- Razvoj računarske tehnike posljednjih decenija zahtijevao je izgradnju adekvatnog matematičkog aparata. Konačnost memorije računara i činjenica da su računari mašine diskretnog dejstva uslovljavaju potrebu rešavanja velikog broja problema na proizvoljno velikim konačnim ili, rjeđe, na besonačnim ali prebrojivim skupovima (diskretni skupovi). Prije pojave računara gotovo da nije postojala potreba za sistematskim razmatranjem ovakvih problema

- Predmet našeg interesovanja biće *kombinatorika.* Dati jenostavnu i preciznu definiciju kombinatorike nije lak zadatak. Najkraće, to je matematička disciplina koja proučava diskretne strukture i relacije, odnosno strukture definisane na konačnim skupovima. Više nego objekti koje proučava, kombinatoriku definišu njene *metode*: dvostruko prebrojavanje, metod uključenja-isključenja, vjerovatnosni metod – uopšteno, iznenađujuća primjena ne sofisticirane "mašinerije" već elementarnih sredstava. To je ono što kombinatoriku čini elegantnom i pristupačnom, i zašto kombinatorne metode moraju biti bliske svakom matematičaru ("in the toolbox of any mainstream mathematician").

Neki kombinatorni problemi

Navešćemo nekoliko primjera u kojima kombinatorne ideje igraju ključnu ulogu.

1. Ramsey-eva teorija. 1950. godine mađarski sociolol Szalai posmatrao je odnose među djecom. Primijetio je da u ma kojoj grupi od 20-oro djece postoje ili četvoro koji se uzajamno poznaju ili četvoro koji se uzajamno ne poznaju. Prije nego je izveo bilo kakav sociološki zaključak, Szalai je kontaktirao tri eminentana mađarska matematičara tog vremena: Erdős-a, Turán-a i Sós-a. Pokazalo se da ovo zaista nije sociološki, već matematučki problem. Naime, za svaku simetručnu relaciju R nad skupom S od bar 18 elemenata, postoji 4-elementni skup $W \subseteq S$ takav da su svaka dva elementa skupa W u relaciji R ili svaka dva elementa skupa W nisu u relaciji R. Ova činjenica je specijalni slučaj Ramsey-eve teoreme dokazane 1930. godine, osnove Ramsey-eve teorije koja se godina kasnije razvila u novu bogatu kombinatornu teoriju.

2. Paradoks turnira. Na košarkaškom turniru učestvuje n timova. Organizator je planirao da po završetku turnira nagradi k najboljih. Našao se u problemu: kako god izabrao k timova među preostalima je postojao tim bolji od svakog od k izabranih. Da li je ovo moguće? Koristeći vjerovatnosnu konstrukciju može se pokazati da za svako $k > 0$ postoji $n > k$ takvo da se ovakva situacija zaista može dogoditi.

3. Brower-ova teorema. 1911. godine Luitzen Brower je publikovao čuvenu Teoremu o fiksnoj tački: Svako neprekidno preslikavanje $f : B^n \to B^n$, gdje je B^n n-dimenziona lopta, ima fiksnu tačku $f(x) = x$.
Slučaj $n = 1$ slijedi jednostavno iz teoreme o srednjoj vrijednosti. Za veće dimenzije originalni dokaz je bio jako komplikovan. Iz kombinatornog rezultata Emanuel Sperner-a iz 1928. godine, kako se kasnije pokazalo, elegantno se dokazuje Brower-ova teorema o fiksnoj tački, pritom jednako elegantan je i dokaz Sperner-ove leme, koji koristi gotovo elementaran metod dvostrukog prebrojavanja.

4. Borsuk-ova pretpostavka. 1933. godine Karol Borsuk je objavio rad u kome je dokazana pretpostavka Stanislaw-a Ulam-a: Svako neprekidno preslikavanje $f : S^n \to R^n$, gdje je S^n n-dimenziona sfera, preslikava dvije antipodalne tačke u isto vrijednost, t.j. postoji $x \in S^n$ tako da važi $f(x) = f(-x)$. U istom radu Borsuk je iznio i sljedeću pretpostavku: Svaki skup $S \subseteq R^n$ konačnog dijametra može se razbiti na $n+1$ skupova strogo manjeg dijametra. Primjer n-dimenzionog regularnog simpleksa pokazuje da je $n+1$ djelova neophodno, jer $n+1$ tjemena se nalaze na rastojanju jednakom dijametru, pa se u particiji moraju naći u različitim blokovima. Primjenom navedene Borsuk-Ulamove teoreme Borsukova pretpostavka je dokazana za glatke tijela. Opšti pretpostavka ostala je otvorena do 1993. godine, kada su je Kahn i Kalai opovrgnuli konstrukcijom diskretnog skupa tačaka koji se ne može razbiti na manje od $1.2^{\sqrt{n}}$ djelova dijametra strogo manjeg od dijametra polaznog diskretnog skupa.

Problemi kojima se kombinatorika bavi uglavnom se mogu klasifikovati na sljedeći način:

egzistencijalni problemi: Da li postoji objekat sa unaprijed definisanim osobinama?

enumerativni problemi (problemi prebrojavanja)**:** Koliko postoji različitih objekata sa unaprijed definisanim osobinama?

konstruktivni problemi**:** Konstruisati objekat sa unaprijed definisanim osobinama

Osnovni kombinatorni principi

Princip jednakosti Neka su A i B neprazni konačni skupovi. Ako između ova dva skupa postoji bijekcija, tada je $|A| = |B|$

Princip zbira Neka su A i B disjunktni konačni skupovi. Tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$

Princip proizvoda Neka su A i B i konačni skupovi. Tada je $|A \times B| = |A|\,|B|$
Princip proizvoda često se formuliše i kao ***princip o uzastopnom prebrojavanju***: Neka su A i B i konačni skupovi i $S \subseteq A \times B$ skup uređenih parova (x_1, x_2) takav da se prva komponenta x_1 može izabrati na p načina, a za svaku već izabranu komponentu x_1 druga komponenta x_2 može se izabrati na q načina. Tada skup S ima pq elemenata.

Primjenom principa matematičke indukcije, princip zbira i princip proizvoda se mogu proširiti na konačnu uniju, odnosno konačan proizvod, uzajamno disjunktnih konačnih skupova.

Dirihleov princip (slaba forma) Ako u n golubarnika sleti $n+1$ golubova, u bar jednom golubarniku naći će se bar dva goluba.

Neki od najdubljih i najsloženijih rezultata moderne kombinatorne teorije proističu iz ovog jednostavnog tvrđenja. Dokaz je gotovo očigledan, a izvodi se kontradikcijom. U literaturi poznat je i tod nazivom *princip pretinaca, princip golubarnika* (od engl. *pigenhole principle*), …. Njemački matematičar G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) prvi ga je jasno formulisao i često koristio u teoriji brojeva i analizi.
Dirihleov princip (jaka forma) Ako u m predmeta smjestimo n kutija, u bar jednoj kutiji naći će se bar $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ predmeta.

Dirihleov princip (opšta forma) Neka je $n \in N$ i $r_1, r_2, \ldots, r_n \in N$. Ako $r_1 + r_2 + \ldots + r_n - n + 1$ predmeta razmjestimo u n kutija $K_1, K_2, \cdots, K_n$, tada bar jedna kutija K_i sadrži više ili jednako r_i predmeta, to jeste, ili K_1 sadrži bar r_1 predmeta ili K_2 sadrži bar r_2 predmeta … ili K_n sadrži bar r_n predmeta.

Dokaz svih formi Dirihleovog principa izvodi se kontradikcijom.

Zadaci

1. Na koliko načina se između 5 muškaraca, 7 žena, 3 dječaka i 4 djevojčice može izabrati a) jedna osoba b) po jedan muškarac, jedna žena i jedno dijete?

   Rešenje: a) 19, princip sume
   b) $5 \cdot 7 \cdot 7$, princip proizvoda

   □

2. Neka su S i T konačni skupovi takvi da je $|S| > |T|$. Preslikavanje $f : S \to T$ nije injekcija.

   Rešenje: Neka je $f : S \to T$ nije injekcija i neka je $f(S) = A$. Prma principu jednakosti $|S| = |A|$. Kako je $A \subseteq T$, slijedi $|S| \le |T|$

   □

3. Neka su S i T konačni skupovi takvi da je $|S| = |T|$. Preslikavanje $f : S \to T$ je injekcija akko je surjekcija.

   Rešenje:

   $\Rightarrow$ Neka je $f : S \to T$ je injekcija. Tada je, $|S| = |f(S)|$. Kako je $|S| = |T|$, to je $|f(S)| = |T|$, t.j. $f(S) = T$, jer je T konačan skup

   $\Leftarrow$ Pretpostavimo da je f surjekcija i da f nije injekcija. Tada postoje $a, b \in S$ takvi da je $a \neq b$ i $f(a) = f(b)$. Neka je $g : S \setminus \{a\} \to T$ restrikcija preslikavanja f na skup $S \setminus \{a\}$. Kako za svaki konačan skup X i svako preslikavanje g definisano na X važi $|g(X)| \le X$, to je

$$|S| = |T|$$

$$= |f(S)|$$

$$= |g(S \setminus \{a\})| \le |S \setminus \{a\}| = |S| - 1$$

   □

4. Među 13 ljudi uvijek postoji dvoje rođenih u istom mjesecu.
5. Čovjek ima najviše 300 000 vlasi na glavi. Dokazati da u državi sa 4,6 miliona stanovnika postoji barem 16 ljudi sa “u dlaku” jednakim brojem vlasi na glavi.

Rešenje: Čovjeka sa i vlasi na glavi "smjestimo" u kutiju K_i , za svako $i \in \{0,1,2,\ldots,300\,000\}$. Prem Dirihleovom principu (jaka forma) u bar jednoj "kutiji" će biti bar $\left\lfloor \frac{4,6 \cdot 10^6 - 1}{300\,001} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{45}{3} \right\rfloor + 1 = 16$ ljudi

□

6. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cijeli brojevi. Dokazati da postoji nekoliko uzastopnih članova niza $a_1, a_2, \ldots, a_m$ čiji je zbir djeljiv sa m.

Rešenje: Posmatrajmo m suma: $a_1,\ a_1 + a_2, \ldots,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Ako je bar jedna od njih djeljiva sa m dokaz je završen. U suptotnom, pri dijeljenju sa m ove sume daju nenulte ostatke, t.j. neki od brojeva $m-1$ brojeva $1,2,\ldots,m-1$. Prema Dirihleomom principu (slaba forma), postoje dvije sume $a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ i $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$, $i < j$, sa istim ostatkom pri dijeljenju sa m. Tade je suma $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ djeljiva sa m.

□

7. (podskupovi bez djelioca, Paul Erdős) Neka je $[2n] = \{1,2,...,2n\}$. Za svaki skup $S \subseteq [2n]$ kardinalnosti $|S| > n$ postoje brojevi $a, b \in S$ takvi da $a \mid b$.

Rešenje: Za svaki neparan broj $a \in [2n]$ neka je $C_a = \{2^k a \mid k \geq 0,\ 2^k a \leq n\}$. Broj klasa ovog tipa je n i svaki element $b \in [2n]$ pripada tačno jednoj od njih, za a dobijeno dijeljenjem broja b najvećim mogućim stepenom dvojke. Neka je $S \subseteq [2n]$ kardinalnosti $|S| > n$. Prema Dirihleovom principu, postoji klasa C_a koja sadrži bar dva elementa skupa S.

□

8. (racionalna aproksimacija) Za svako $x \in R$ i $n > 0$ postoji racionalan broj $\frac{p}{q}$, $1 \geq q \leq n$, tako da je $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$.

napomena: Fiksiranjem imenioca $q = n$ lako se dobija racionalna aproksimacija sa greškom najviše $\frac{1}{n}$. Ovu poboljšanu aproksimacija dao je Dirichlet 1879. godine i tada jasno formulisao princip golubarnika.

Rešenje: Neka je $\{x\} = x - [x]$ razlomljeni dio broja x. Posmatrajmo $\{ax\}$ za $a = 1,2,\ldots,n+1$ i razvrstajmo ovim $n+1$ brojeva u n intervala $\left[0,\frac{1}{n}\right)$, $\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$, …, $\left[\frac{n-1}{n},1\right)$. Tada postoji interval koji sadrži bar dva broja $\{ax\} \le \{a'x\}$. Uzmimo sada $q = a' - a$. Dobijamo da važi $\{qx\} = \{a'x - ax\} < \frac{1}{n}$. Ovo znači da je $qx = p + \varepsilon$, gdje je p cio broj i $\varepsilon = \{qx\} < \frac{1}{n}$. Otuda, $x = \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q}$.

□

9. (monotoni podnizovi, P. Erdős, G. Szekeres, 1935.) Za svaki niz od $mn+1$ različitih realnih brojeva $a_0, a_1, \ldots, a_{mn}$ postoji rastući podniz dužine $m+1$ ili opadajući podniz dužine $n+1$.

Rešenje: Označimo sa t_i maksimalnu dužinu rastućeg podniza koji počinje članom a_i. Ako je $t_i > m$ za neko i, dokaz je gotov. Pretpostavimo da je $t_i \in \{1,2,\ldots,m\}$ za svako i. Na ovaj način $mn+1$ elemenata skupa $\{a_0, a_1, \ldots, a_{mn}\}$ smjestili smo u m kutija. Prema Dirihleovom principu, postoji $s \in \{1,2,\ldots m\}$ takvo da je $t_i = s$ za bar $n+1$ indeksa $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$. Pokažimo da je $a_{i_0} > a_{i_1} > \ldots > a_{i_n}$. Zaista, aki bi postojala dva člana takva da je $a_{i_j} < a_{i_{j+1}}$, rastući podniz koji počinje u $a_{i_{j+1}}$ bismo mogli proširiti članom a_{i_j}, čime bi dobili rastući podniz dužine $s+1$. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom $t_{i_j} = s$.

□