SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje	Analiza	Dizajn
Klasifikacija sistema Diferencijalne jednačine Funkcija prenosa • Polovi, nule, pojačanje • Strukturni blok dijagrami • Graf toka signala Model u prostoru stanja • Kanonične forme • Linearizacija • Rješavanje jednačina stanja	Kontrolabilnost i opservabilnost Stabilnost sistema • Raus • Nikvist Performanse SAU-a • Stacionarno stanje • Prelazni proces • Kompleksni domen Frekvencijske karakteristike • Bodeovi dijagrami	Specifikacije sistema Kompenzatori • Pojačavač • Integralni kompenzator • Diferencijalni kompenzator • Diferencijalno - integralni kompenzator PID regulator Fizičke realizacije Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 4

Prostor stanja: jednačine kretanja, kanonične forme, linearizacija sistema

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu fundamentalnu matricu sistema
- Odrede analitički izraz promjenljivih u prostoru stanja za zadatu pobudu i početne uslove
- Odrede funkciju prenosa sistema na osnovu poznatog SS modela
- Odrede SS model na osnovu poznate funkcije prenosa
- Lineraziju nelinearni sistem zadat u prostoru stanja

Kretanje sistema u prostoru stanja

Generalno, u prostoru stanja ponašanje sistema se modeluje na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Promjenljive stanja predstavljaju minimilan skup linearno nezavisnih promjenljivih, pri čemu one mogu, ali ne moraju da imaju fizički smisao.

Specijalno za LTI sisteme važi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Nas zanima kako analitičkim putem da odredimo vremenske oblike promjenljivih stanja $\mathbf{x}(t)$ i izlaza sistema $\mathbf{y}(t)$, za zadate početne uslove $\mathbf{x}_0$ i pobudu sistema $\mathbf{u}(t)$. Odnosno, zanima nas kako da riješimo gornji sistem jednačina.

Odziv na početne uslove

Za početak posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu, odnosno slučaj kada je ulazni signal jednak nuli:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Za rješenje gornjeg sistema se može pretpostaviti da je u obliku reda:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \cdots.$$

Uvrštavanjem prethodne jednačine u polaznu jednačinu i izjednačavanjem koeficijenata sa lijeve i desne strane dobija se:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \dots\right)\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0.$$

Funkcija označena sa $e^{\mathbf{A}t}$ se zove matrična ekponencijalna funkcija, zbog analogije sa skalarnom eksponencijalnom funkcijom:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2 t^2 + \frac{1}{3!}a^3 t^3 + \cdots.$$

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}, \quad \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

Odziv na početne uslove

Dakle, prirodni odziv sistema je jednak:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0.$$

Matrična funkcija $e^{\mathbf{A}t}$ se u terminologiji upravljanja zove i fundamentalna matrica sistema ili matrica tranzicije, pri čemu se obično označava sa $\mathbf{\Phi}(t)$. Matrica $\mathbf{\Phi}(t)$ sadrži sve informacije o dinamici sistema, odnosno njome je definisano kretanje sistema u prostoru stanja. Fundamentalna matrica se može definisati i u Laplasovom domenu. Prebacivanjem homogene diferencijalne jednačine u s-domen dobija se:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = \overbrace{\boxed{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}}^{\mathbf{\Phi}(s)}\mathbf{x}_0 \rightarrow \boxed{\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right).}$$

Ukoliko su početni uslovi poznati u nekom proizvoljnom trenutku t_1, onda će odziv na početne uslove biti jednak (osobina vremenske invarijantnosti):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_1)\mathbf{x}(t_1).$$

Primjer - odziv na početne uslove

Autonomni sistem ($u(t)$=0) je zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti fundamentalnu matricu sistema u vremenskom i kompleksnom domenu, kao i promjenljive stanja, za zadate početne uslove.

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

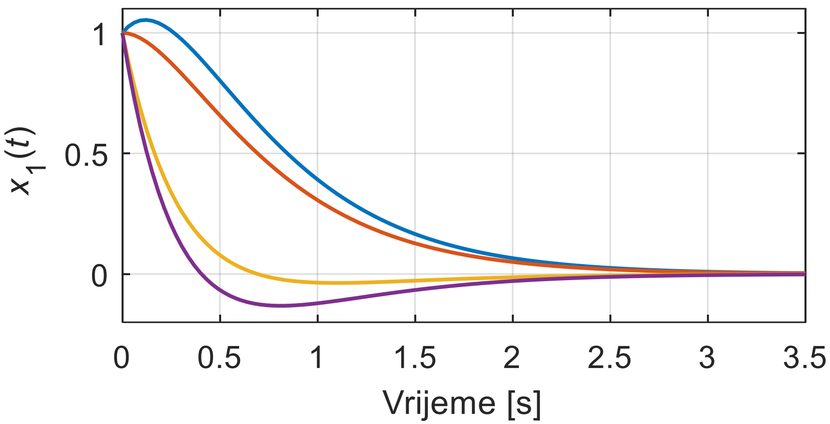
```
>> A=[-2 1;0 -3]
>> x0=[2;1];
>> syms t
>> Fi=expm(A*t)
>> x=Fi*x0
Fi =
[ exp(-2*t), exp(-2*t) - exp(-3*t)]
[         0,             exp(-3*t)]
x =

 3*exp(-2*t) - exp(-3*t)
              exp(-3*t)
```

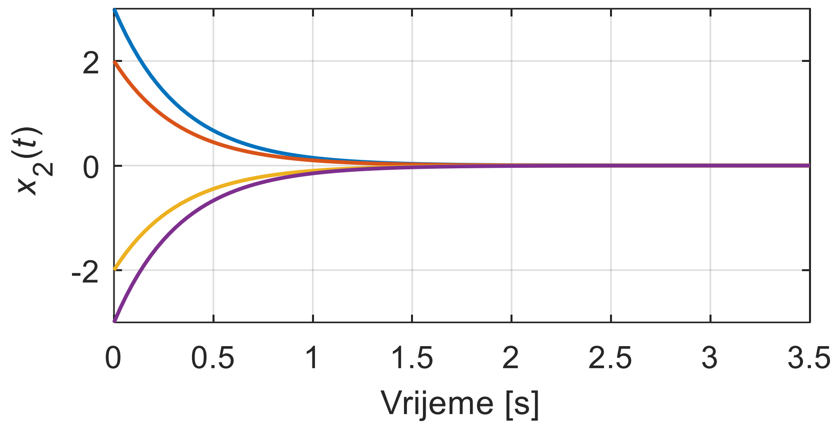
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

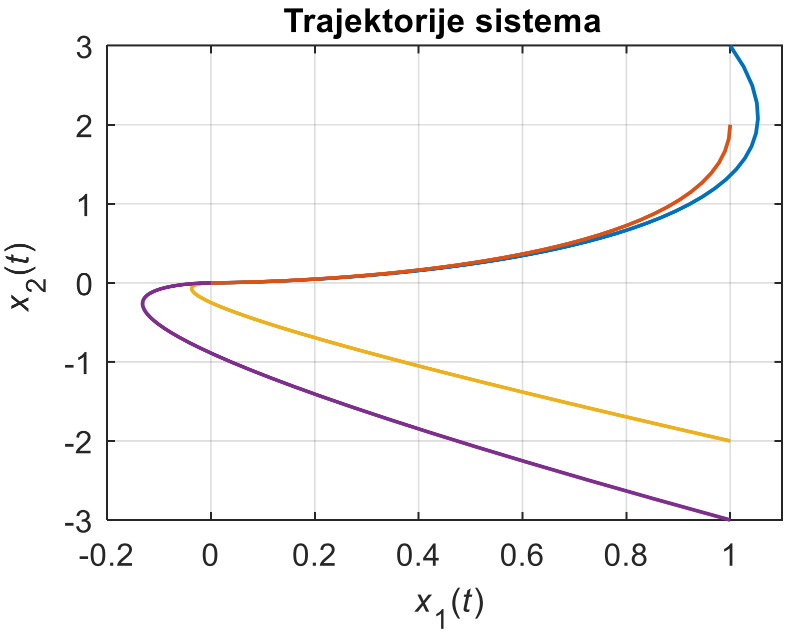
← Promjenljiva stanja x_1

← Promjenljiva stanja x_2

Primjer - odziv na početne uslove







Na slikama iznad su prikazane promjenljive stanja za različite početne uslove. Na slici lijevo su prikazane odgovarajuće trajektorije sistema u prostoru stanju, odnosno zavisnost $f(x_1,x_2)$. Na primjer, sistem se kreće iz tačke (1, 3) prikazanom putanjom i zaustavlja se u tački (0,0). Sa prve dvije slike se uočava da mu je potrebno oko $3s$ da pređe pomenutu (i svaku ostalu) putanju.

Odziv sistema na pobudu

Do analitičkog izraza za promjenljive stanja pobuđenog sistema se takođe može doći posmatranjem vektorske jednačine stanja u s-domenu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s).$$

Iz prethodne jednačine se može izraziti vektor $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\ \mathrm{U}(s) = \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(s)\mathbf{B}\ \mathrm{U}(s).$$

Izraz za $\mathbf{x}(t)$ se dobija primjenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu, pri čemu treba primijetiti da drugi sabirak u prethodnom izrazu predstavlja konvoluciju u vremenskom domenu:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Konačno, izlazni signal je jednak:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathrm{t}).$$

Primjer – odziv sistema na zadatu pobudu

Sistem je zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \ \ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Odrediti odziv zadatog sistema na step pobudu. Smatrati da su početni uslovi jednaki nuli.

Fundamentalna matrica sistema je:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Odziv sistema je jednak:

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}.$$

```
A=[-2 1;0 -3];B=[0;1];C=[0 1];
x0=[2;1];
syms t tau
Fi=expm(A*t)
Fi1=subs(Fi,t-tau)
x=Fi*x0+int(Fi1*B*1,tau,0,t)
y=C*x
```

Ulazni signal je step funkcija, pa je $u(\tau)=1$. Voditi računa da je riječ o LTI sistemu, odnosno da važi princip superpozicije. Granice integrala zavise od vremenskog intervala u kojem je definisan ulazni signal.

Određivanje TF na osnovu SS

Da bi odredili vezu između prostora stanja i funkcije prenosa, jednačine stanja i izlaza iz vremenskog domena treba prebaciti u Laplasov domen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \cancelto{0}{\mathbf{x}(0^-)} &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

Konačno, veza između funkcije prenosa matrica **A**, **B**, **C** i **D**.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Posmatrajući prethodni izraz, može se zaključiti da je karakteristični polinom sistema jednak:

$$f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Primjer - određivanje TF na osnovu SS

Odrediti funkciju prenosa sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcija prenosa je jednaka:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{12s^2 + 65s + 39}{s^3 + 4s^2 + 2s + 3}.$$

Karakteristični polinom se može odrediti i na sljedeći način:

$$f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 4s^2 + 2s + 3.$$

```
>> A=[1 2 3;0 0 1;-2 -1 -5]; B=[2;5;1]; C=[1 2 0]; syms s
>> G=simplify(C*(s*eye(3)-A)^-1*B)
G =
(12*s^2 + 65*s + 39)/(s^3 + 4*s^2 + 2*s + 3)
>> roots([1 4 2 3])
>> det(s*eye(3)-A) % karakteristični polinom se može odrediti na osnovu A
s^3 + 4*s^2 + 2*s + 3
```

Određivanje SS na osnovu TF

Prethodno je pokazano kako odrediti funkciju prenosa sistema, ako je poznat njegov model u prostoru stanja. Sada treba pokazati kako dobiti model u prostoru stanja, u slučaju kada je poznata funkcija prenosa.

Postoji beskonačan broj „realizacija“ sistema u prostoru stanja, jer postoji beskonačan broj različitih prostora. Sa druge strane različitim realizacijama sistema u prostoru stanja uvijek odgovara jedna funkcija prenosa.

Prostor stanja predstavlja n-dimenzionalni koordinatni sistem, te se različite realizacije mogu dobiti raznim linearnim transformacijama, tj. smjenama i prelaskom u drugi koordinatni sistem.

Sve realizacije su ekvivalentne u matematičkom smislu. Međutim, postoje neki stanadardni načini zapisivanja jednačina stanja, odnosno takozvane kanonične realizacije. Jedna reprezentacija može imati prednosti u odnosu na druge. Na primjer, za potrebe analize, promjenljive stanja nekad treba odabrati tako da imaju fizički smisao, a nekad ih je pogodnije zapisati u kanoničnoj formi.

Određivanje SS na osnovu TF

Prije nego što pokažemo kako se određuje model sistema u prostoru stanja zadatog funkcijom prenosa u opštem obliku:

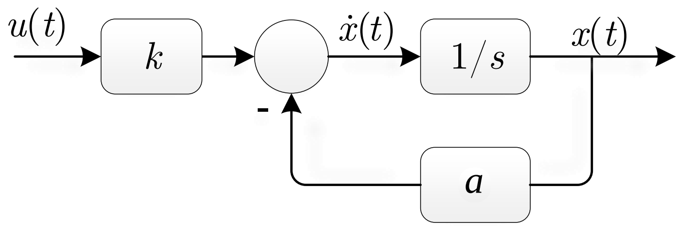
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1.$$

razmotrićemo funkciju prenosa prvog reda i odgovarajuću diferencijalnu jednačinu:

$$G(s) = X(s) / U(s) = \frac{k}{s+a} \Rightarrow \dot{x}(t) = -ax(t) + ku(t)$$

Kvazi-analogni blok dijagram ili simulacioni dijagram sistema je dijagram koji se sastoji od elementarnih komponenti: integratora, sabirača i pojačavača. Konkretno za dati primjer, on se može nacrtati na osnovu diferencijalne jednačine.

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + ku(t)$$

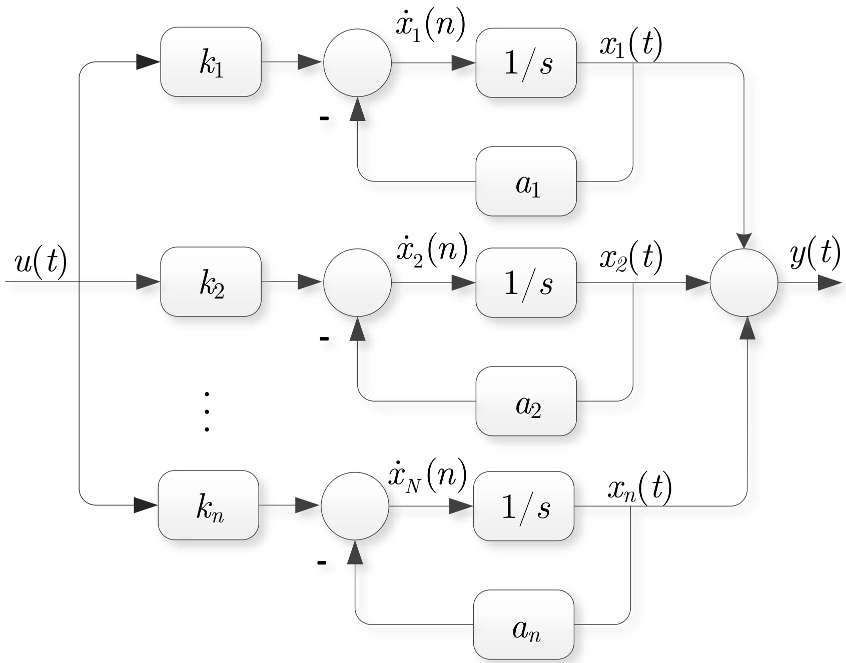


Dijagonalna kanonična forma

Paralelno programiranje je postupak za određivanje modela u prostoru stanja sistema opisanih funkcijama prenosa koje imaju proste i realne polove:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s+a_1)(s+a_2)\ldots(s+a_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s+a_i}, m < n \text{ i } a_n = 1.$$

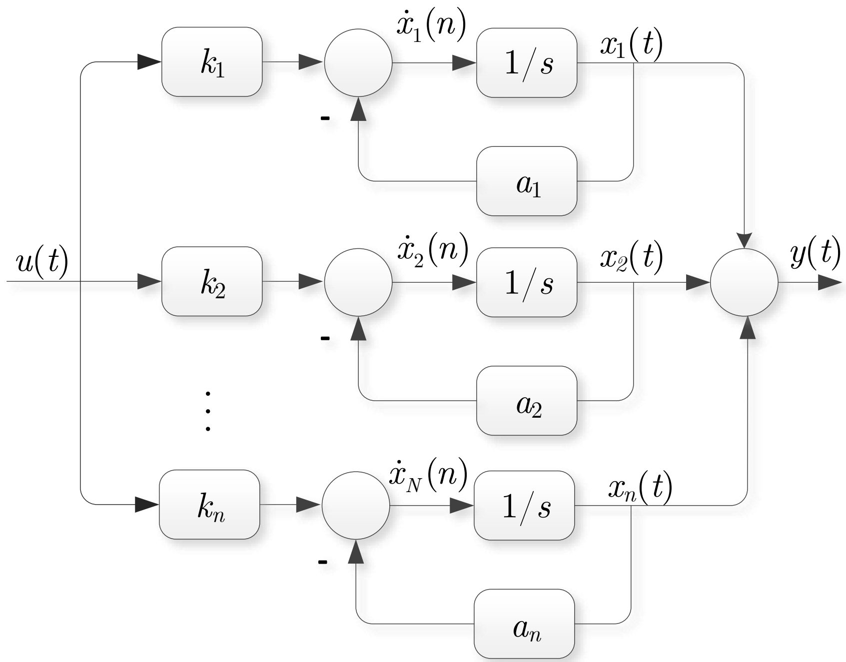
Kvazi-analogni blok dijagram sistema je prikazan na slici desno. Za promjenljive stanja se usvajaju izlazi iz integratora. Model sistema u prostoru stanja se dobija očitavanjem jednačina sa kvazi-analognog blok dijagrama.



Dijagonalna kanonična forma

Nakon ispisivanja jednačina za svaki integrator, formira se model u prostoru stanju u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} u$$



$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

DKF

Dijagonalna kanonična forma

Model u prostoru stanja predstavljen na ovaj način se zove dijagonalna kanonična forma, jer je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna. Još jedan naziv za ovaj oblik je modalna forma, jer su dijagonalni elementi matrice $\mathbf{A}$ jednaki polovima sistema, koji se nekad zovu i modovima.

Korisna osobina dijagonalne kanonične forme je što se u njenom slučaju računanje fundamentalne matrice pojednostavljuje:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

Na ovaj način se značajno pojednostavljuje računanje odziva na početne uslove. Mana ovog pristupa je što promjenljive stanja u kanoničnom prostoru nemaju fizički smisao, pa se odgovarajućim transformacijama treba vratiti u fizički prostor stanja.

Primjer - paralelno programiranje

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

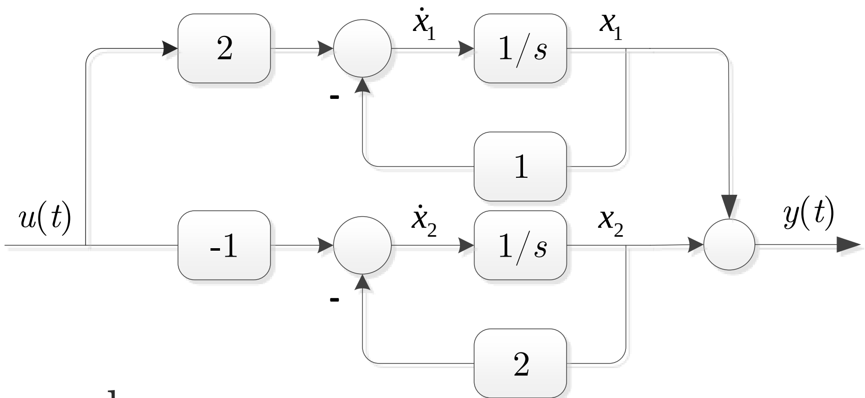
$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku dijagonalne kanonične forme. Odrediti odziv na početne uslove.

Ispod su prikazani model sistem u prostoru stanja i simulacioni blok dijagram. Model sistema se može formirati direktno, imajuću u vidu DKF, ili na osnovu simulacionog blok dijagrama.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Ispod je dat odziv sistema na početne uslove:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0)e^{-t} \\ x_2(0)e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Jordanova kanonična forma

Sistem je moguće predstaviti u dijagonalnoj formi jedino ako su sopstvene vrijednosti proste i realne. Ako funkcija prenosa ima višestruke polove, onda se ona u prostoru stanja može zapisati u blok-dijagonalnoj ili Jordanovoj kanoničnoj formi.

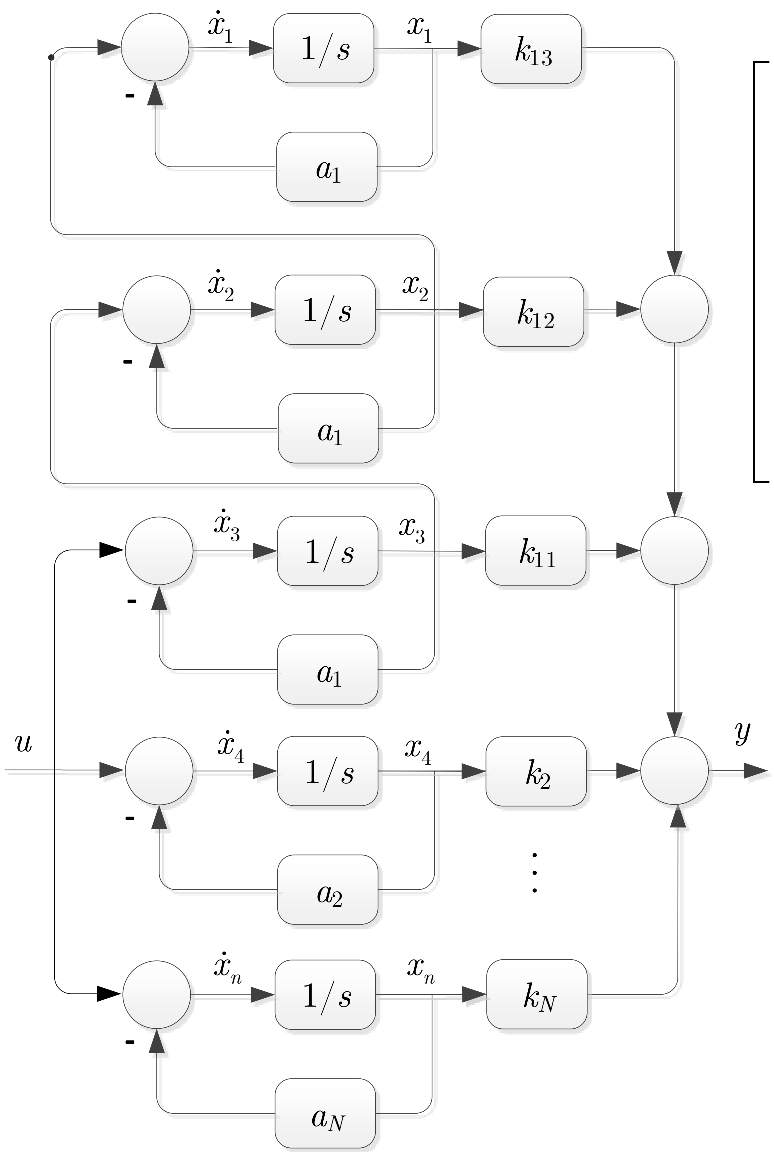
Neka je funkcija prenosa data kao proizvod elementarnih funkcija prenosa:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s+a_1)^3 (s+a_2)\ldots(s+a_N)} \\
&= \frac{k_{11}}{s+a_1} + \frac{k_{12}}{(s+a_1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+a_1)^3} + \sum_{i=2}^{N} \frac{k_i}{s+a_i}, \quad m < N+3.
\end{aligned}
$$

Na gubeći na opštosti, pretpostavili smo da je prvi pol sistema trostruk.

Na osnovu date funkcije prenosa treba nacrtati simulacioni blok dijagram, na osnovu kojeg se jednostavno formira model sistema u prostoru stanja.

Jordanova kanonična forma



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -a_2 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -a_N \end{array}\right]}^{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{12} & k_{11} & k_2 & \cdots & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

JKF

Jordanova kanonična forma

Model u prostoru stanja predstavljen na prethodni način se zove blok-dijagonalna kanonična ili Jordanova kanonična forma, jer matrica **J** ima strukturu Jordanove matrice. Fundamentalna matrica se i u ovom slučaju jednostavnije računa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} \longrightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & te^{-a_1 t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{n-1!} e^{-a_1 t} \\ 0 & e^{-a_1 t} & te^{-a_1 t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_1 t} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}t} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

Kontrolabilna kanonična forma

Ako je funkcija prenosa data u generalnom obliku, tada postoje dva standardna načina zapisivanja matrica u prostoru stanja: kontrolabilna kanonična forma i opservabilna kanonična forma.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1.$$

U cilju određivanja kontrolabilne kanonične forme, funkciju prenosa treba pomožiti sa pomoćnim signalom $E(s)$, a zatim preko njega izraziti ulazni i izlazni signal:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \frac{E(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) E(s) = U(s)$$

$$(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) E(s) = Y(s)$$

Kontrolabilna kanonična forma

Prethodne jednačine u vremenskom domenu imaju sljedeći oblik:

$$e^{(n)} + a_{n-1}e^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{e} + a_0 e = u(t),$$

$$b_m e^{(m)} + b_{m-1}e^{(m-1)} + \ldots + b_1\dot{e} + b_0 e = y(t).$$

Za promjenljive stanja se usvajaju promjenljiva e i njenih prvih n - 1 izvoda:

$$\begin{aligned} x_1 &= e \\ x_2 &= \dot{e} \\ &\cdots \\ x_{n-1} &= e^{(n-2)} \\ x_n &= e^{(n-1)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\cdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

Prvih n-1 jednačina stanja se dobija iz smjena.

Zadnja jednačina stanja i jednačina izlaza se dobijaju uvrštavanjem smjena u početne jednačine:

$$x^{(n)} = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \ldots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u(t),$$

$$y(t) = b_o x_1 + b_1 x_2 + \ldots + b_{m-1}x_m + b_m x_{m+1}.$$

Kontrolabilna kanonična forma

Konačno model u prostoru stanja ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

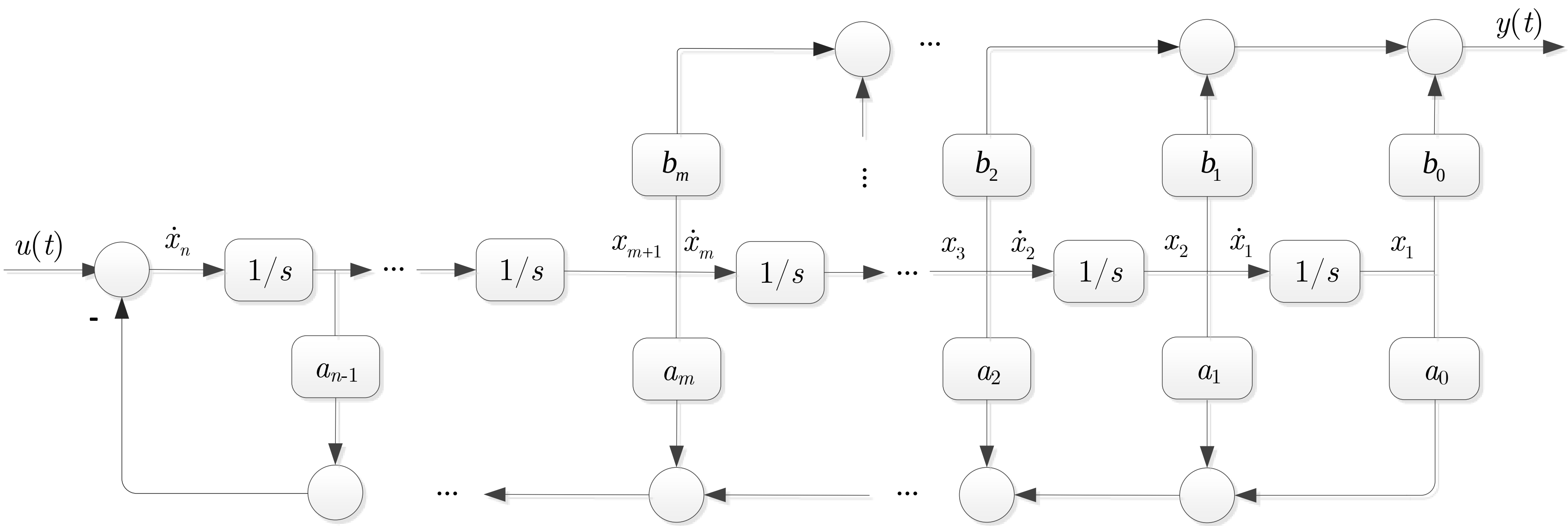
$\boxed{\textbf{KKF}}$

Može se uočiti da se zadnja vrsta matrice **A** formira na osnovu koeficijenata imenioca funkcije prenosa, dok je gornja sporedna dijagonala ispunjena jedinicama. Matrica **C** se formira na osnovu brojioca funkcije prenosa, dok su kod matrice **B** svi koeficijenti jednaki nuli, sem zadnjeg.

Samo kontrolabilni sistemi mogu da se zapišu u ovom kanoničnom obliku. O kontrolabilnosti će biti više rečeno na narednim predavanjima. Kontrolabilna kanonična forma je pogodna za dizajn kontrolera koji se dizajniraju direktno u prostoru stanja, ali oni neće biti pokriveni u ovom kursu.

Kontrolabilna kanonična forma

Na osnovu prethodnih jednačina stanja može se nacrtati kvazi-analogni blok dijagram sistema:



Obratiti pažnju da su svi integratori redno vezani i da ja prvom integratoru pridužena promjenljiva x_n, a zadnjem integratoru x_1. Na ovaj način se dobija kompaktnija forma kvazi-analognog blok dijagrama.

Primjer - direktno programiranje, KKF

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6}.$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku kontrolabilne kanonične forme.

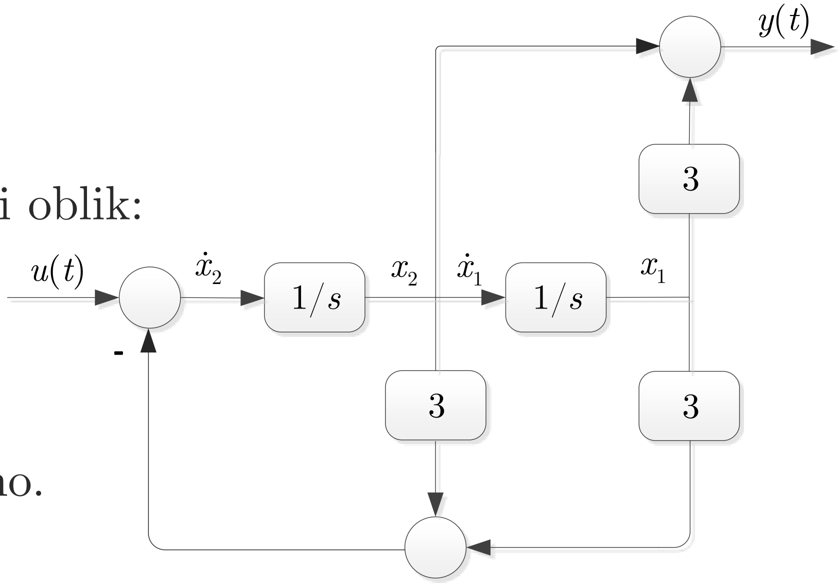
Da bi direktno primijenili pravilo za kreiranje KKF, koeficijent uz najveći stepen imenioca treba svesti na jedinicu:

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}.$$

Model sistema u prostoru stanja ima sljedeći oblik:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Simulacini blok dijagram je dat na slici desno.



Opservabilna kanonična forma

Opservabilna kanonična forma predstavlja još jednu standardnu realizaciju sistema.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1.$$

Gornja funkcija prenosa se može zapisati u vidu diferencijalne jednačine:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Dalje, prethodna diferencijalna jednačina se može zapisati na sljedeći način:

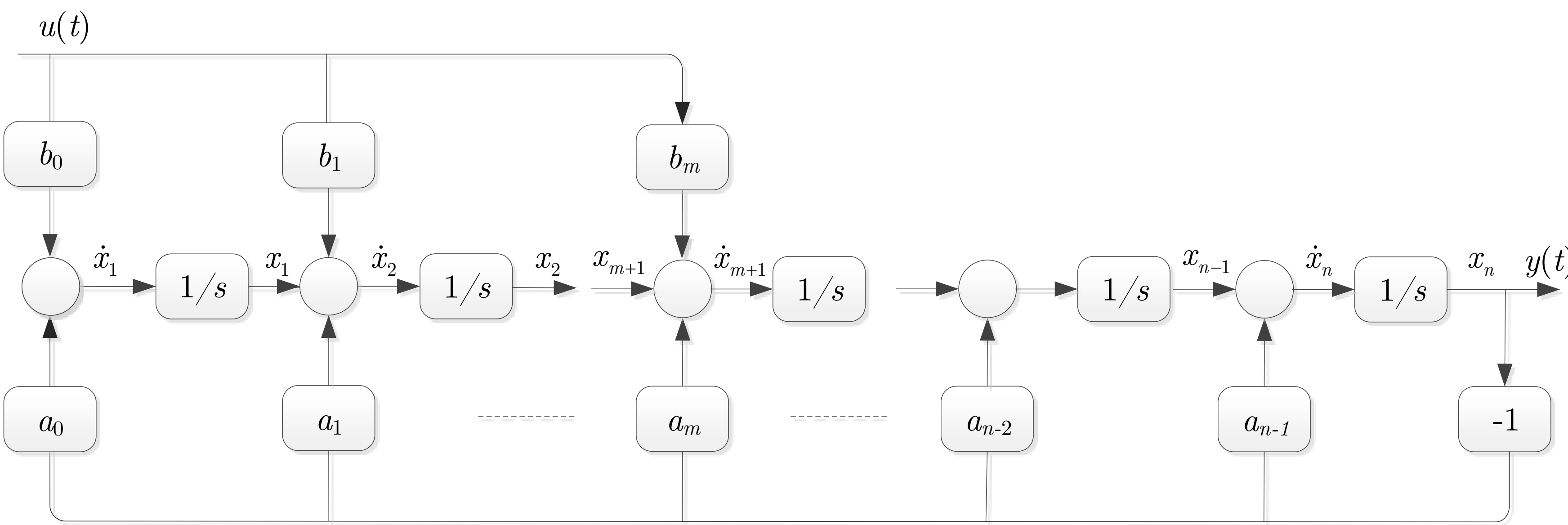
$$y^{(n)} = (b_0 u - a_0 y) + (b_1 \dot{u} - a_1 \dot{y}) + (b_m u^{(m)} - a_m y^{(m)}) - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)}.$$

Integraljenjem prethodnog izraza n puta, dobija se $y(n)$, na osnovu čega se crta kvazi-analogni blok dijagram i formira model u prostoru stanja.

$$y = \int^{n} (b_0 u - a_0 y) + \int^{n-1} (b_1 u - a_1 y) + \cdots \int^{n-m} (b_m u - a_m y) - \ldots - \int a_{n-1} y.$$

Opservabilna kanonična forma

Kvazi-analogni blok dijagram sistema datog obliku opservabilne kanonične forme je dat na slici ispod.



Jednačine stanja se očitavaju sa dijagrama. Može se pokazati da za opservabilnu i kontrolabilnu kanoničnu formu važi sljedeća veza:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_k^T, \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_k^T$$

$$\mathbf{C}_o = \mathbf{B}_k^T, \mathbf{D}_o = \mathbf{D}_k.$$

Opservabilna kanonična forma

Dakle, OKF sistema ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \\ \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

$\boxed{\textbf{OKF}}$

Samo opservabilni sistemi mogu da se zapišu u ovoj kanoničnoj formi. O opservabilnosti će biti više riječi na narednim predavanjima. Opservabilna kanonična forma je pogodna za dizajn opservera. Opserveri su uređaji koji na osnovu dostupnih mjerenja vrše estimaciju stanja sistema. Ako su brojilac i imenilac funkcije prenosa istog reda, tada ih treba podijeliti. Koeficijent koji se dobije pri dijeljenju predstavlja matricu **D**, a od ostatka se formiraju matrice **A**, **B** i **C**, na neki od prethodno opisanih načina.

Primjer - direktno programiranje, OKF

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4}.$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku opservabilne kanonične forme.

Najprije treba podijeliti brojilac i imenilac funkcije prenosa, s obzirom da su istog reda, a zatim se treba osloboditi koeficijenta uz najstariji član imenioca:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{\frac{1}{2}(2s^2 + 6s + 4) - 3s}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{1}{2} + \frac{-3s}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}s}{s^2 + 3s + 2}.$$

Rezultujući količnik u stvari predstavlja matricu **D**, dok se na osnovu ostatka formiraju matrice **A**, **B** i **C**, imajući u vidu opšti oblik OKF-a.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u.$$

```
>> [R Q]=deconv([1 0 2],[2 6 4])
R =
    0.5000
Q =
     0    -3     0
```

Nacrtati kvazi-analogni blok dijagram.

Primjer – DC motor

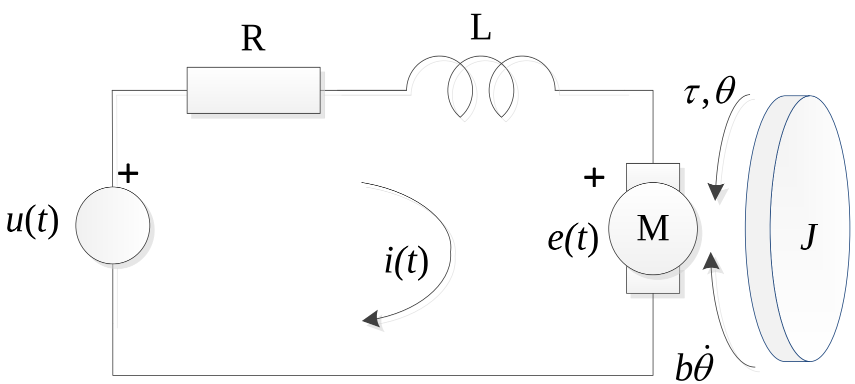
Na slici ispod je prikazana principijelna šema DC motora. Modelovati dati sistem u prostoru stanja:

a) za promjenljive stanja usvojiti fizičke promjenljive,

b) u obliku dijagonalne/Jordanove kanonične forme (ukoliko je moguće),

c) u obliku kontrolabilne kanonične forme,

d) u obliku opservabilne kanonične forme.



Napomena: pogledati rok iz 2017. godine.

Linearizacija dinamičkih sistema

Veliki broj fizičkih sistema ima nelinearnu prirodu. Da bi se iskoristile prednosti koje pruža linearna teorija, nelinearni modeli se mogu linearizovati razvijanjem nelinearne jednačine u Tejlorov red, u okolini radne tačke x_s, i skraćivanjem Tejlorovog razvoja na prva dva člana.

$$f(x) = f(x_s) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + stariji\ \ članovi$$

Kod dinamičkih sistema (onih koji se matematički opisuju diferencijalnim jednačinama) linearizacija se najčešće vrši u okolini stacionarne tačke ili ekvilibrijuma, koja se dobija izjednačavanjem izvoda sa nulom (izvod od konstante je jednak nuli). U praksi, veliki broj dinamičkih sistema se može aproksimirati linearnim diferencijalnim jednačinama u okolini radnog opsega od interesa. Na primjer, DC motor je linearan na nekom radnom opsegu napona. Za velike vrijednosti napona brzina motora ulazi u zasićenje, dok se za male vrijednosti napona motor uopšte ne rotira.

Na slici je ilustrovan primjer linearizacije „obične“ funkcije $f(t)=\sqrt{t}+2$. Ako usvojimo $t_s=4$ kako radnu tačku, tada se funkcija $f(t)$ može razviti u Tejlorov red na sljedeći način:

$$\hat{f}(t)=f(t_s)+f'(t)\big|_{t=t_s}(t-t_s)=4+\frac{1}{2\sqrt{t_s}}(t-4)=4+0.25(t-4).$$

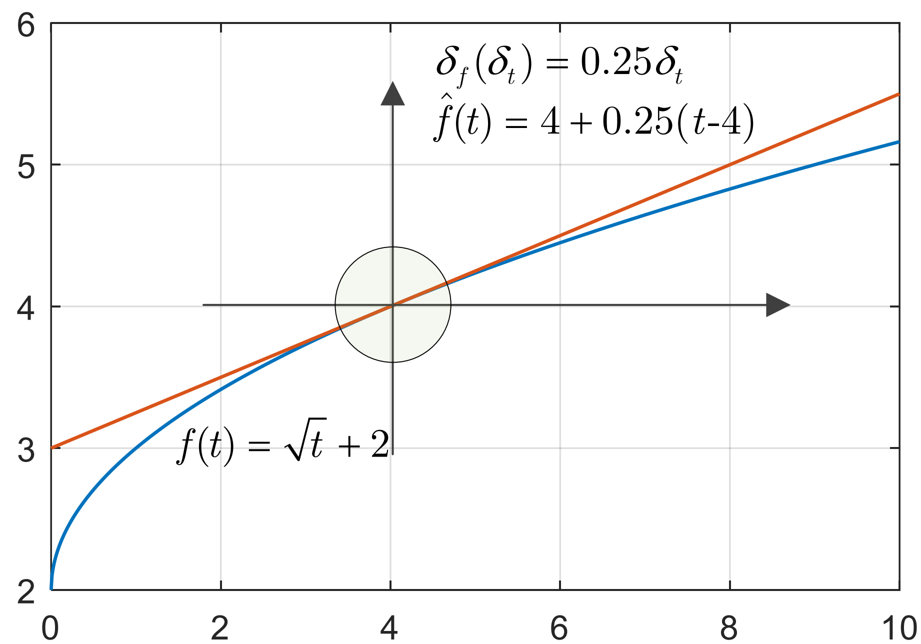
Dodatno, možemo uvesti smjene koordinata:

$$\delta(t)=t-4 \quad \text{i} \quad \delta_f\left(\delta(t)\right)=\hat{f}(t)-4,$$

i zapisati linearizovanu funkciju na sljedeći način:

$$\delta_f\left(\delta(t)\right)=0.25\delta(t).$$

U suštini, linearizovana funkcija predstavlja tangentu u radnoj tački, pri čemu njeno odstupanje od vrijednosti funkcije $f(t)$ raste sa porastom $\delta(t)$.



Linearizacija dinamičkih sistema

Posmatrajmo sada dinamički sistem opisan sljedećom nelinearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0^-) = x_p.$$

Pretpostavimo da je ulaz u konstantan i jednak u_s, i da promjenljiva stanja x u stacionarnom stanju ima konstantu vrijednost x_s. Funkcija $f(x(t), u(t))$ se u okolini stacionarne tačke $(x_s,\ u_s)$ može razviti u Tejlorov red:

$$f(x(t), u(t)) = \cancelto{0}{f(x_s, u)} + \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s} (u - u_s) + stariji\ \ članovi$$

S obzirom da par $(x_s,\ u_s)$ predstavlja stacionarnu tačku, to znači da važi:

$$\dot{x} = f(x_s, u_s) = 0,$$

$$\boxed{\frac{d(x - x_s)}{dt} \triangleq \frac{dx}{dt}}$$

pa se prethodna jednačina svodi na:

$$\frac{d(x - x_s)}{dt} \approx \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{u_s} (x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s} (u - u_s).$$

Linearizacija dinamičkih sistema

Da bi dobili linearni model, u prethodnom izrazu treba uvesti smjene:

$$\delta_x = x - x_s, \delta_u = u - u_s,$$

gdje δ_x i δ_u predstavljaju odstupanje promjenljive stanja i ulaza od njihovih stacionarnih vrijednosti. Konačno, linearizovani model ima oblik:

$$\dot{\delta}_x \approx a\delta_x + b\delta_u, \delta_x(0^-) = x_p - x_s,$$

gdje su a i b vrijednosti odgovarajućih parcijalnih izvoda u tačkama x_s i u_s:

$$a = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{x_s}, b = \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}.$$

Na sličan način se linearizuje izlazna jednačina:

$$y = g(x,u) \approx \overset{y_s}{g(x_s,u_s)} + \left.\frac{\partial g(x)}{dx}\right|_{x_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}(u - u_s),$$

$$y - y_s = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{u_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}(x - u_s),$$

$$\delta_y = c\delta_x + d\delta_u.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_y = y - y_s \\ c = \left.\frac{\partial g(x,u)}{dx}\right|_{x_s} \\ d = \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}\end{gathered}}$$

Linearizacija dinamičkih sistema

U opštem slučaju, model u prostoru stanja nelinearnog sistema ima oblik:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_p,\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).\end{aligned}$$

Neka je $\boldsymbol{x}_s$ i $\mathbf{u}_s$ set stacionarnih tačaka koje zadovoljavaju gornji sistem diferencijalnih jednačina, i neka je $\mathbf{y}_s$ vektor izlaza u stacionarnom stanju:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)) = 0,\\ \mathbf{y}_s(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)).\end{aligned}$$

Multivarijabilne funkcije se na sličan način razvijaju u Tejlorov red:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s),$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s).$$

Linearizacija dinamičkih sistema

Prethodne jednačine se mogu zapisati na isti način kao za jednodimenzioni slučaj:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}}(t),$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}}(t) \approx \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}}(t).$$

gdje su $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{\delta}_u$ i $\boldsymbol{\delta}_y$ vektori odstupanja od odgovarajućih stacionarnih tačaka. Matrice **A**, **B**, **C** i **D** su Jakobijeve matrice, odnosno matrice parcijalnih izvoda:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}},$$
$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}.$$

Primjer 1 - linearizacija

Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = -\sqrt{x(t)} + \frac{u^2(t)}{3}, \;\; x(0^-) = 0.5.$$

Linearizovati model pod pretpostavkom da ulazni signal varira u okolini vrijednosti u=2.

Najprije treba odrediti stacionarnu tačku sistema (iz uslova da je prvi izvod jednak nuli):

$$u_s = 2 \;\Rightarrow\; 0 = -\sqrt{x_s} + \frac{2^2}{3} \;\Rightarrow\; x_s = \frac{16}{9} \;\Rightarrow\; \boxed{u_s = 2, x_s = \frac{16}{9}}$$

Linearizovani model sistem ima sljedeći oblik:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_x(t) \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_x(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_u(t),$$
$$\boldsymbol{\delta}_y(t) \approx \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}_x(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_u(t),$$

odnosno:

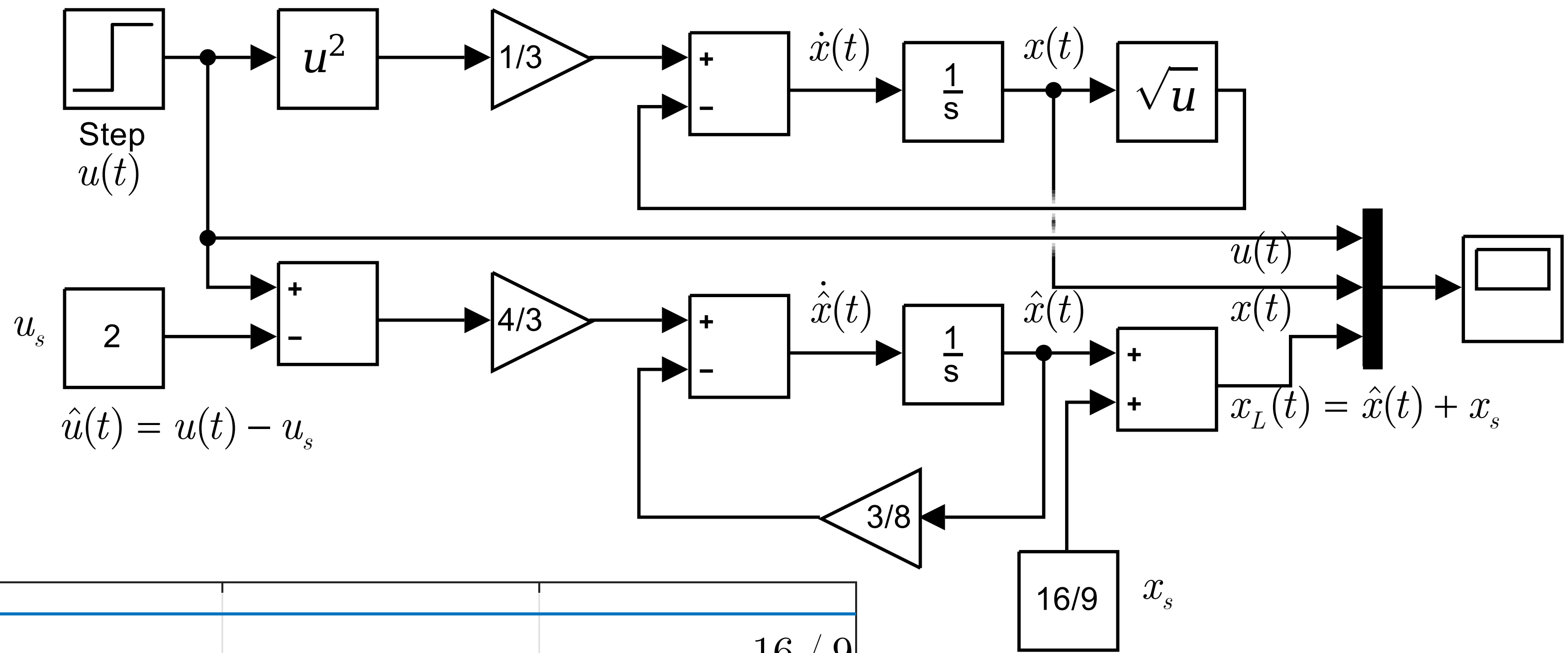
$$\boxed{\dot{\delta}_x = -\frac{3}{8}\delta_x + \frac{4}{3}\delta_u.}$$

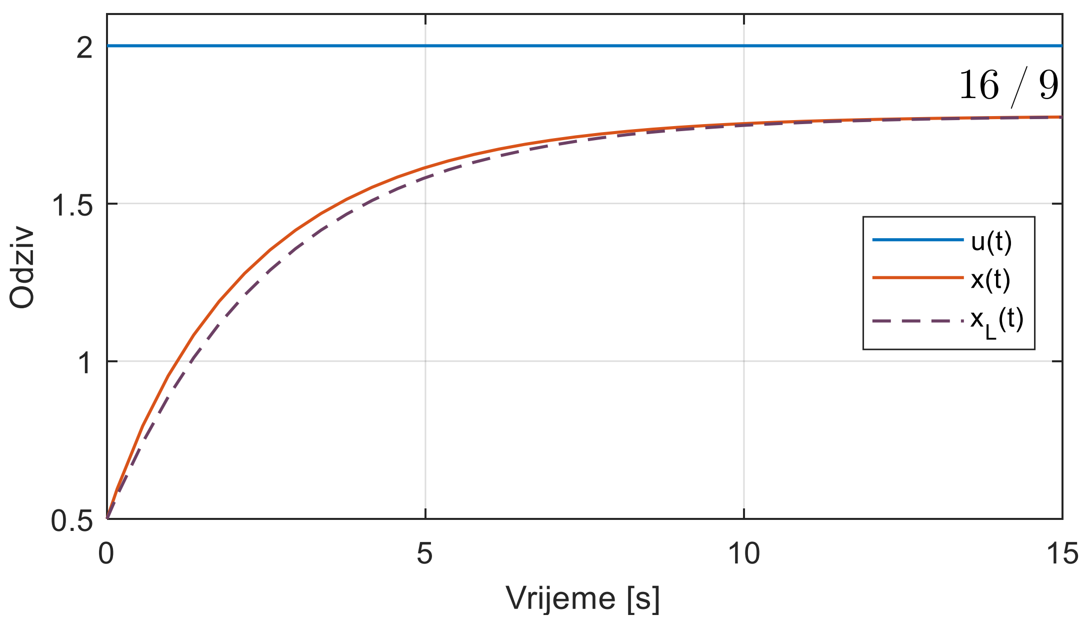
Matrice **A** i **B** su po definciji:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = -\frac{1}{2\sqrt{x_s}} = -\frac{3}{8},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = \frac{2}{3}u_s = \frac{4}{3}.$$

Primjer 1 - linearizacija

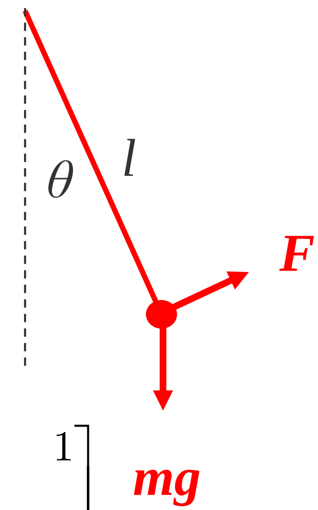




Na slici je prikazana simulaciona šema diferencijalnih jednačina (u Simulink-u). Sa slike lijevo se može uočiti da linearizovani i nelinearni model sistema imaju istu vrijednost odziva u stacionarnom stanju.

Primjer 2 - linearizacija

Modelovati klatno prikazano na slici, a zatim linearizovati dobijeni model u okolini stacionarne tačke. Smatrati da je $F = 0$.



Jednačina rotacije klatna ima sljedeći oblik:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_F - \tau_g = Fl - mgl\sin\theta,\;\; J = ml^2.$$

Nakon uvođenja promjenljivih $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, dobija je model u prostoru stanja:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, F) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, F) = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{F}{ml},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{x_1} \\ \dot{\delta}_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} \delta_F.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}$$

Stacionarne tačke (ravnotežno stanje) su x_{1s}=x_{2s}=F_s=0. One su mogu dobiti iz jednačina, mada jasno je da će u ravnotežnom stanju ugao i brzina klatna da budu jednaki nuli.