# Polinomna formula

**Teorema 1.** *(Polinomna formula): Neka su $n, k \in N$. Tada za sve $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$ važi:*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \\ n_i \geq 0,\, n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}} \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k},$$

*pri čemu se sumiranje vrši po svim $k$-torkama $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ nenegativnih cijelih brojeva, takvih da je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.*

**Dokaz:** Tvrđenje ćemo dokazati uopštavajući kombinatorni dokaz binome teoreme.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

Oslobađanjem od zagrada, poslije izvršenih $k^n$ množenja, dobijamo sabirke oblika $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. Za svaku $k$-torku $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ nenegativnih cijelih brojeva, takvih da je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, monom $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ se u dobijenoj sumi pojavljuje kao sabirak onoliko puta koliko imamo mogućnosti da se od ponuđenih $n$ zagrada za sabirak $x_1$ odlučimo $n_1$ puta, za sabirak $x_2$, od preostalih $n - n_1$ zagrada, se odlučimo $n_2$ puta, za $x_3$, od $n - n_1 - n_2$ zagrada, se odlučimo $n_3$ puta, i t.d. Prema principu proizvoda slijedi da se monom $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ kao sabirak u gornjoj sumi pojavljuje

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \\
= \; &\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\cdots\frac{(n-n_1-\ldots n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots n_k)!} \\
= \; &\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}
\end{aligned}$$

puta.

$\square$

**Teorema 2.** *Za proizvoljan prost broj $p$ i $x_1, x_2, \ldots, x_k \in Z$:*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \ldots + x + k^p \pmod p)$$

**Dokaz:**

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^p &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \\ n_i \geq 0,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = p}} \binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} \\
&= x_1^p + x_2^p + \ldots + x_k^p + \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_k),\ 0 \leq n_i < p \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = p}} \binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} \\
&\equiv x_1^p + x_2^p + \ldots + x_k^p \pmod{p}
\end{aligned}
$$

Kako je $p$ prost broj, polinomijalni koeficijenti $\binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k}$ su djeljivi sa $p$, za svaku $k$-torku $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ prirodnih brojeva strogo manjih od $p$.

□

**Posljedica 1.** (Mala Fermaova teorema) *Za prirodan broj $k$ i prost broj $p$,*

$$k^p \equiv k \pmod{p}.$$