Osnovni kombinatorni objekti: permutacije i kombinacije skupova i multiskupova

Osnovni pojmovi klasične kombinatorike su kombinacije i permutacije skupa. Ljudi sa srednjim matematičkim obrazovanjem upravo njih i podrazumijevaju pod riječju kombinatorika.

Neka je zadat skup od n elemenata i k nenegativan cio broj, $k \le n$. Koliko imamo mogućnosti za izbor k elemenata ovoga skupa? Odgovor, naravno, zavisi od toga da li je poredak kojim "izvlačimo" elemente bitan ili ne. U ovom poglavlju daćemo precisne definicije ovakvih "izbora" elemenata skupa, izračunati brojeve tih "izbora" i dokazati neke njihove osobine.

Definicija 1: Neka su $k, n \in N$. k ***-permutacija*** (bez ponavljanja) skupa S od n elemenata je svaka uređena k -torka različitih elemenata skupa S. Broj svih k -permutacija skupa S od n elemenata označavamo sa $P(n,k)$.

k -permutacije skupa S od n nazivamo i varijacijama k-te skupa od n elemenata.
n -permutacije skupa S od n elemenata su ***permutacije skupa*** S. Njihov broj označavamo i sa P(n).

Definicija 2: Neka su $k, n \in N$. k ***-permutacija sa ponavljanjem*** skupa S od n elemenata je svaka uređena k -torka ne obavezno različitih elemenata skupa S. Broj svih k -permutacija sa ponavljanjem skupa S od n elemenata označavamo sa $\overline{P}(n,k)$.

Definicija 3: Neka su $k, n \in N,\ k \le n$. k ***-kombinacija*** skupa S od n elemenata je svaki k -elementni podskup skupa S. Broj svih k -kombinacija skupa S od n elemenata označavamo sa $C(n,k)$. Koristimo i oznaku $\binom{n}{k}$.

Teorema 1: Za $k, n \in N$, $k \le n$, važi:

1) $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$,
(proizvod $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ je opadajući faktorijel, za koji koristimo oznaku $(n)_k$)
2) $\overline{P}(n,k) = n^k$
3) $C(n,k) = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dokaz: 3) Neka je $C(n,k)=h$ i $B_1, B_2, \ldots, B_h$ svi $k-$podskupovi skupa S od n elemenata. Označimo sa $\boldsymbol{A}$ familiju svih k-permutacija skupa S. Za svako $i=\overline{1,h}$ neka je A_i familija svih permutacija skupa k-skupa B_i. Tada je

$$\boldsymbol{A} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h$$

pa je na osnovu principa sume $|\boldsymbol{A}| = |A_1| + |A_2| + \ldots |A_h|$, to jeste $(n)_k = h \cdot k!$. Odavde slijedi jednakost 3).

□

Teorema 2: Neka su $k, n \in N$, $k \leq n$, a S n-skup, to jeste $|S| = n$. Tada je:

a) broj svih injekcija sa $[k] = \{1,2,\ldots,k\}$ u S jednak $P(n,k)$,

b) broj svih bijekcija sa S u samog sebe jednak je $P(n)$.

Dokaz: ………………..

□

Definicija 4: Neka je A skup od n elemenata. *Multiskup nad skupom A* je uređeni par $M = (A, m)$, gdje je m funkcija nad A takva da $m : A \to N_0 \cup \{+\infty\}$.

Za svako $x \in A$, $m(x)$ je višestrukost elementa x u multiskupu M. Ako je $\sum_{x \in A} m(x)$ konačan broj, M je konačan multiskup kardinalnosti $\sum_{x \in A} m(x)$.

Intuitivno, multiskup je skup u kojem je dozvoljeno ponavljanje elemenata. Ako je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, multiskup $M = (A, m)$ ćemo označavati sa $M = \{a_1^{m(a_1)}, a_2^{m(a_2)}, \ldots, a_n^{m(a_n)}\}$.

k***-permutacija sa ponavljanjem*** skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ su k-permutacija multiskupa $M = \{a_1^{\infty}, a_2^{\infty}, \ldots, a_n^{\infty}\}$.

Teorema 3: Neka je $M = \{a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \ldots, a_k^{s_k}\}$ multiskup i $s_1, s_2, \ldots, s_k \in N$ tako da je $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n$ (to jeste M je familija od n objekata k različitih tipova: s_1 objekata tipa a_1, s_2 objekata tipa a_2, ..., s_k objekata tipa a_k. Objekti istog tipa se ne razlikuju). Broj permutacija multiskupa $M = \{a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \ldots, a_k^{s_k}\}$ je

$$P_n(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \frac{n!}{s_1! s_2! \ldots s_k!}$$

Dokaz: ………………..

□

Teorema4: Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prirodni brojevi takvi da je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ i A skup od n elemenata. Broj načina na koji se skup A može razložiti na uređenu uniju k uzajamno disjunktnih nepraznih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kardinalnosti $n_1, n_2, \ldots, n_k$, redom, tako da je $\bigcup_{i=\overline{1,k}} A_i = A$ je $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Dokaz: ………………..

□

Ova teorema predstavlja još jednu kombinatornu interpretaciju brojeva $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ koji zadovljavanju jednakost $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Kasnije, u polinomijalnoj teoremi, uvešćemo ih pod emenom polinomijalni koeficijenti.

Definicija 5: Neka su $k, n \in N$. k-kombinacija sa ponavljanjem skupa S od n elemenata je svaki multiskup kardinalnosti k nad skupom S. Broj svih k-kombinacija sa ponavljanjem skupa S od n elemenata označavamo sa $\overline{C}(n, k)$.

Teorema 5: $\overline{C}(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}$

Dokaz: ………………..

□

Teorema 6: Neka je $M = \{a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \ldots, a_k^{s_k}\}$ multiskup od k različitih elemenata višestrukosti $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Ukupan broj svih podmultiskupova multiskupa M je $(s_1 + 1)(s_2 + 1)\ldots(s_k + 1)$

Dokaz: ………………..

□

Nadalje, skupove kardinalnosti n zvaćemo n-skupovima, a multiskupove kardinalnosti n n-multiskupovima.

Teorema 7 (De Moivré): Neka je $M = \{a_1^{\infty}, a_2^{\infty}, \ldots, a_n^{\infty}\}$ multiskup sa n različitih elemenata, od kojih svaki ima beskonačnu vešestrukost. Tada je broj k-kombinacija multiskupa M, u kojima se svaki od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pojavljuje bar jednom jednak $\binom{k-1}{n-1}$.

Dokaz: ………………..

□

Teorema 8: Neka su $k \geq 0$, $n \geq 1$, $v \geq -1$ cijeli brojevi. Broj uređenih k-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ skupa $[n] = \{1, 2, \ldots n\}$ za koje je $a_{j+1} - a_j > v$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, je

$$f_v(n,k) = \binom{n-(k-1)v}{k}, \text{ za } n \geq (k-1)v.$$

Dokaz: ………………..

□

posledica: Neka su $k, n, v \in N_0$, $n \geq (k-1)v$. Broj k-podskupova $S \subseteq [n]$, takvih da je za sve $x, y \in S$, $x \neq y$, $|x-y| > v$, jednak je $f_v(n,k) = \binom{n-(k-1)v}{k}$.

Dokaz: ………………..

□

Teorema 9 (Kaplansky, 1943.): Neka su $k, n, v \in N_0$, $n > kv$. Broj k-podskupova $S \subseteq [n]$, takvih da je za sve $x, y \in S$, $x \neq y$, $v < |x-y| < n-v$, jednak je

$$g_v(n,k) = \frac{n}{n-kv}\binom{n-kv}{k}.$$

Zadaci

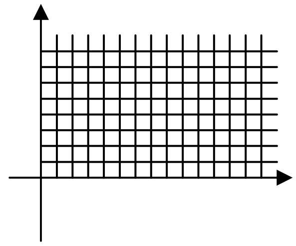
1. U Markovom i Aninom odjeljenju je ukupno 28 učenika:16 dječaka i 12 djevojčica. Na koliko načina razredni starješina može formirati delegaciju tako da se ona sastoji od:
   a) 5 učenika, i to 3 dječaka i 2 djevojčice,
   b) 5 učenika, s tim da u delegaciji ne mogu zajedno biti Marko i Ana?

2. Dokazati kombinatornu jednakost $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Rješenje 1 Uspostavljanjem bijekcije između $k-$podskupova i $(n-k)-$podskupova skupa od n elemenata.

Rješenje 2 Algebarski

Rješenje 3 Određivanjem broja najkraćih puteva od pozicije $O(0,0)$ do pozicije $A(x,y)$ u gradu sa mrežom ulica čije je tlocrt u Oxy-koordinatnim sistemu predstavljen na slici.



3. Na koliko načina se n ljudi može rasporediti oko okruglog stola, ako se dva razmještaja A i B smatraju jednakim ako svaki čovjek pri razmještaju A ima istog susjeda sa lijeva kojeg sa lijeva ima pri razmještaju B i istog susjeda sa desna kojeg sa desna ima pri razmještaju B?

Rješenje: $(n-1)!$

4.Na koliko načina se šestoro ljudi može rasporediti oko okruglog stola, ako se dva razmještaja A i B smatraju jednakim ako svaki čovjek pri ta dva razmještaju ima iste susjede ?

Rješenje: $\frac{1}{2}(n-1)!$

5. Na koliko načina za okrugli sto može sjesti n bračnih parova, ako
a) muškarci i žene alterniraju,
b) muž i žena jednog od tih parova ne žele sjedjeti jedno do drugog?
Dva razmještaja su ista ako su isti susjedi sa lijeva i isti sa desna (isti do na rotaciju stola).
Rješenje: a) $n!(n-1)!$, b) $(2n-1)!-2(n-2)!$

6. Koliko rješenja u skupu $N_0 \times N_0 \times N_0 \times \ldots \times N_0$ ima jednačina $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$?

Rješenje: Odgovor $\binom{n+k-1}{k}$, to jeste $\binom{n+k-1}{n-1}$

Uspostaviti bijekciju između ove familije rješenja i skupa svih $(0,1)-$nizova dužune $n+k-1$ sa tačno k jedinica i tačno $n-1$ nula .

7. Koliko rješenja u skupu $N \times N \times N \times \ldots \times N$ ima jednačina $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$?

Rješenje: Odgovor $\binom{k-1}{n-1}$.

8.Na koliko načina n jednakih svesaka možemo raspodijeliti među k učenika tako da svako dobije bar po jednu svesku?

9.Koliko ima strogo rastućih, a koliko neopadajućih nizova dužine k čiji su članovi elementi skupa $\{1,2,\ldots,n\}$?

10. Koliko dijagonala ima konveksni $n-$tougao?

Rješenje: $\binom{n}{2}-n$

11. U ravni su zadate tačke $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Kroz tačku A_i povučeno je n_i pravih, $i = 1, 2, \ldots k$. Odrediti najveći mogući broj presječnih tačaka ovih pravih.

Rješenje: $\binom{n_1 + n_2 + \ldots n_k}{2} - \sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2} + k$

11. Na koliko načina može dvoje ljudi podijeliti među sobom n_1 predmeta prve vrste, n_2 predmeta druge vrste, ..., n_k predmeta k-te vrste, pod uslovom da svako od njih dobije barem s_i predmeta i-te vrste, $i = 1, 2, \ldots, k$?

Rješenje: $\prod_{i=1}^{k} (n_i - 2s_i + 1)$.

12. Koliko ima 5-ocifrenih prirodnih brojeva koji imaju iste cifre kao i brojevi:
a) 34125, b) 12034?
Rješenje: a) 5!, b) $4 \cdot 4!$.

13. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1 000 000 u kojima se pojavljuje cifra 5?
Rješenje: Broj k-tocifrenih prirodnih brojeva i kojima se ne pojavljuje cifra 5 je $8 \cdot 9^{k-1}$, pa je broj k-tocifrenih prirodnih brojeva u kojima se pojavljuje cifra 5 jednak $9 \cdot 10^{k-1} - 8 \cdot 9^{k-1}$.

14. Koliko puta se pojavljuje broj 5 na listi svih prirodnih brojeva od 1 do 1 000 000?
Rješenje: $\sum_{s=1}^{6} s \binom{6}{s} 9^{6-s}$, jer brojeva manjih od 1 000 000 (to jeste najviše šestocifrenih brojeva) u kojima se cifra 5 pojavljuje tačno s puta ima $\binom{6}{s} 9^{6-s}$.

13. Koliko djelioca ima prirodan broj n čija je prosta faktorizacija $n = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \ldots p_1^{\alpha_k}$, a koliko, među njima, ima djelioca koji nisu kvadrati prirodnih brojeva?
Rješenje: broj svih djelioca je $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$, a broj djelioca koji nisu kvadrati prirodnih brojeva je $\prod_{i=1}^{k} \left(\left[\frac{\alpha_i - 1}{2} \right] + 1 \right)$.

14. Na polici se nalazi 20 knjiga. Na koliko se načina može odabrati 7 knjiga tako da nikoje dvije od njih nisu bile susjedne na polici?

Rješenje: $f_1(20, 7) = \binom{14}{7}$.

15. Na koliko se načina od 20 poslanika koji sjede za okruglim stolom može formirati sedmočlana delegacija, tako da nikoja dva člana delegacije nisu susjedi za stolom?

Rješenje: $g_1(20, 7) = \frac{20}{13} \binom{13}{7}$.