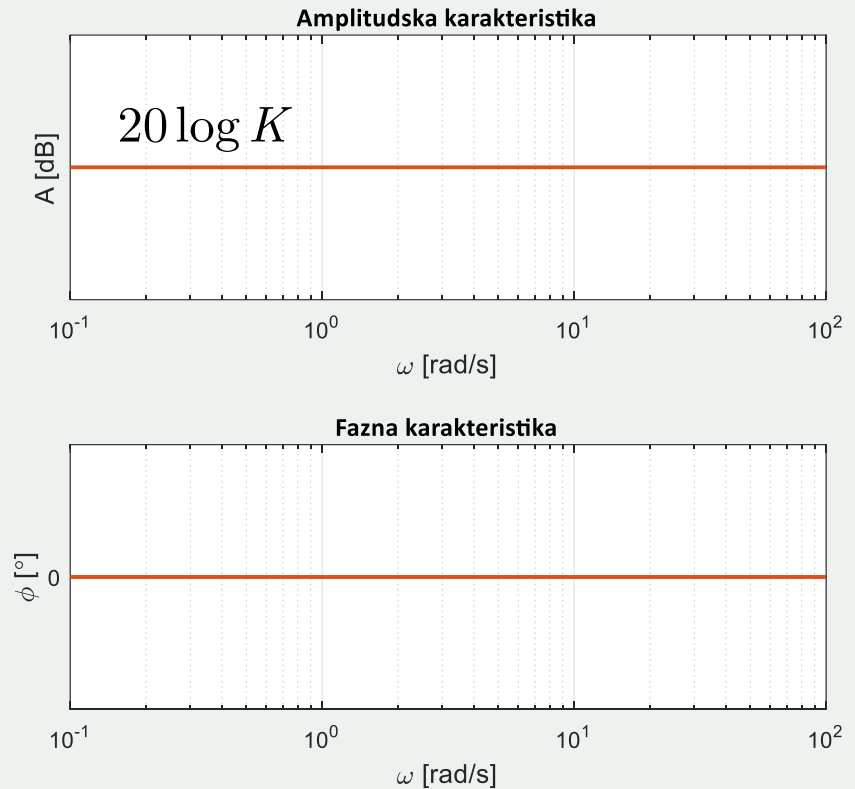
Sinteza u frekvencijskom domenu

Već smo rekli da procedura dizajna SAU-a teče tako što se prvo zadovoljavaju zahtjevi vezani za konstante greške i red astatizma. Ovaj dio sinteze se radi analitički. Nakon toga se dodaju potrebni elementi koji imaju jedinično pojačanje, u cilju zadovoljenja dinamičkih performansi SAU-a. Parametri dodatnih komponenti se ne određuju analitički, već se primjenjuje grafički pristup, posmatranjem Bodeovih dijagrama sistema u otvorenoj sprezi. Pri tome, zahtjeve za željenim dinamičkim performansama treba izraziti u vidu karakterističnih veličina sistema u otvorenoj sprezi. Ako specifikaciju SAU-a zadajemo direktno u vremenskom domenu, onda se mogu koristiti aproksimativne formule za prevođenje tih zahtjeva u frekvencijski domen. Često se može desiti da se na ovaj način ne dobije SAU koji ima željene vremenske karakteristike, ali se procedura može ponavljati iterativno sve dok zahtjevi ne budu ispunjeni.

Pojačavač

Pojačavač se najčešće koristi za korekciju performansi sistema u stacionarnom stanju, odnosno kada treba da se podese željene konstante greške. Ako sistem ima astatizam, a pri tom se nema zahtjeva za praćenjem rampa funkcije, pojačanje se može iskoristiti za podešavanje margina stabilnosti. Pojačavač:

- podiže/spušta amplitudsku karakteristiku
- ne utiče na faznu karakteristiku



$$20 \log K > 0 \text{ dB, za } K > 1$$
$$20 \log K < 0 \text{ dB, za } 0 < K < 1$$

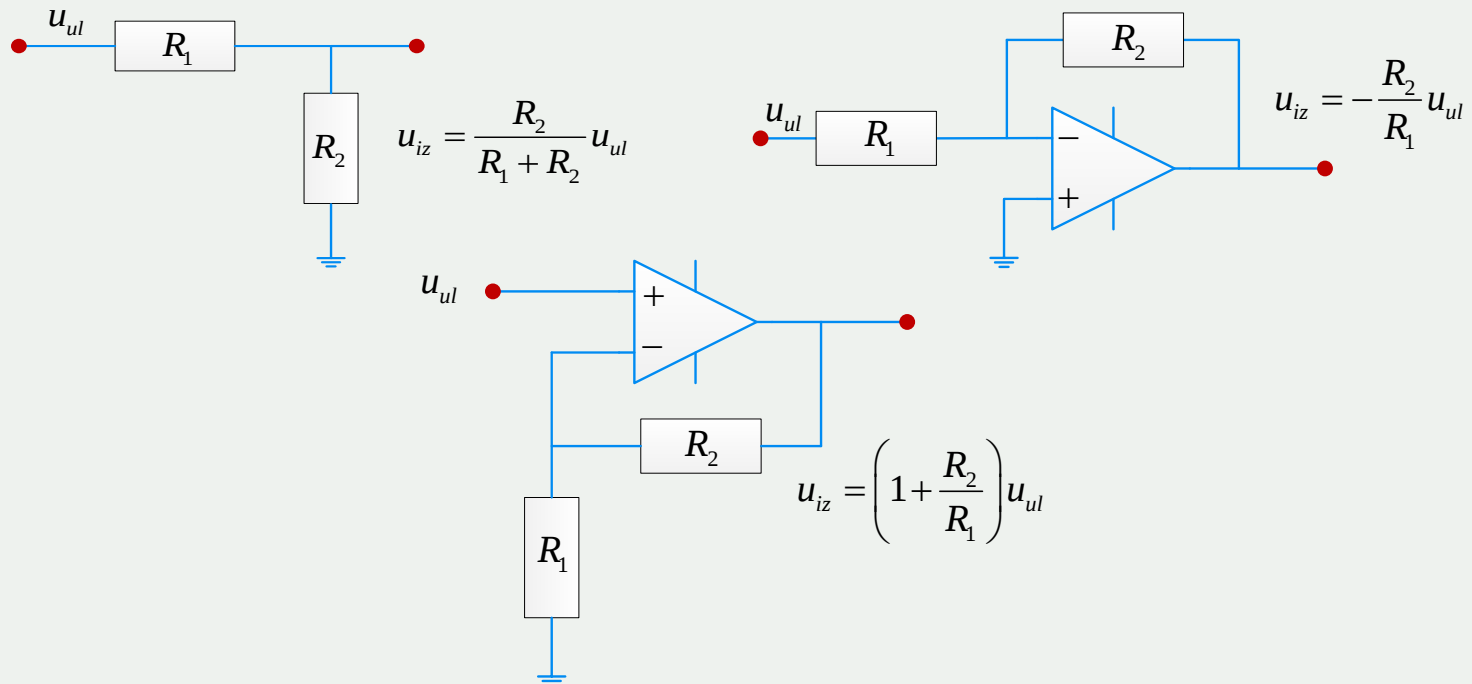
Pojačavač

U tabeli ispod je dat uticaj pojačanja na različite karakteristične veličine sistema. Znak „+“ označava da se data veličina povećava, „–“ da se smanjuje, a praznina da nema generalnog pravila.

	Karakteristike	K>1	K<1
Otvorena sprega	▪ margine stabilnosti ▪ presječna učestanost preteka faze	– +	+ –
Spregnuti sistem	▪ propusni opseg ▪ rezonantni vrh	+ +	– –
Kompleksni domen	▪ faktor prigušenja	–	+
Vremenski domen	▪ preskok ▪ vrijeme smirenja ▪ vrijeme uspona ▪ konstanta greške ▪ greška u stacionarnom stanju	+ – + –	– + + +

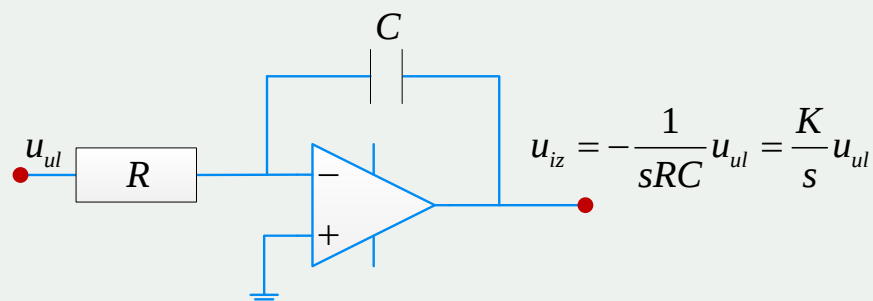
Pojačavač

Ukoliko je pojačanje manje od jedinice, tada se ono može realizovati preko pasivnih elemenata. Ako je pojačanje veće od jedinice, tada se koriste aktivne komponente, koje imaju napajanje. Ispod su date dvije realizacije preko invertujućeg i neinvertujućeg pojačavača.



Pojačavač sa integratorom

Nekad je potrebno povećati red astatizma, kako bi se eliminisala greška u praćenju nekih klasa signala. Dodavanje integratora ima i negativne strane. Ukoliko u direktnu granu dodamo integrator prvog reda, to će značajno destabilisati sistem, jer se na svim frekvencijama unosi negativna faza od 90° , odnosno pretek faze se smanjuje za 90° . Često se može desiti da se takav sistem ne može ustabiliti samo sa pojačavačem. Ispod je data implemetacija jednostrukog integratora K/s pomoću operacionog pojačavača.



Primjer – pozicioni servo

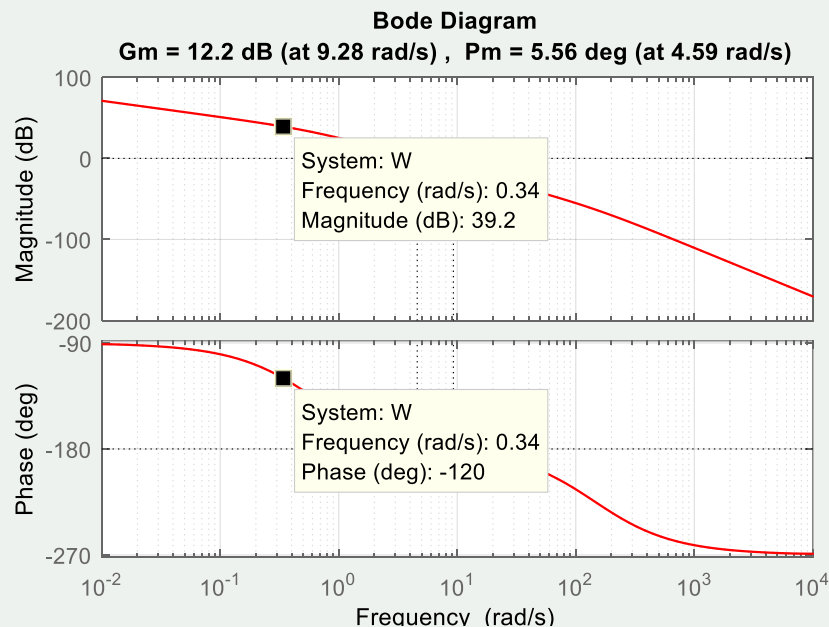
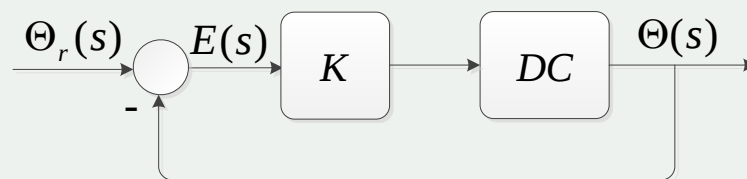
Za određene parametre DC servomehanizma, funkcija prenosa između napona i ugaonog pomjerača je jednaka:

$$W(s) = \frac{3086}{s(s^2 + 145.5s + 86.14)}.$$

Odrediti pojačanje K tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi:

- a) $\gamma^* = 60^\circ$
- b) $a^* = 20dB$
- c) $e^*(\infty) = 0.01$
- d) $\omega_\gamma^* = 10 rad/s$
- e) $K_v^* = 100$

Na slici desno u prikazani Bodeovi dijagrami nekompenzovanog sistema.



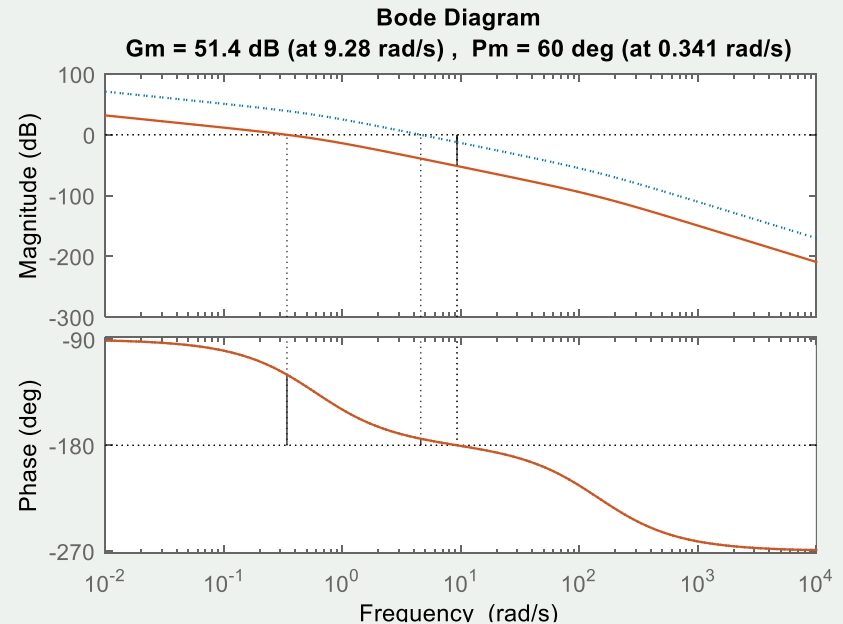
Primjer – pozicioni servo

Kako je željena vrijednost preteka faze:

$$\gamma^* = 60^\circ = 180^\circ + \varphi(j\omega_\gamma^*),$$

a sa pojačanjem ne možemo da utičemo na faznu karakteristiku, jasno da je da treba podesiti presječnu učestanost preteka faze. Prvo treba naći frekvenciju na kojoj faza iznosi -120° . Očitana frekvencija predstavlja željenu presječnu učestanost preteka faze, odnosno, na njoj vrijednost pojačanja treba da bude 0 dB. Dakle, amplitudu treba spustiti za 39.2 dB:

$$20\log K = -39.2 \rightarrow K = 0.011.$$

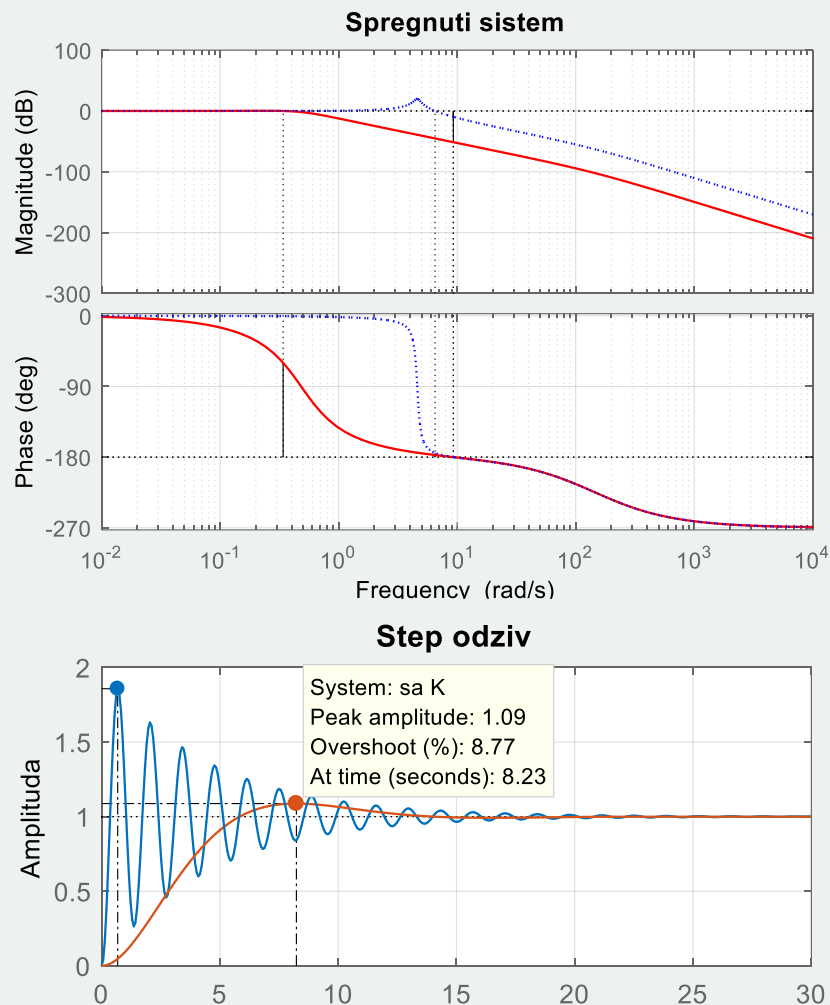


```
>> s=tf('s');  
>> W=3086/(s^2+145.5*s+86.14)/s  
>> K=10^(-39.2/20)  
K = 0.0110  
>> margin(W);  
>> hold on  
>> margin(W);
```

Primjer – pozicioni servo

Na slici desno su prikazani dijagrami spregnutog nekompenzovanog i kompenzovanog sistema. Sistem bez kompenzatora ima mali pretek faze, pa samim tim i veliki rezonantni vrh spregnutog sistema i veliki preskok u vremenskom domenu. Dodavanjem pojačavača čije je pojačanje manje od 1, popravljja se pretek faze, smanjuje preskok, ali i propusni opseg, odnosno brzina sistema.

Na slikama su prikazani step odzivi početnog i kompenzovanog sistema. Može se uočiti da je preskok značajno smanjen i da iznosi 8.23%. Vrijeme uspona je također smanjeno, jer je smanjen i propusni opseg.



Primjer – pozicioni servo

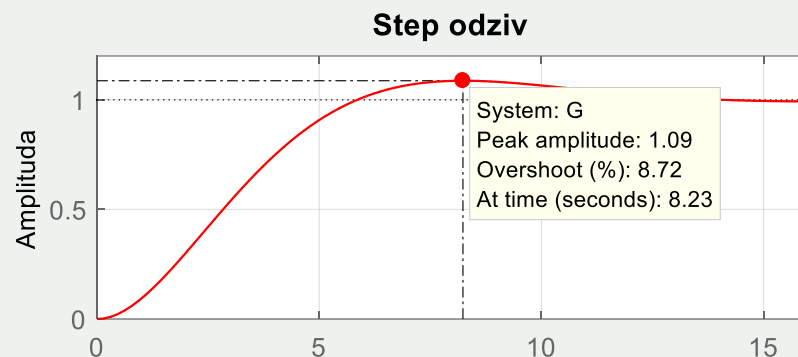
Provjerimo i za ovaj primjer aproksimativne formule. Očekivana vrijednost faktora relativnog prigušenja je oko:

$$\zeta = \gamma^* / 100 = 0.6,$$

što znači da bi preskok trebalo da bude oko 9.48%. Očekivana vrijednost propusnog opsega je u intervalu:

$$[1.5 - 2] \times \omega_\gamma^* = [0.51 - 0.68] \text{ rad/s.}$$

Propusni opseg spregnutog sistema je 0.5472 rad/s, što je u skladu sa očekivanim rezultatima. Zanimljivo je da je u ovom primjeru vrijeme smirenja kompenzovanog sistema smanjeno, iako je smanjen propusni opseg. Razlog za to je što je značajano povećan i faktor prigušenja, a vrijeme smiranja je njemu obrnuto proporcionalno.



```
>> G=feedback(W,1)
>> G1=feedback(K*W,1)
ans = 0.5472
>> bandwidth(G1)
>> margin(G);
>> hold on
>> margin(G1)
>> figure(2)
>> step(G)
>> hold on
>> step(G1)
```

Primjer – brzinski servo

DC motor je opisan funkcijom prenosa $W(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{0.02}{0.0384 s + 0.64}$.

Dizajnirati kontroler tako da greška u praćenju rampe funkcije bude 0.01.
Nacrtati principijelnu šemu upravljanja.

Kako sistem u otvorenoj sprezi nema astatizam, treba odabrati sljedeći kontroler:

$$C(s) = \frac{K}{s},$$

gdje se K traži uz uslova da je greška za linearni referentni signal bude jednaka 0.01:

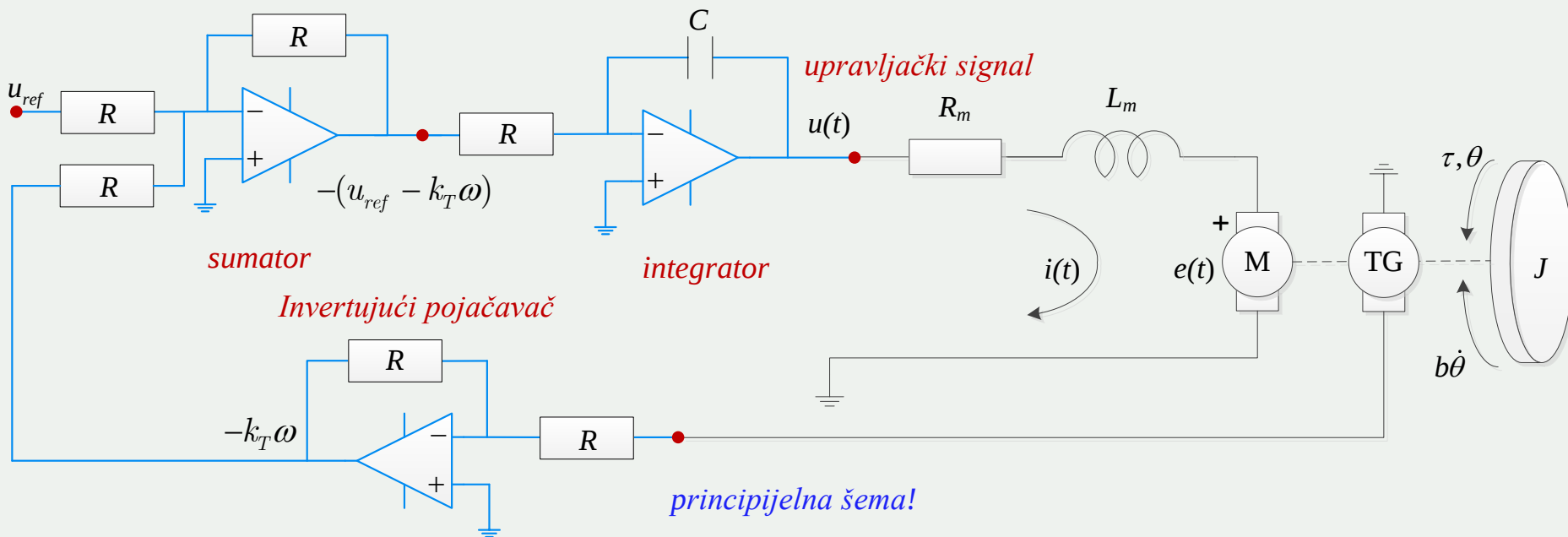
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + C(s)W(s)} = 0.01.$$

Iz prethodnog uslova se dobija da je $K=3200$.

Voditi računa da je nova funkcija povratnog prenosa $C(s)W(s)$.

Primjer – upravljanje brzinom

Ispod je data principijelna šema SAU-a. Vrijednosti otpornika i kondenzatora treba odabrati na osnovu prethodnog proračuna. Za formiranje signala greške korišten je sumator, pri čemu je prije toga napon tahogenetaora invertovan kako bi se dobio negativan predznak. Referentni signal se zadaje u vidu napona.



Integralni kompenzator

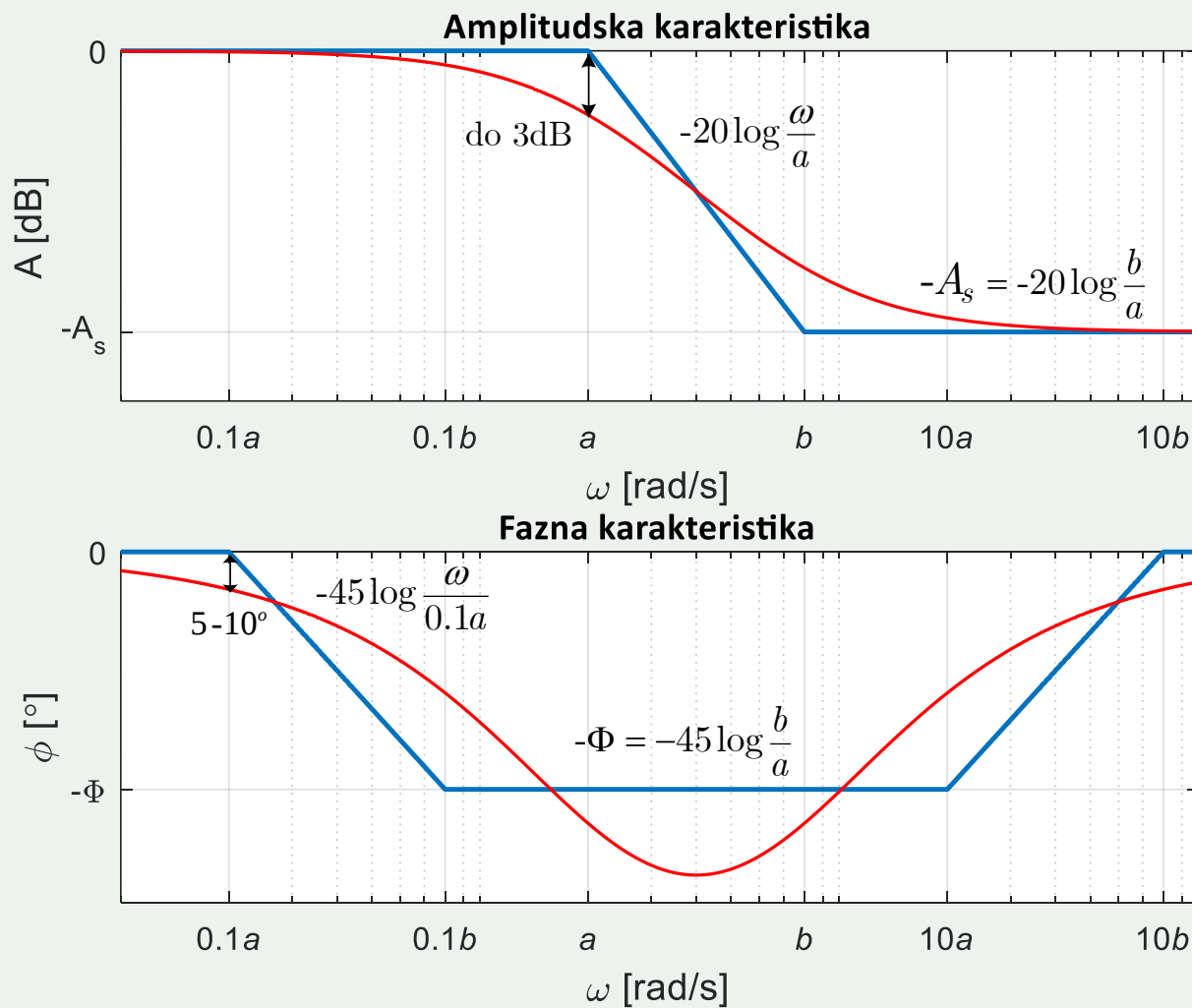
Često kod sistema upravljanja imamo dva zahtjeva: jedan vezan za grešku u stacionarnom stanju (ili konstante greške), a drugi vezan za stabilnost i dinamiku sistema (pretek faze, pojačanja ili neku drugu frekvencijsku karakteristiku sistema u otvorenoj sprezi).

Proporcionalni regulator K se ne može iskoristiti za ispunjavanje oba zahtjeva. Pojačanje K se tada koristi za podešavanje greške u stacionarnom stanju (ili konstante greške), dok se za podešavanje frekvencijskih karakteristika koriste integralni i diferencijalni kompenzatori. Funkcija prenosa integralnog kompenzatora je:

$$G_i(s) = \frac{s / b + 1}{s / a + 1}, a < b.$$

Integralni kompenzator na niskim učestanostima ne utiče na sistem, na srednjim učestanostima se ponaša kao integrator, dok se na visokim učestanostima ponaša kao pojačavač.

Integralni kompenzator



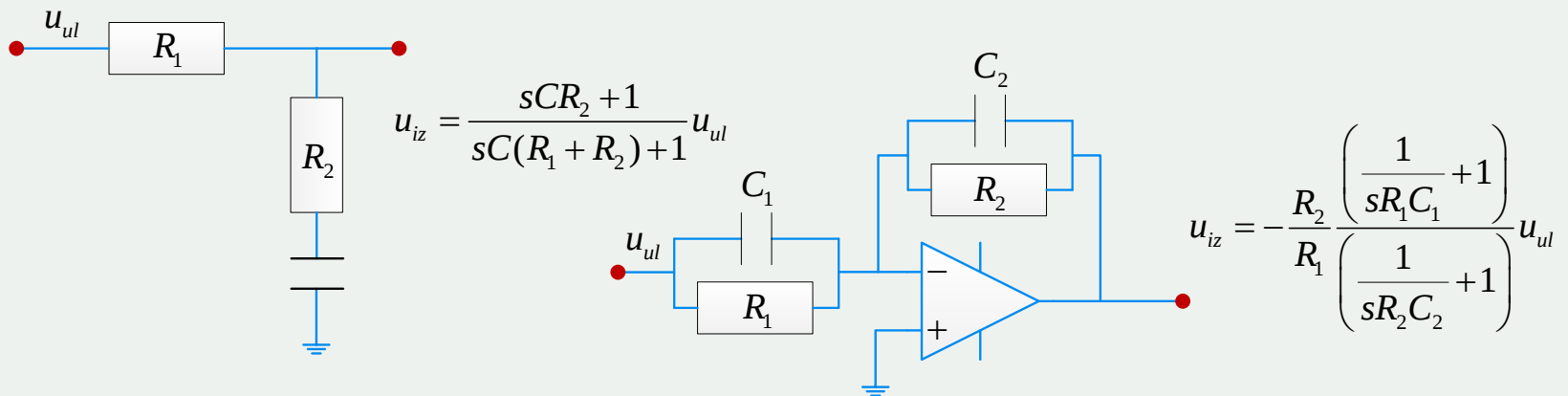
Integralni kompenzator

Integralni kompenzator ima jedinično pojačanje, pa samim tim ne utiče na konstante greške i grešku u stacionarnom stanju sistema sa NJPS. Iz toga razloga uvijek treba prvo treba odrediti potrebni red astatizma i izračunati K , i time zadovoljiti zahtjeve vezane za konstante greške. Nakon toga pristupiti sintezi integralnog kompenzatora.

Integralni kompenzator može da smanji presječnu učestanost preteka faze, povećava pretek faze i relativnu stabilnost, a samim tim i da smanji vrijednost rezonantnog vrha spregnutog sistema i preskoka u vremenskom domenu. Pored toga, integralni kompenzator smanjuje propusni opseg spregnutog sistema, odnosno usporava sistem povećavajući vrijeme uspona, a najčešće i vrijeme smirenja (vrijeme smirenja je obrnuto proporcionalno propusnom opsegu, ali i faktoru relativnog prigušenja koji se takođe smanjuje).

Integralni kompenzator

Integralni kompenzator se takođe može realizovati pomoću pasivnih ili aktivnih komponenti, u zavisnosti od toga da li je pojačanje veće ili manje od nule (integralni kompenzator obično ide u paru sa pojačavačem). Ispod je dati primjeri realizacija. Predložena realizacija preko aktivnih komponenti ima negativan predznak pojačanja, što znači da bi redno trebalo vezati invertujući pojačavač. Takođe treba imati u vidu da veći broj aktivnih komponenti povlači sa sobom i veću cijenu implementacije sistema upravljanja.



Sinteza integralnog kompenzatora

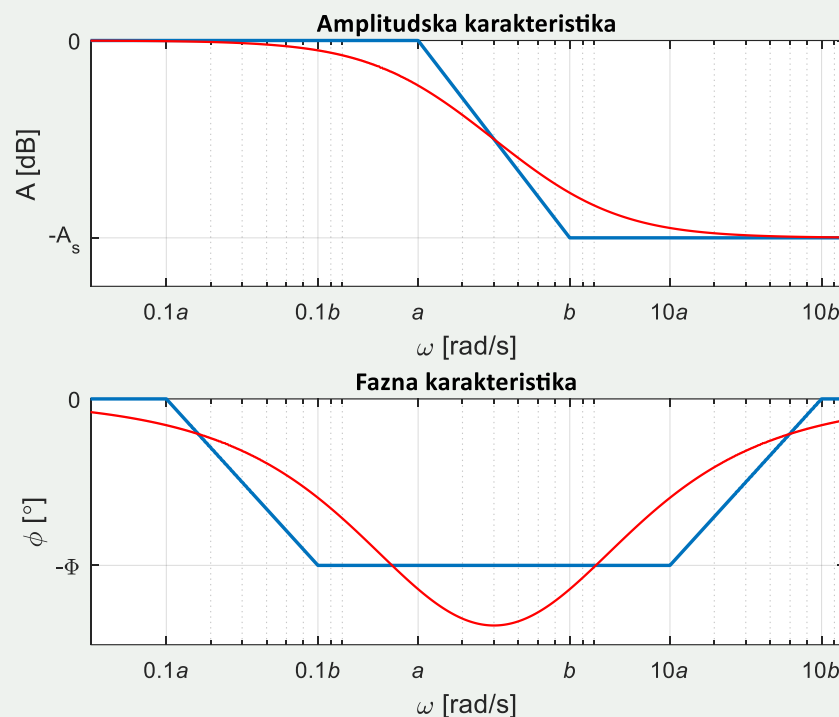
Ukoliko pomoću integralnog kompenzatora želimo da spustimo amplitudu na nekoj učestanosti ω_i za vrijednost A_s , a da pri tome ne utičemo na fazu, tada se koristi dio karakteristike na kojoj se G_i ponaša kao čisto pojačanje.

Prvo se bira parametar b iz uslova da fazni pomjeraj na ω_i bude jednak nuli:

$$10b = \omega_i \rightarrow b = \frac{\omega_i}{10}.$$

Parametar a se bira iz uslova da pojačanje bude jednako $-A_s$:

$$-A_s = -20 \log \frac{b}{a} \rightarrow a = b \times 10^{-A_s/20}.$$



$$b = \frac{\omega_i}{10}, a = b \times 10^{-A_s/20}$$

Sinteza integralnog kompenzatora

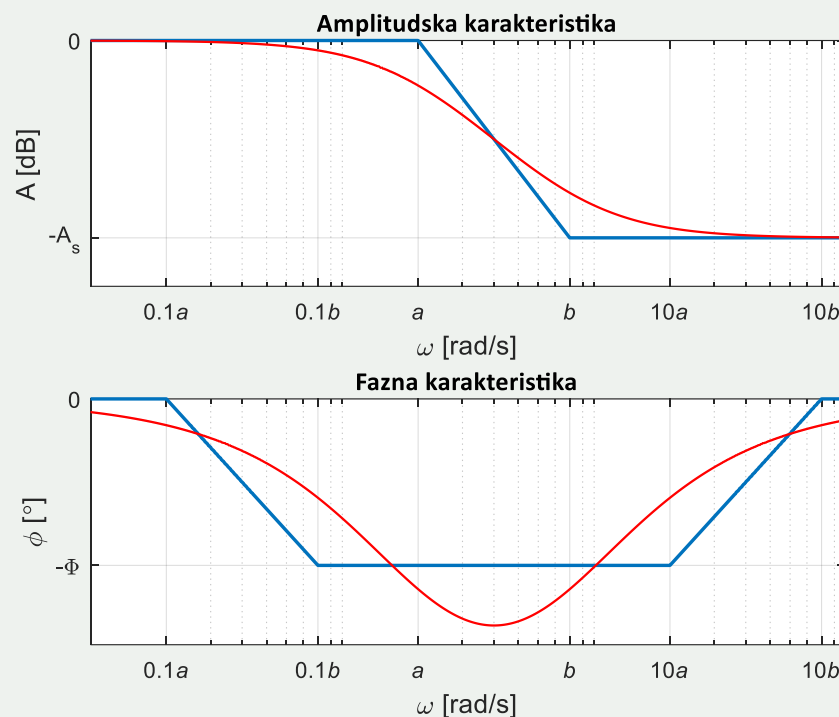
Predloženi način nije i jedini način za odabir tačaka a i b . Nekad se može zahtijevati da na učestanosti ω_i spustimo amplitudu za A_s , a da pri tome ne utičemo na amplitudu na nekoj nižoj učestanosti ω_j . Tada prvo treba fiksirati parametar a :

$$a = \omega_j,$$

dok se parametar b se bira iz uslova da pojačanje na ω_i bude jednako $-A_s$:

$$-A_s = -20 \log \frac{b}{a} \rightarrow b = a \times 10^{A_s/20}.$$

Ako je se dobije da je $b > \omega_i$, tada treba usvojiti dvostruki integrator.



$$b = \omega_j, b = a \times 10^{A_s/20}.$$

Treba voditi računa da su date relacije izvedene na osnovu asimptotske karakteristike.

Primjer – pozicioni servo

Za određene parametre DC motora, funkcija prenosa između napona i ugaonog pomjeraja je jednaka:

$$W(s) = \frac{3086}{s(s^2 + 145.5s + 86.14)}.$$

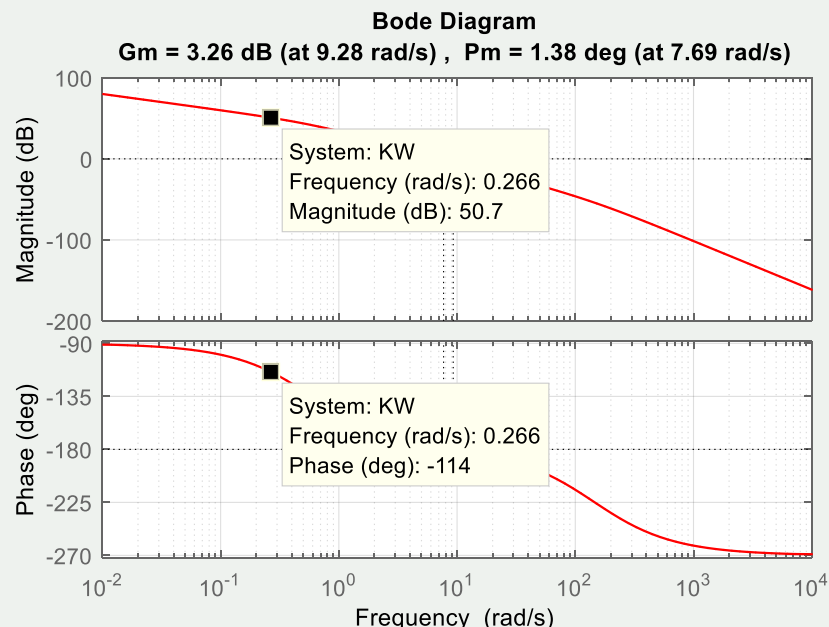
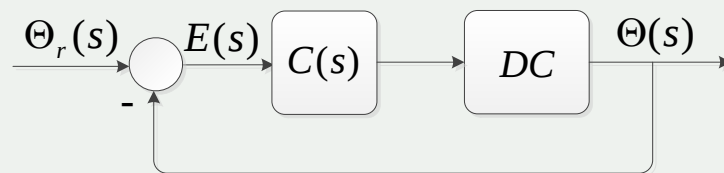
Izvršiti sintezu kompenzatora tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi:

$$K_v^* = 100, \gamma^* = 60^\circ (\pm 3^\circ).$$

Pojačanje sistema se određuje iz uslova:

$$K_v^* = 100 = \lim_{s \rightarrow 0} sKW(s) = K \frac{3086}{86.14}$$
$$\rightarrow K = 2.7913$$

Na slici desno u prikazani Bodeovi dijagrami sistema nakon unošenja pojačanja.



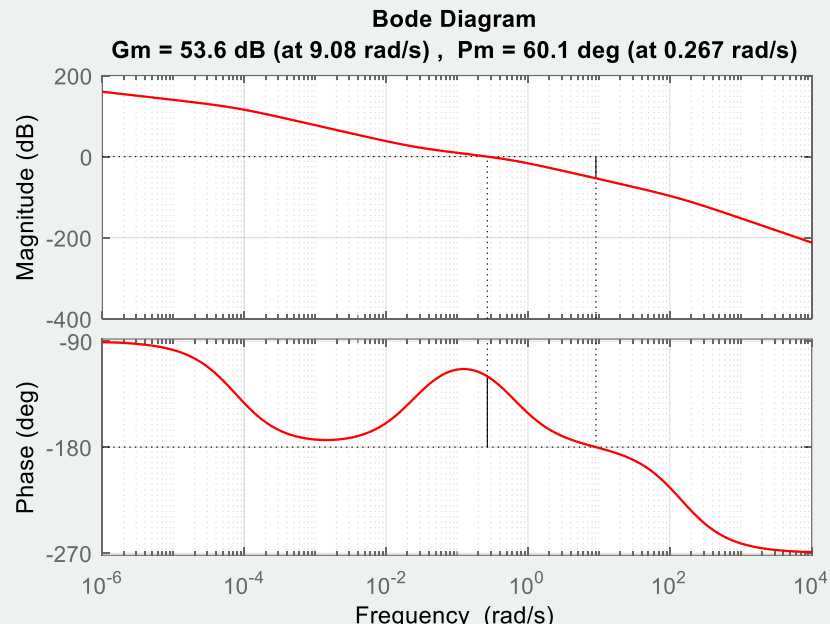
Primjer – pozicioni servo

Kada podešavamo pretek faze na željenu vrijednost, treba imati u vidu karakteristiku realnog integratora koji na učestanosti $10b$ unosi negativnu fazu od $5-10^\circ$. To znači da u ovom slučaju nećemo tražiti frekvenciju na kojoj faza iznosi -120° , već ćemo se pomjeriti ulijevo za 6° (-114°), jer će nakon sinteze integralnog kompenzatora faza na posmatranoj frekvenciji iznositi oko -120° .

Sa Bodeovih dijagrama, nakon dodavanja K , se očitavaju sljedeći podaci:

$$\omega_i = 0.224 \text{ rad/s i } A_s = 50.7 \text{ dB,}$$

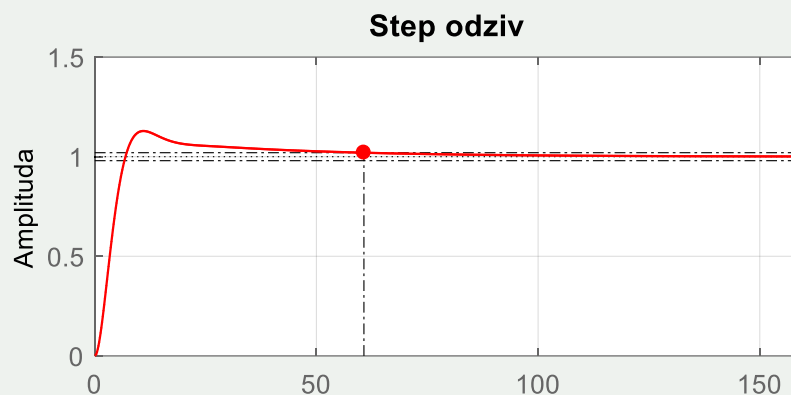
odakle se dobija da je $a=7.5853 \times 10^{-5}$ i $b=0.026$. Na slici iznad su prikazani Bodeovi dijagrami kompenzovanog sistema. Može se primijetiti da pretek faze ima zadovoljavajuću vrijednost.



Primjer – pozicioni servo

Na slici je prikazan step odziv spregnutog sistema. Može se uočiti da preskok ima zadovoljavajuću vrijednost, međutim vrijeme smirenja je veliko, oko 60s. Vrijeme smirenja je povećano iz razloga što je integralni kompenzator smanjuje propusni opseg sistema. U suštini što se tačka 10b nalazi lijevlje od presječne učestanosti preteka faze i što je A_s veće, to će propusni opseg biti više smanjen.

Propusni opseg sistema je 0.4308 rad/s, dok se na osnovu aproksimativnih formula očekivalo da će on bude u intervalu [0.4005, 0.5340] rad/s. Preskok sistema je 12.9%, a očekivana vrijednost je bila 9.42% (provjeriti proračun).



```
>> s=tf('s');  
>> W=3086/(s^2+145.5*s+86.14)/s  
>> K=100*86.14/3086  
>> margin(K*W);  
>> b=0.26/10  
>> a=b*10^(-50.7/20)  
>> Gi=(s/b+1)/(s/a+1)  
>> margin(K*W*Gi)  
>> G=feedback(K*Gi*W,1)  
>> step(G)  
>> bandwidth(G)
```