Osobine binomnih koeficijenata. Binomna formula.

Broj k-podskupova skupa od n elemenata, za svako $k, n \in N_0$, $k \le n$ označili smo sa $\binom{n}{k}$. Sa druge strane, pokazali smo da se njihov broj izračunava po formuli $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Iz tog razloga, sva tvrđenja vezana za ove simbole možemo dokazivati na dva načina: kombinatorno i algebarski. Tada je, posmatrano bilo kombinatorno bili algebarski, prirodno i njihovo proširenje na sve nenegativne cijele brojeve k i n, koje implicira: $\binom{n}{k} = 0,\ k > n.$

Binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ imaju neonično veliki broj primjena i sasvim sigurno su jedan od najvažnjih kombinatornih pojmova. Njihovo najvažnije svojstvo je iskazano u teoremi o stepenu binoma, to jeste u tzv. Binomnoj formuli. Binomna formula i trougaoni raspored binomnih koeficijenata obično se vezuju za Blejza Paskala (Blaise Pascal), koji ih je opisao u 17. vijeku. Ipak, oni su bili poznati i kineskom matematičaru Jang Huiu (Yang Hui) u 13., persijskom matematičaru Omaru Hajjamu (Omar Khayyám) u 11. vijeku.

Teorema 1 (osobine binomnih koeficijenata):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (osobina simetrije),

b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$,

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Paskalova formula),

d) za svako $n \in N$ niz $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ je unimodalan. Za n parno:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \ldots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n},$$

a za n neparno:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \ldots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

Dokaz : kombinatorni dokaz

□

Teorema 2 (Binomna formula): Za svako $n \in N$ i sve $x, y \in C$ važi jednakost

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

<u>Dokaz I</u>: indukcijom po $n \in N$, uz korišćenje osobine simetrije $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

<u>Dokaz II</u>: kombinatorni dokaz

□

<u>Posljedice</u>:

1. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$
2. $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$
3. $\sum_{j=0} \binom{n}{2j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \sum_{j=0} \binom{n}{2j+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \ldots = 2^{n-1}.$

<u>Teorema 3</u>:

a) $\sum_{j=0}^{s} \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} \ldots + \binom{n+s}{s} = \binom{n+s+1}{s},$

b) $\sum_{j=0}^{n-s} \binom{s+j}{s} = \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \binom{s+2}{s} \ldots + \binom{n}{s}$
$= \binom{0}{s} + \binom{1}{s} + \ldots \binom{s}{s} + \binom{s+1}{s} + \ldots + \binom{n}{s}$
$= \binom{n+1}{s+1},$

c) $\binom{n}{r}\binom{r}{s} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r-s} = \binom{n}{r-s}\binom{n-r+s}{s},$

d) $\binom{n}{0}\binom{m}{s} + \binom{n}{1}\binom{m}{s-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{s-2} + \ldots + \binom{n}{s}\binom{m}{0} = \sum_{j=0}^{s} \binom{n}{j}\binom{m}{s-j} = \binom{m+n}{s}$
(Vandermondeova konvolucija),

e) $\binom{n}{0}\binom{m}{0} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{m}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{m}{j} = \binom{m+n}{n}.$

<u>Dokaz</u> : ………………..

□

Zadaci

1. Koji je koeficijent uz $x^7 y^{13}$ u razvoju izraza $(x+y)^{20}$?

<u>Rješenje:</u> $\binom{20}{7}$

2. Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x koji predstavlja razvoj izraza $(3x-2)^{100}$.

<u>Rješenje:</u> $\sum_{k=0}^{100} 3^k (-2)^{100-k} = 1$

3. Neka je p prost broj. Dokazati da su brojevi $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$ djeljivi sa p.

4. Korišćenjem poznatih binomnih identiteta izvesti formule za zbir prvih n prirodnih brojeva, zbir kvadrata kvadrata i zbir kubova prvih n prirodnih brojeva.

<u>Rješenje:</u>

(1) $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$, pa je

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(2\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) $k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$, pa je

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} \left(6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + 5\binom{k}{1} \right) = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + 5\binom{n+1}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5. Ako je r nenegativan cio broj, naći vrijednost izraza $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} k$.

<u>Rješenje:</u>

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} k = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}\frac{s}{k} k = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1} = \sum_k \binom{r}{k}\binom{s-1}{s-k} = \binom{r+s-1}{s}.$$

Primijenjeni su: osobina b) iz teorema 1, osobina simetričnosti binomnih koeficijenata i Vandermondeova konvolucija.

6. Naći vrijednost izraza $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

<u>Rješenje:</u>

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$. Primijenjeni su osobina simetričnosti binomnih koeficijenata i Vandermondeova konvolucija.

7. Izračunati sljedeće sume:

1) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k}$, 2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{k}{m}$, 3) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{k}{m}$.

Rješenje:

1)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}=-n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}=0,$$

2)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{k}{m}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{m-1}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m-1}=\frac{1}{m}\binom{n}{m},$$