SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 3

Modelovanje SAU-a u kompleksnom domenu

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu polove, nule i pojačanje sistema i razumiju njihovu ulogu u dinamici sistema.
- Primjenom algebre funkcije prenosa svedu strukturni blok dijagram SAU-a na osnovnu strukturu.
- Izvrše transformaciju SBD-a u dijagram toka signala, a zatim primjenom Mason-ovog pravila odrede funkciju prenosa sistema.
- Za zadati ulazni signal, izračunaju vrijednost signala u bilo kom čvoru dijagrama SAU-a.

Mapa kursa

Modelovanje	Analiza	Dizajn
Klasifikacija sistema Diferencijalne jednačine Funkcija prenosa • Polovi, nule, pojačanje • Strukturni blok dijagrami • Graf toka signala Model u prostoru stanja • Kanonične forme • Linearizacija • Rješavanje jednačina stanja	Kontrolabilnost i opservabilnost Stabilnost sistema • Raus • Nikvist Performanse SAU-a • Stacionarno stanje • Prelazni proces • Kompleksni domen Frekvencijske karakteristike • Bodeovi dijagrami	Specifikacije sistema Kompenzatori • Pojačavač • Integralni kompenzator • Diferencijalni kompenzator • Diferencijalno - integralni kompenzator PID regulator Fizičke realizacije Diskretizacija kontinualnih regulatora

Funkcija prenosa

LTI sistemi se u opštem slučaju opisuju linearnim diferencijalnim jednačinama višeg reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

Funkcija prenosa sistema, koja se definiše kao odnos između izlaznog i ulaznog signala u kompleksnom domenu, može se dobiti primjenom osobina Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu:

$$\boxed{G(\mathrm{s}) = \frac{Y(\mathrm{s})}{X(\mathrm{s})} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}, m \leq n}$$

za kauzalne sisteme

$$\boxed{A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}$$

karakteristični polinom

Imenilac funkcije prenosa se zove karakteristični polinom.

Korijeni karakterističnog polinoma se zovu polovi sistema.

Korijeni brojioca funkcije prenosa se zovu nule sistema.

Funkcija prenosa

Nule i polovi sistema mogu biti čisto realni ili kompleksni. Realni sistemi ne mogu imati jednostruki kompleksni pol ili nulu, već se oni uvijek pojavljuju u vidu konjugovano kompleksnih parova.

Pored polova i nula, vezano za funkciju prenosa, treba definisati i pojam pojačanja sistema. Statičko pojačanje sistema predstavlja odnos slobodnih članova brojioca i imenioca funkcije prenosa:

$$\boxed{K = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0}.}$$

Kad se na dinamički sistem dovede step pobuda (jednosmjerna komponenta), uvijek se javlja prelazni proces, prije nego što sistem uđe u stacionarno stanje. Priroda prelaznog procesa zavisi od polova i nula sistema. Kad iščeznu tranzijentni procesi, odziv sistema će biti proporcionalan ulaznom step signalu sa konstatnom proporcionalnosti K (pojačan ili oslabljen).

Funkcija prenosa

Prethodno tvrđenje se može dokazati pomoću druge Laplasove granične teoreme ili teoreme o krajnjoj vrijednosti signala.

Neka je Laplasova transformacija signala $y(t)$ jednaka $Y(s)$. Vrijednost signala $y(t)$ u stacionarnom stanju se može izračunati na osnovu njegovog kompleksnog lika na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s).$$

Sada posmatrajmo sistem $G(s)$ ekscitiran step funkcijom intenziteta r. Odziv sistema je: $Y(s)=G(s)X(s)$, dok je vrijednost signala $Y(s)$ u stacionarnom stanju:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)X(s)\\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{r}{s}G(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = r\frac{b_0}{a_0}.\end{aligned}$$

Dakle, statičko ili DC pojačanje predstavlja pojačanje (ili slabljenje) jednosmjerne komponente signala u stacionarnom stanju.

Funkcija prenosa

Funkcija prenosa LTI sistema se može definisati i kao Laplace-ova transformacija impulsnog (normalnog) odziva $g(t)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

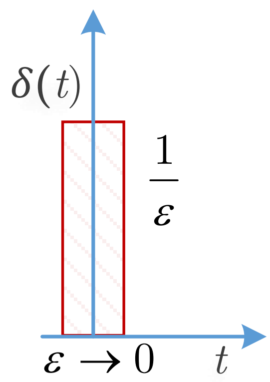
Impulsni odziv $g(t)$ je odziv sistema na Dirakovu funkciju $\delta(t)$.

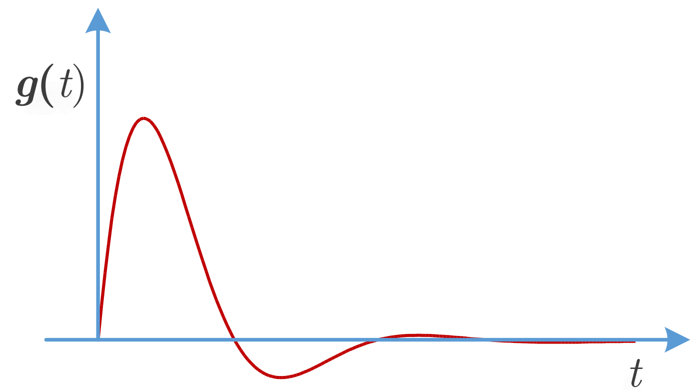
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int \delta(t) dt = 1,$$

$$\int \delta(t) f(t) dt = f(0),$$

$$\Delta(s) = \int \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1.$$





Jednako djeluje na sve frekvencije sistema.

Impulsni odziv sadrži potpunu informaciju o sistemu.

Odziv sistema na pobudu

Odziv sistema na zadatu pobudu se može odrediti na sljedeće načine:

- Rješavanjem diferencijalne jednačine sistema
- Rješavanjem vektorske jednačine stanja (modela u prostoru stanja)

  Ovaj postupak će biti obrađen na nekom od narednih predavanja. Izuzetno je pogodan za analizu sistema na računaru.
- Primjenom konvolucije u vremenskom domenu

  Ovaj postupak je ograničen na LTI sisteme. Rješavanje konvolucionog integrala je vjerovatno najkomplikovaniji metod za određivanje odziva sistema.
- Primjenom teoreme o konvoluciji u s-domenu.

  Konvolucioni integral u vremenskom domenu se u Laplasovom domenu svodi na množenje kompleksnih likova ulaznog signala i impulsnog odziva sistema. Ovo je najjednostavniji metod za rješavanje “na papiru”.

Odziv sistema na pobudu

Jedna od fundamentalnih osobina LTI sistema je ta da se kod njih može primijeniti operator konvolucije za računanje odziva sistema na proizvoljnu pobudu:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Dakle, ako je poznat impulsni odziv sistema, tada primjenom konvolucionog integrala možemo odrediti odziv sistema na proizvoljnu pobudu.

Odziv sistema se jednostavnije može izračunati u Laplasovom domenu:

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

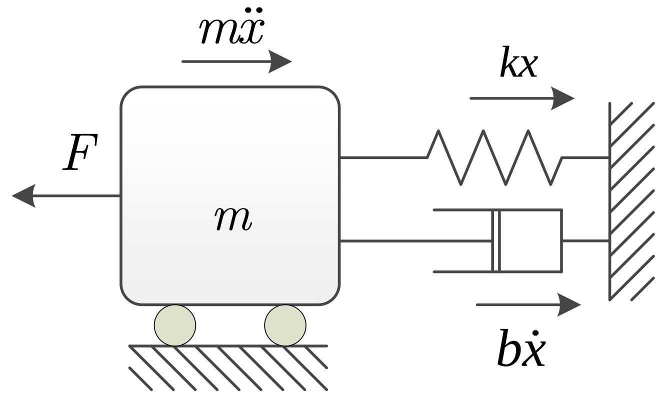
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

Kako je Laplasova transformacija delta impulsa jednaka jedinici, na osnovu prethodnog izraza se može zaključiti da funkcija prenosa predstavlja Laplasovu transformaciju impulsnog odziva.

Za dokaz pogledati referencu [Linear Systems, MIT].

Primjer - odziv sistema na pobudu

Za mehanički sistem prikazan na slici poznato je: k=2 N/m, B=3 Ns/m, m=1 kg. Odrediti funkciju prenosa, impulsni odziv, kao i odziv sistema na silu F=1N. Za izlaznu promjenljivu usvojiti pređeni put $x(t)$.



Diferencijalna jednačina kojom se opisuje sistem ima sljedeći oblik:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F.$$

Funkcija prenosa se dobija primjenom osobine Laplasove transformacije, za nulte početne uslove:

Impulsni odziv i odziv na step funkciju se takođe mogu dobiti primjenom osobina Laplasove transformacije:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2},$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} - e^{-2t}.$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}.$$

```
>> syms s
% definisanje simboličke
promjenljive
>> G=1/(s^2+3*s+2)
% definisanje funkcije prenosa
>> g=ilaplace(G)
% inverzna laplasova transformacija
>> y=ilaplace(1/s*G)
% odziv na step funkciju
% ulaz je jedinična funkcija
```

Primjer - odziv sistema na pobudu

Polovi sistema su -1 i -2, dok posmatrani sistem nema nula. Statičko pojačanje sistema je -1/2.

Polovi i nule imaju ključnu ulogu u dinamici sistema!!!

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{2}}e^{-2t} - e^{-t}$$

$$y(t=\infty) = \frac{1}{2}$$

Polovi određuju koliko brzo će da iščeznu komponente prelaznog procesa.

Sa druge strane, nule definišu na koji će način ove komponente biti „izmiksane“.

U stacionarnom stanju sistem slabi ulazni signal 2 puta!!!

Ako na sistem djelujemo konstantnom silom od 1N, tijelo će se pomjeriti za ukupno 0.5m u pravcu djelovanja sile. Teorijski sistem će dostići vrijednost 0.5m tek u beskončanosti. Međutim, može se smatrati da eksponencijalna funkcija e^{at} pada na nulu nakon [3-5]/a jedinica vremena.

```
% polovi sistema
ans =
    -2
    -1
% pojačanje sistema
>> K=limit(G)
K =
1/2
```

$[3-5] \equiv$ od 3 do 5

Odziv sistema na pobudu

Početni uslovi sistema fizički se interpretiraju kao akumulirana energija sistema. Na primjer, ako u nekom trenutku t_r prestane djejstvo pobude na sistem, on će i dalje nastavati da se “kreće” usljed nakupljene energije i pokušaće da zauzme formu u kojoj je ta energija minimalna.
Odziv sistema na početne uslove se naziva prirodni odziv i ne može se direktno izračunati na osnovu funkcije prenosa.
Ukoliko je poznata diferencijalna jednačina kojom je opisan sistem, odziv na početne uslove se može odrediti primjenom *osobine izvoda* Laplasove transformacije na posmatranu jednačinu, pri čemu početne uslove ne treba zanemariti:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i)}(0^-).$$

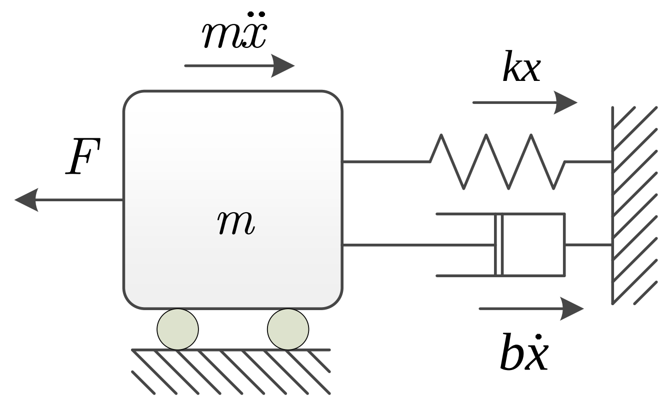
Kao rezultat, dobiće se zavisnost izlaznog signala od ulaznog signala (funkcija prenosa) i početnih uslova. Nakon toga, primjenom inverzne Laplasove određuju se prirodni i prinudni odziv.

Primjer – odziv sistema na početne uslove

Mehanički sistem sa slike je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = F.$$

Ako je početna brzina tijela $2m/\mathrm{s}$, a početni pomeraj $0m$, odrediti zavisnost pređenog puta i brzine od vremena.



Primjenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu dobija se:

$$\left[s^2X(s) - sx(0) - x^{'}(0)\right] + 3\left[sX(\mathrm{s}) - x(0)\right] + 2X(s) = F,$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = sx(0) + x^{'}(0) + 3x(0) + F,$$

$$X(s) = \frac{sx(0) + x^{'}(0) + 3x(0)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2}F.$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= 0m, \\ x^{'}(0) &= 2m / s. \end{aligned}}$$

$$X(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2}F.$$

Prvi razlomak u prethodnom izrazu predstavlja odziv na početne uslove (prirodni odziv), dok drugi razlomak predstavlja odziv na pobudu, odnosno prinudni odziv sistema.

Primjer – odziv sistema na početne uslove

U ovom primjeru nema pobude (F=0), pa je odziv na početne uslove i ujedno sveukupan odziv sistema jednak:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+3s+2}\right\} = 2e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

Brzina sistema je jednaka:

$$V(s) = sX(s) = \frac{3s^2}{s^2+3s+2},$$

odnosno u vremenskom domenu:

$$v(t) = \mathcal{L}\left\{\frac{3s}{s^2+3s+2}\right\} = -2e^{-t} + 4e^{-2t} \quad .$$

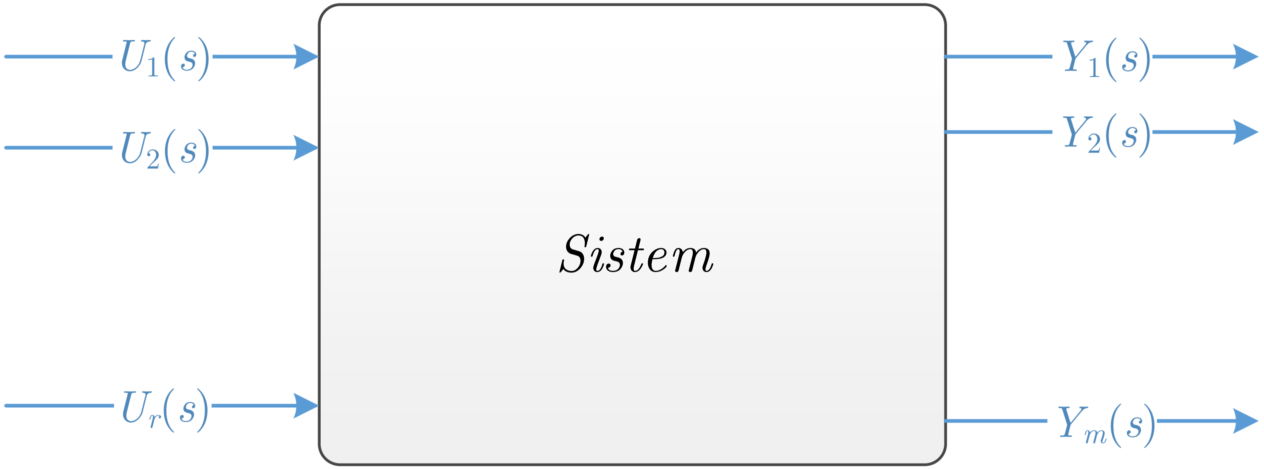
Napomena: Primjetimo da je dobijena brzina jednaka prvom izvodu pređenog puta po vremenu. Ponovite proračun za slučaj kada je početna brzina jednaka nuli, a početni put $2m$, a zatim interpretirajte dobijene rezultate.

```
>> syms s
% pređeni put
>> x=ilaplace(2/(s^2+3*s+2))
x =
2*exp(-t) - 2*exp(-2*t)
% brzina
>> v=ilaplace(2*s/(s^2+3*s+2))
v =
4*exp(-2*t) - 2*exp(-t)
```

Funkcija prenosa MIMO sistema

U opštem slučaju sistemi imaju više ulaza i izlaza (Multiple Input, Multiple Output - MIMO). Kod MIMO sistema sa r ulaza i m izlaza definiše se $m{\times}r$ funkcija prenosa. Svaka funkcija prenosa predstavlja vezu između odgovarajućeg izlaza i ulaza:

$$G_{ij}(s) = \left.\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}\right|_{U_k=0, \forall i \neq j}$$



Funkcija prenosa MIMO sistema

Dakle, kod MIMO sistema se definiše matrica funkcija prenosa:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & \ddots & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix}_{m\times r} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}_{r\times 1} .$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s).$$

Elementi matrice funkcije prenosa predstavljaju vezu (funkciju prenosa) između odgovarajućih izlaza i izlaza. Izlaz $Y_i(s)$ je jednak:

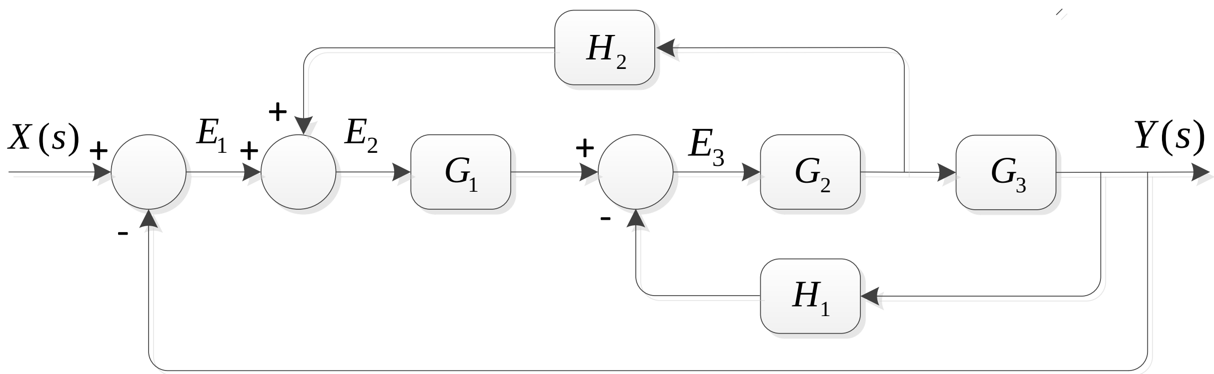
$$Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \ldots + G_{ir}(s)U_r(s).$$

Karakteristični polinom MIMO sistema predstavlja najmanji zajednički sadržilac karakterističnih polinoma svih pojedinačnih funkcija prenosa.

Strukturni blok dijagrami (SBD)

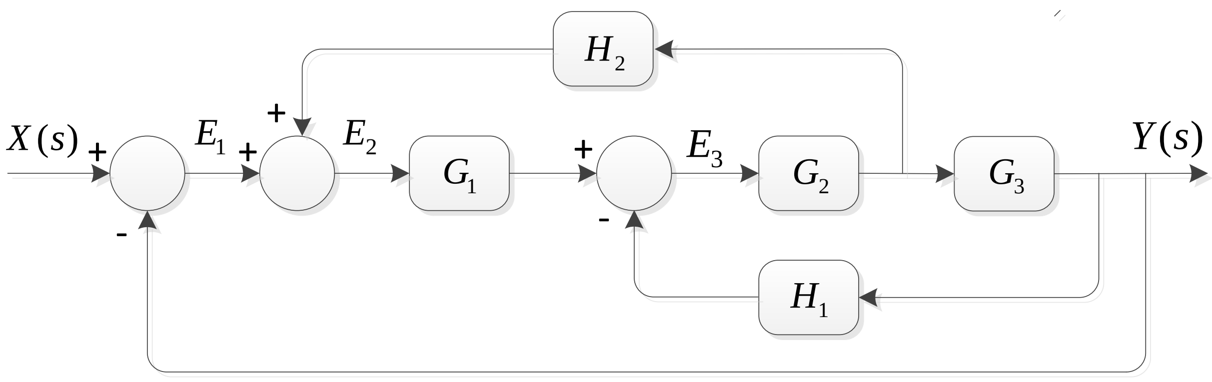
Strukturni blok dijagram (SBD) predstavlja još jedan način matematičkog modelovanja sistema. S obzirom da funckija prenosa predstavlja vezu između ulaznog i izlaznog signala, na osnovu nje se ne može sagledati šta se dešava unutar samog sistema.

Na SBD-u su prikazane glavne promjenjive sistema, veze između tih promjenljivih i funkcije prenosa komponenti sistema. Svaki elemenat ili grupa elemenata se predstavljaju jednim blokom čija je funkcija prenosa poznata. Primjer SBD-a je dat sa slici ispod.



Strukturni blok dijagrami (SBD)

- Linijama između blokova se prikazuju njihove međusobne interakcije
- Strelice na linijama označavaju smjerove tokova signala (informacija) od jednog elementa do drugog.
- Krugovi predstavljaju sabirače (diskriminatore) - elemente koji formiraju razliku ili zbir dvije ili više promjenljivih.
- Ovako predstavljen sistem može da formira relativno složenu strukturu koja sadrži više lokalnih povratnih sprega. Ma koliko bila složena početna struktura, ona se uvijek može svesti na jedan blok, odnosno na jednu ekvivalentnu funkciju prenosa čitavog sistema.

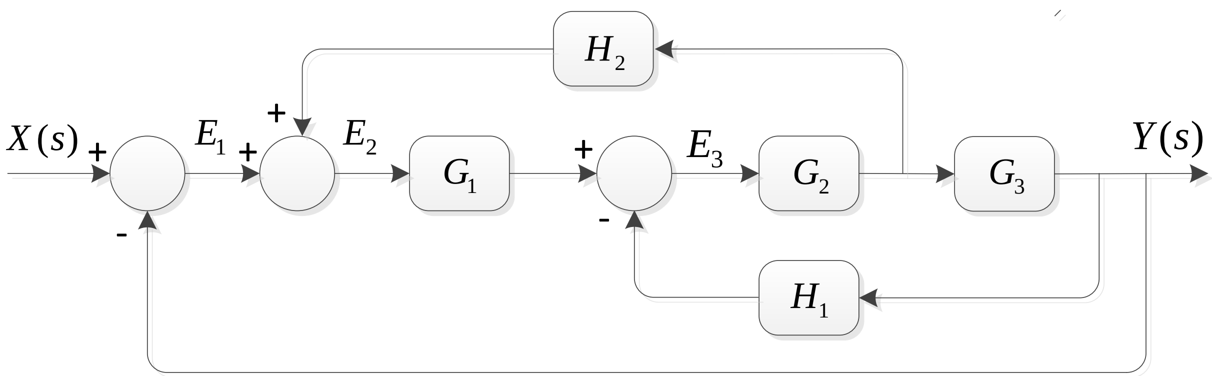


Strukturni blok dijagrami (SBD)

Jedan način za svođenje SBD-a na osnovnu strukturu je primjenom jednostavnih pravila algebre funkcije prenosa. Kod ovog metoda na blok dijagramu sistema se uočavaju veze/kombinacije blokova koje se mogu ekvivalentirati jednom funkcijom prenosa, a zatim se isti postupak ponavlja sve dok se SBD ne svede na jedan blok.

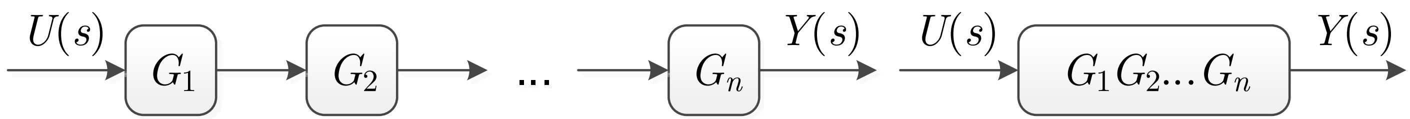
U nastavku su data pravila algebre funkcije prenosa.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = ?$$

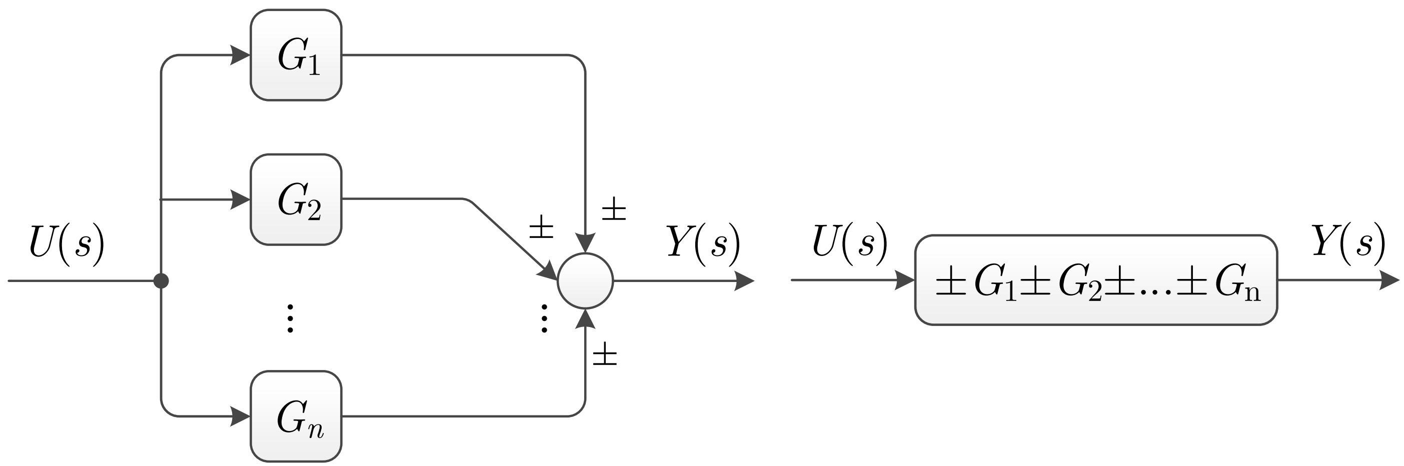


Algebra funkcije prenosa

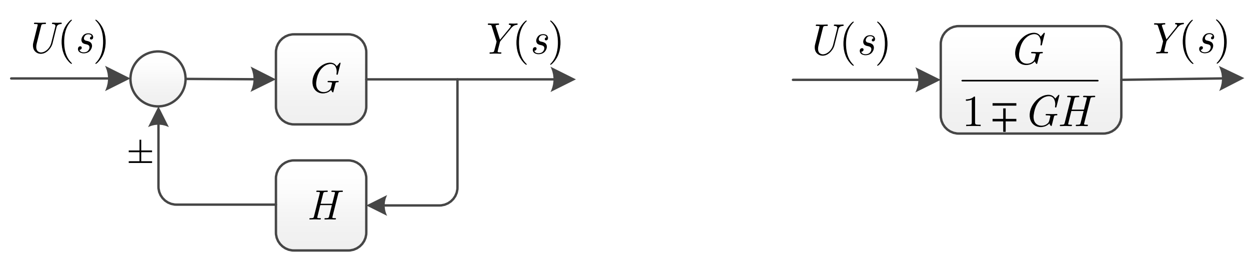
Kaskadna veza blokova



Paralelna veza blokova

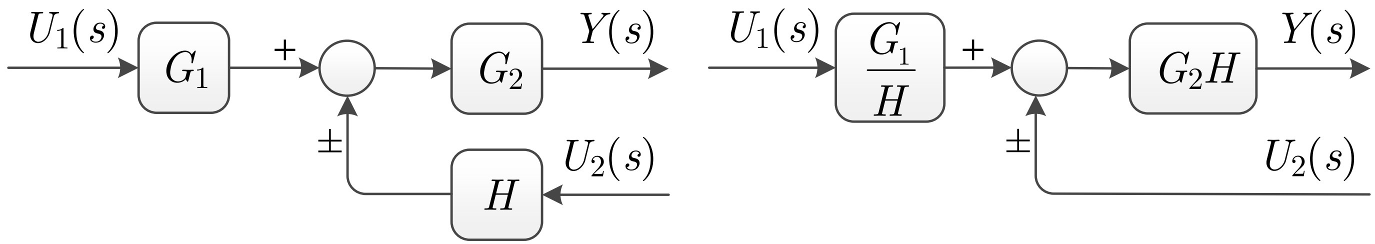


Svođenje povratne sprege na jedan blok

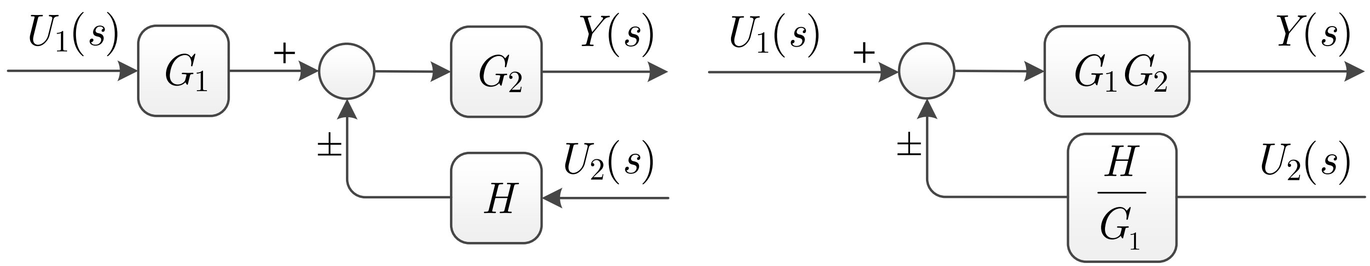


Algebra funkcije prenosa

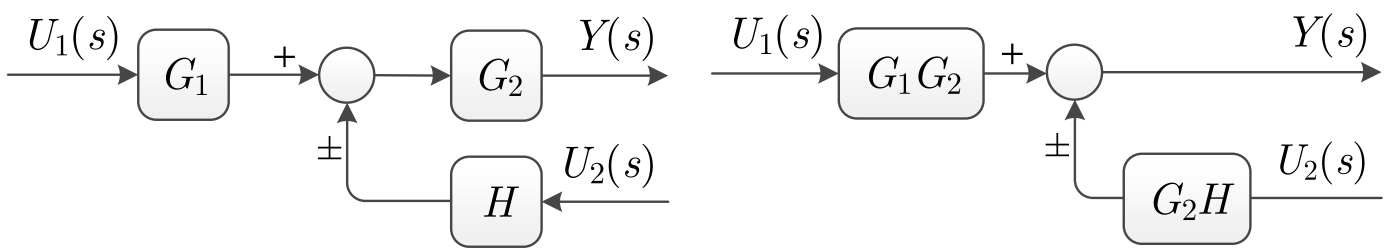
Premještanje bloka H ispred sabirača



Premještanje sabirača ispred bloka G_1

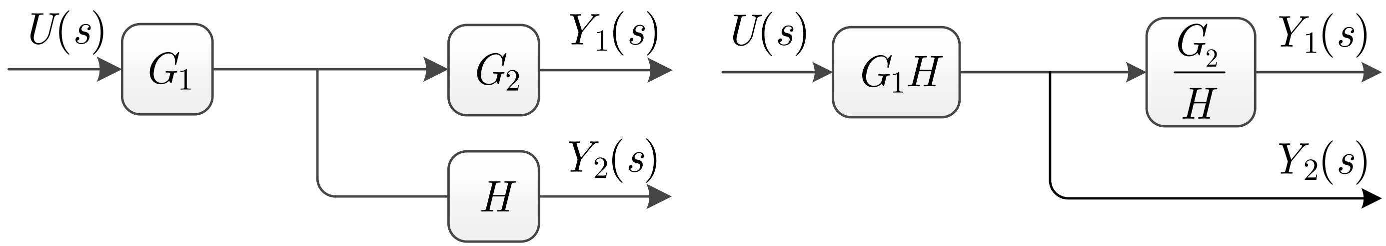


Premještanje sabirača iza bloka G_2

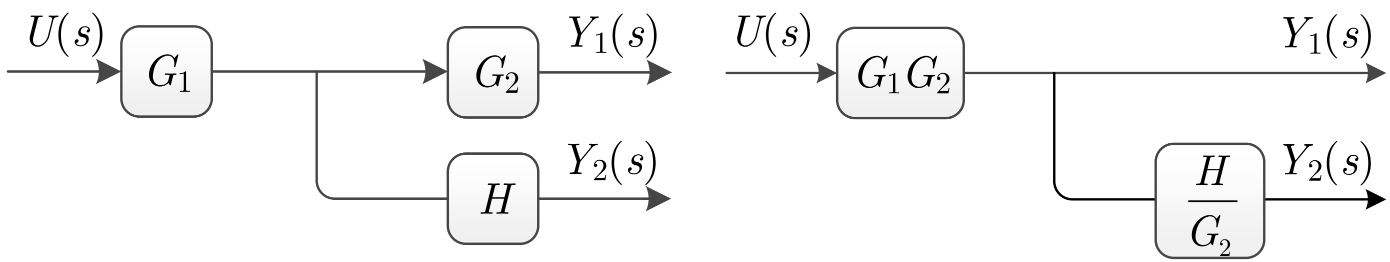


Algebra funkcije prenosa

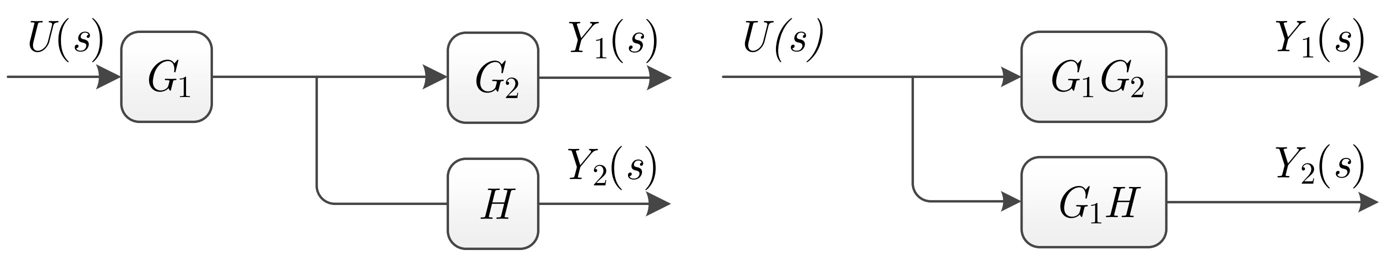
Premještanje bloka H iz direktne grane



Premještanje čvora iza bloka G_2

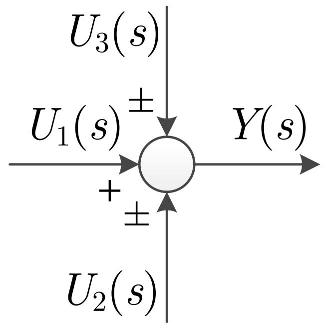


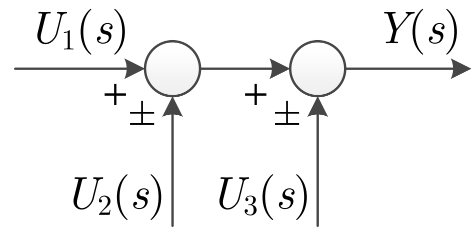
Premještanje čvora ispred bloka G_1



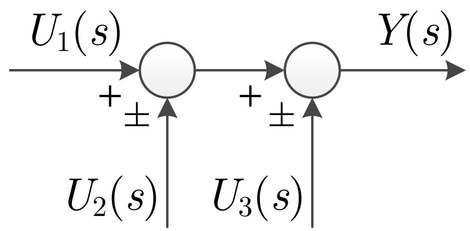
Algebra funkcije prenosa

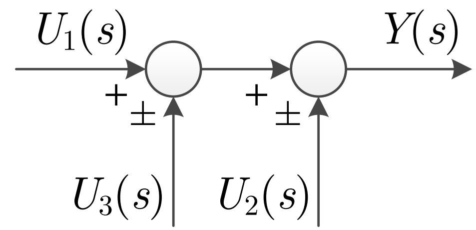
Razdvajanje na dva sumatora



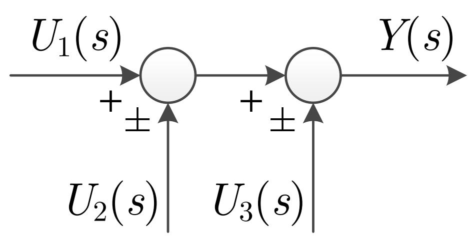


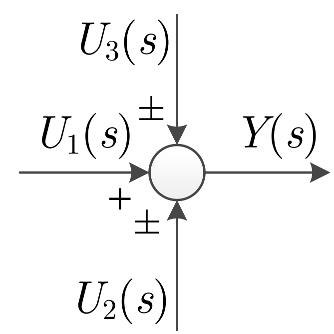
Zamjena mjesta sumatora





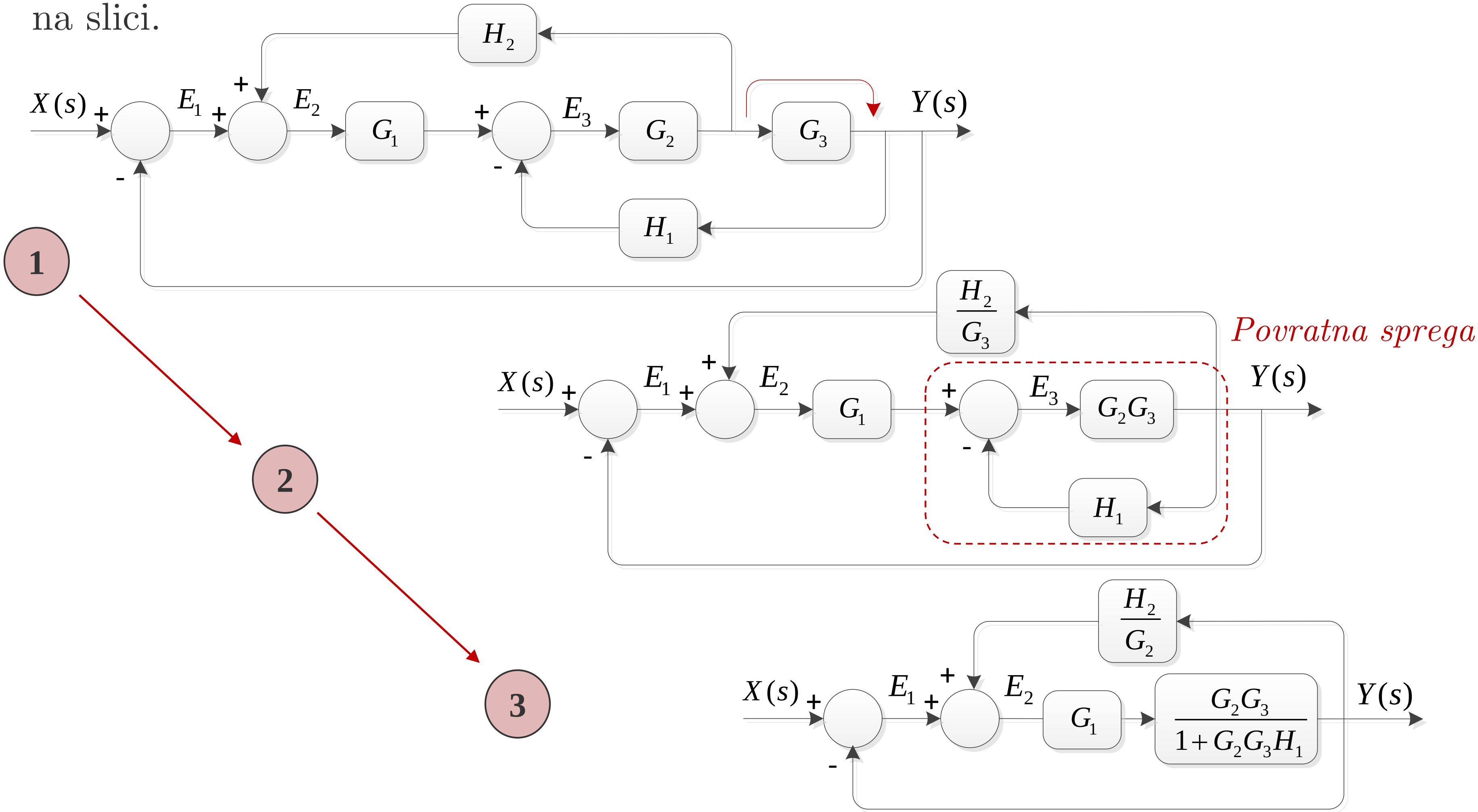
Svođenje na jedan sumator



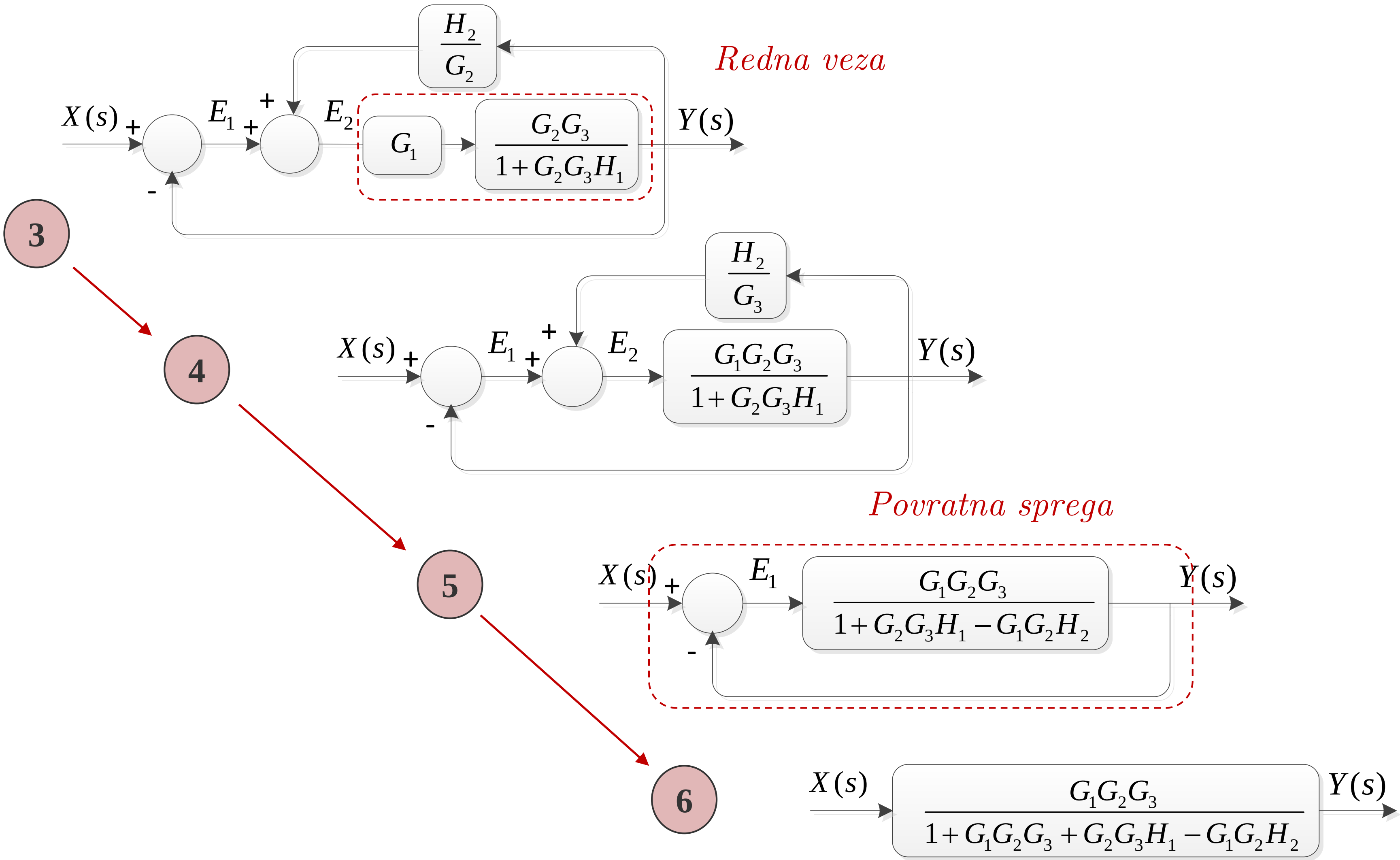


Primjer – prvi način

Primjenom algebre funkcije prenosa odrediti funkciju prenosa SAU-a prikazanog na slici.



Primjer – prvi način



Primjer – drugi način

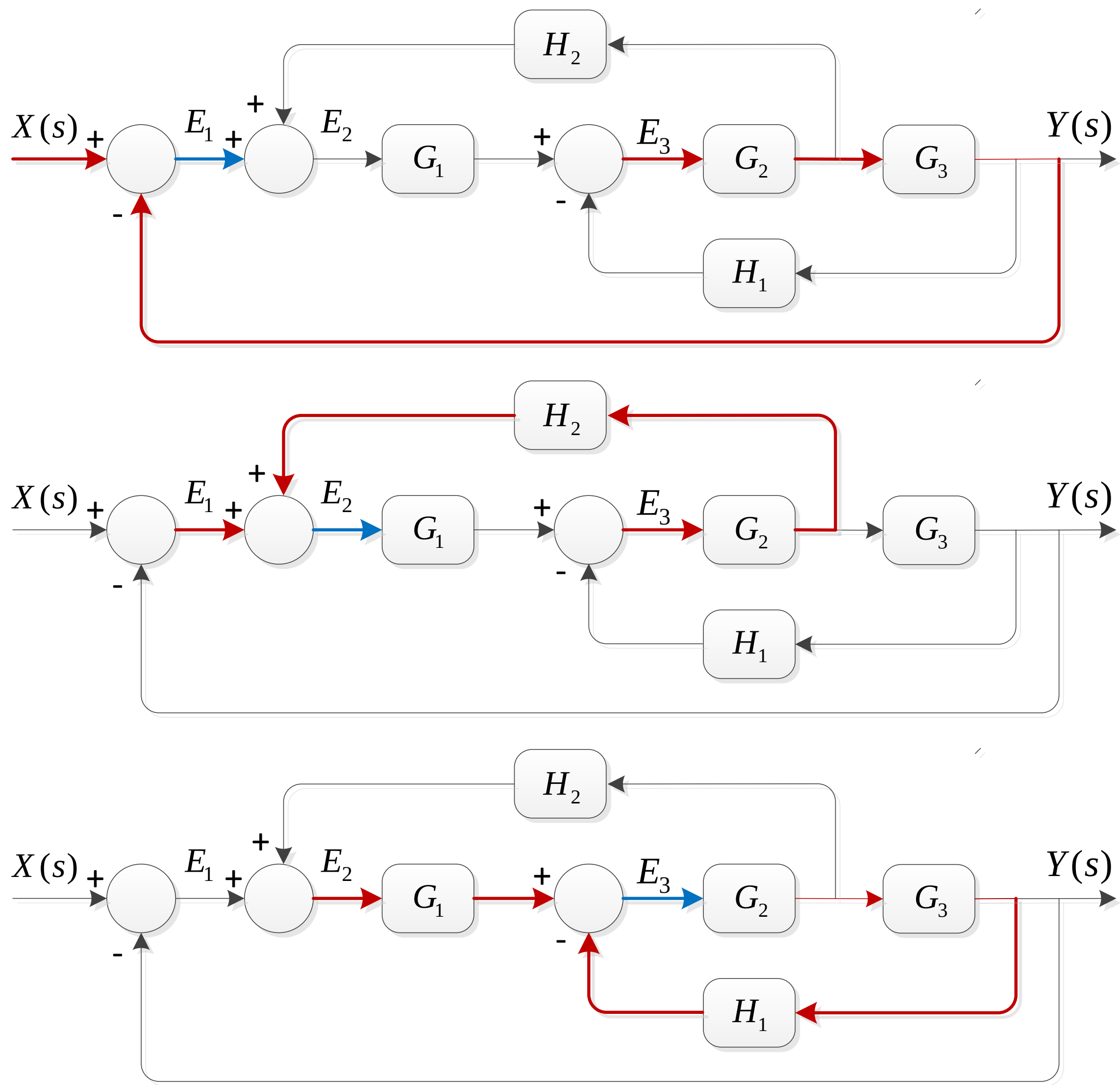
Zadatak se može riješiti na drugi način, tako što se napišu algebarske jednačine za svaki sabirač i izlaz, i riješi sistem jednačina.

Izlaz iz svakog sabirača se po konvenciji zove signal greške. Svaki signal na izlazu iz sabirača treba zapisati u funkciji od ulaznog signala i samih signala greške:

$$E_1 = X - Y = X - G_2G_3E_3,$$

$$E_2 = E_1 + G_2H_2E_3,$$

$$E_3 = G_1E_2 - G_2G_3H_1E_3.$$



Primjer – drugi način

U sljedećem koraku sa lijeve strane treba izdovojiti koeficijente uz signale greške, a na desnu stranu prebaciti ulazne signale. Na sličan način treba zapisati izlaznu jednačinu. Na kraju, dobijeni sistem treba zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & G_2G_3 \\ -1 & 1 & -G_2H_2 \\ 0 & -G_1 & 1+G_2G_3H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} X \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & G_2G_3 \\ -1 & 1 & -G_2H_2 \\ 0 & -G_1 & 1+G_2G_3H_1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2G_3 \end{bmatrix}$$

Dobijeni sistem jednačina se jednostavno rješava u Matlab-u ili nekom drugom programskom paketu:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{B}X,$$

$$Y = \mathbf{CE} = \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}X = \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}X,$$

$$G = \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_2+G_2G_3H_1-G_1G_2H_2}.$$

Napomena: razlikovati gornje matrice **A**, **B**, **C** od modela u prostoru stanja!

Primjer – drugi način

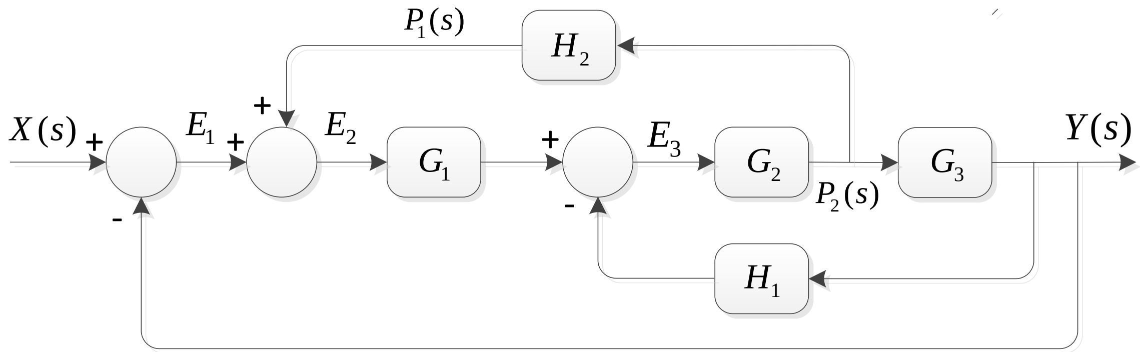
Nekad treba odrediti funkciju prenosa između ulaza i nekog drugog signala u sistemu. Tada je najlakše signale od interesa zapisati u funkciji od signala greške i ulaznog signala i formirati nove matrice. Na primjer, signali $P_1(s)$ i $P_2(s)$ su jednaki: $P_1 = G_2 H_2 E_3$ i $P = G_2 E_3$. Slijedi, da su odgovarajuće izlazne matrice i funkcije prenosa jednake:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2 H_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = P_1 / X = \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B},$$

$$G_2 = P_2 / X = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}.$$




```
>> syms G1 G2 G3 H1 H2
>> A=[1 0 G2*G3;-1 1 -G2*H2;0 -G1 1+G2*G3*H1]
>> B=[1;0;0]
>> C=[0 0 G2*G3]
>> G=simplify(C*A^-1*B)
G =
(G1*G2*G3)/(G1*G2*G3 - G1*G2*H2 + G2*G3*H1 + 1
>> C1=[0 0 G2*H2]
>> C2=[0 0 G2]
% nove matrice
>> G1=simplify(C1*A^-1*B)
% veza između singnala P1 i X
>> G2=simplify(C2*A^-1*B)
% veza između singnala P2 i X
```

Graf toka signala

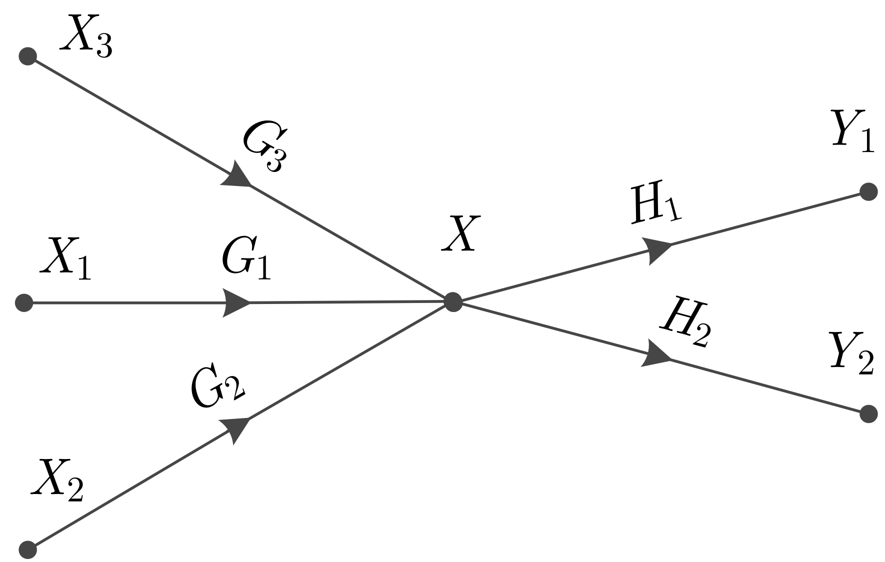
Graf toka signala predstavlja još jedan način za kreiranje matematičkog modela linearnog dinamičkog sistema. Promjenljive (signali) se označavaju čvorovima, a funkcije prenosa orijentisanim granama.

Pri formiranju i analizi GTS-a koriste se sljedeća pravila:

- U jedan čvor može ulaziti proizvoljan broj grana, a isto tako iz jednog čvora može izlaziti proizvoljan broj grana;
- Suma signala koji ulaze u čvor predstavlja promjenljivu čvora (signal čvora);
- Promjenljiva čvora se ravnomjerno prenosi kroz sve grane koje izlaze iz tog čvora;
- Signal se prenosi kroz granu isključivo u smjeru označenom strelicom.

Graf toka signala

Na slici desno je prikazan primjer grafa toka signala kojim se ilustruju prethodna pravila. Sistem ima tri ulazna signala X_1, X_2, X_3. Ova tri signala se stiču u jedan čvor davajući signal X. Signal X se ravnomjerno prenosi ka izlazima Y_1 i Y_2.



Signal koji izlazi iz čvora je jednak sumi signala koji ulaze u čvor:

$$X(s) \;=\; G_1(s)U_1(s) \;+\; G_2(s)U_2(s) \;+\; G_3(s)U_3(s)$$

Signal koji izlazi iz čvora se jednako raspoređuje na grane koje izlaze iz čvora:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= X(s)H_1(s) \\ Y_2(s) &= X(s)H_2(s) \end{aligned}$$

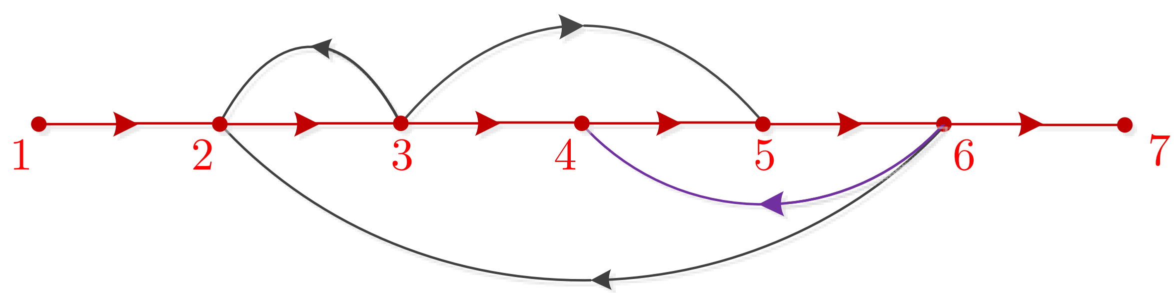
Transformacija SBD u GTS

Strukturni blok dijagram se može transformisati u graf toka signala primjenom sljedećih pravila:

- Sabirači i tačke grananja strukturnog blok dijagrama postaju čvorovi grafa toka signala;
- Blokovi strukturnog blok dijagrama postaju grane grafa toka signala, a funkcije prenosa blokova postaju pojačanja grana;
- Smjer toka signala se pri transformaciji ne mijenja;
- Pošto se signali u čvoru grafa toka signala po definiciji sabiraju, predznak grane sa kojim ona ulazi u sabirač strukturnog blok dijagrama se pridružuje funkciji prenosa, odnosno pojačanju odgovarajuće grane.

Dijagram toka signala

U vezi sa grafovima definisaćemo još nekoliko pojmova. Direktna ili otvorena putanja je skup grana koje međusobno spajaju **ulazni i izlazni čvor**, pri čemu se kroz svaku granu prolazi samo jedanput. Petlja (zatvorena putanja) je putanja koja počinje i završava se u istom čvoru (bilo kojem), pri čemu kroz svaku granu prolazi samo jednom. Dvije putanje (otvorene ili zatvorene) se ne dodiruju ukoliko nemaju zajedničkih **čvorova**.



Na primjeru sa slike putanja 1234567 je direktna. Kombinacija grana 1234564567 nije putanja, jer se dva puta prolazi kroz granu 456. Primjeri petlji su: 232, 4564, dok putanja 3453 nije petlja (kroz granu 53 se ide u suprotnom smjeru). Putanje 232 i 4564 se **ne dodiruju**, dok putanje 232 i 3453 imaju zajednički čvor.

Mason-ovo pravilo

Prednost modelovanja SAU-a grafom toka signala je u tome što se primjenom Mejsonovog pravila relativno jednostavno može odrediti funkcija prenosa sistema. Funkcija prenosa GTS-a se određuje na osnovu sljedeće Mejsonove formule:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta},$$

gdje su:

- n - broj direktnih putanja u grafu.
- P_i – funkcija prenosa (pojačanje) i-te direktne (otvorene) putanje;
- Δ - determinanta grafa;
- Δ_i - Δ primijenjeno na zatvorene putanje koje ne dodiruju i-tu direktnu putanju;

Mason-ovo pravilo

Determinanta grafa se određuje na sljedeći način:

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \ldots (-1)^m \sum \ldots,$$

gdje su:

$\sum L_i$ - zbir pojačanja (prenosa, funkcija prenosa) svih zatvorenih putanja (petlji) grafa;

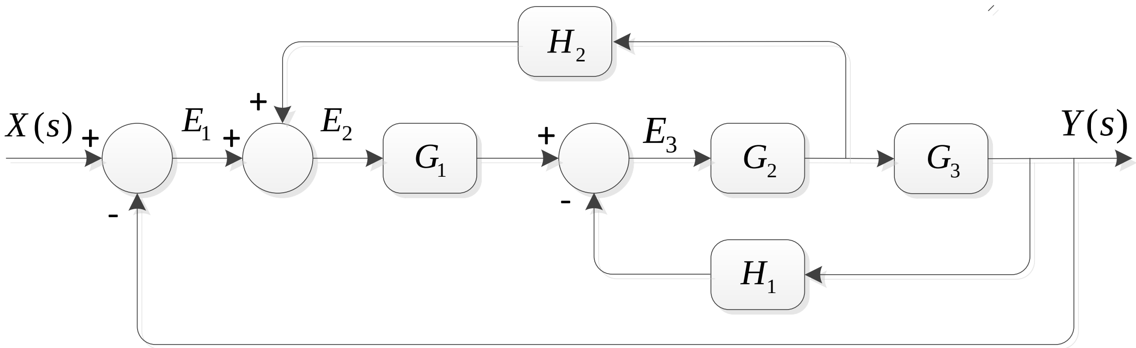
$\sum L_i L_j$ - zbir proizvoda pojačanja svih parova zatvorenih putanja koje se međusobno ne dodiruju.

$\sum L_i L_j L_j$ - zbir proizvoda pojačanja svih tripleta zatvorenih putanja koje se međusobno ne dodiruju.

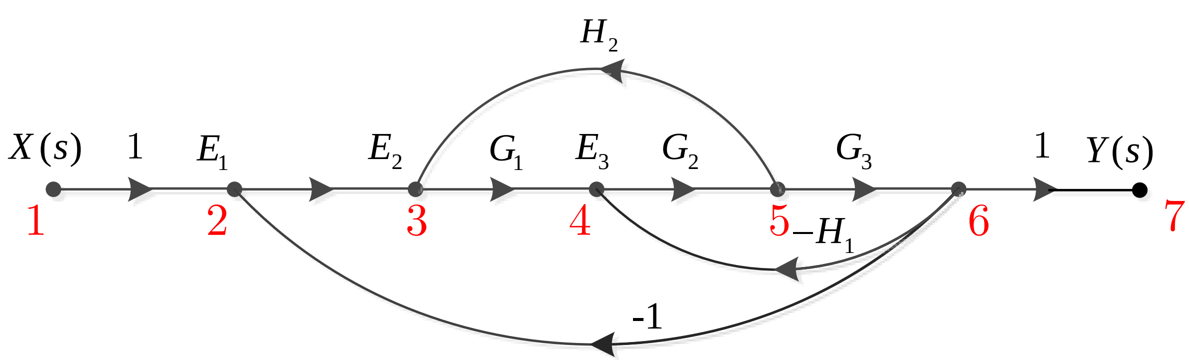
Posmatrajući Mejsonov izraz, može se zaključiti da brojilac determinante grafa toka signala predstavlja karakteristični polinom sistema.

Primjer – Mejsonovo pravilo

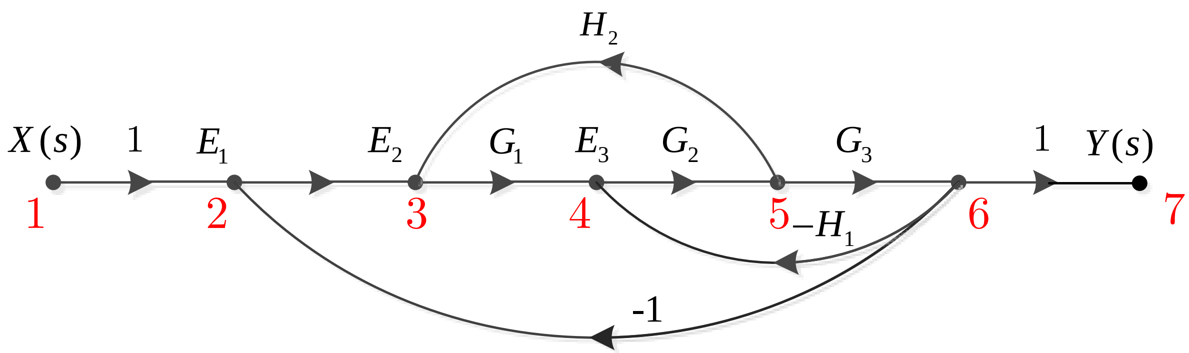
Skicirati graf toka signala SAU-a prikazanog na slici, a zatim primjenom Mason-ovog pravila odrediti funkciju prenosa.



Graf toka signala je prikazan na slici ispod. Voditi računa o tome da su i sabirači i čvorovi SBD-a predstavljeni čvorovima na GTS-u. Čvorovi GTS-a u koji se stiče više grana predstavljaju sabirače na SBD-u, dok oni čvorovi GTS-a u koji ulazi samo jedna grana predstavljaju čvorove SBD-a.



Primjer – Mejsonovo pravilo



Posmatrajući graf toka signala, možemo uočiti da postoji jedna direktna putanja (P_1 = 1234567) i tri zatvorene putanje (L_1=234562, L_2=34563, L_3=4564), pri čemu nema prozivoda od po dvije ili više putanja koje se ne dodiruju. Determinanta grafa je prema definiciji:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3),$$

dok se Δ_i dobija na osnovu Δ tako što se iz Δ izbace sve petlje koje dodiruju i-tu direktnu putanju (izbacuju se svi proizvodi u kojima te petlje učestvuju kao činioci). Svaka zatvorena putanja dodiruje direktnu putanju, pa je $\Delta_1 = 1$. Konačno, funkcija prenosa je jednaka:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{Y(\mathrm{s})}{X(\mathrm{s})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{P_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 - G_1 G_2 H_2 + G_2 G_3 H_1}.$$