Formula uključenja - isključenja

Teorema 1. (Formula uključenja-isključenja) *Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Kardinalni broj unije skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zadovoljava jednakost:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1} \sum_{1\leq i_1<1_2<\ldots<i_s\leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}|$$

Ako uvedemo oznaku

$$A_I = \bigcap_{i\in I} A_i,$$

za svaki indeksni skup $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, gornja formula može se zapisati i na sljedeći način:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=s}} |A_I|.$$

Dokaz: Matematičkom indukcijom

□

Primjer 1. (Ojlerova funkcija broja)

Ojlerova funcija je preslikavanje $\varphi : N \to N$ koje svakom prirodnom broju n pridružuje broj prirodnih brojeva manjih od n i uzajamno prostih sa n, to jeste

$$\varphi(n) = |\{k|k \leq n, NZD(k, n) = 1\}|$$

Primjenom formule uključenja-isključenja naći ćemo zatvorenu formulu za izračunavnje vrijednosti Ojlerove funkcije.

Prema osnovnoj teoremi aritmetike, svaki prirodan broj $n \in N$ ima jedinstvenu prostu faktorizaciju, to jeste postoje prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in N$ tako da je

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}.$$

Neka je $n \in N$ i $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ njegova prosta faktorizacija. Za svako i, $1 \leq i \leq k$, neka je $A_i = \{j \in [n] \mid j \text{ je djeljivo sa} p_i\}$. Prema definicija broja $\varphi(n)$,

$$\varphi(n) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k|.$$

Otuda, primjenom formule uključenja - isključenja,

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) &= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k}| \\
&= n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| \\
&= n - \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < 1_2 < \ldots < i_s \le k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}| \\
&= n + \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s} \sum_{1 \le i_1 < 1_2 < \ldots < i_s \le k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_s}} \\
&= n \left(1 + \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s} \sum_{1 \le i_1 < 1_2 < \ldots < i_s \le k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_s}} \right) \\
&= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_k}).
\end{aligned}
$$

Primjer 2. (Problem totalne zbrke ili "le probleme des recontres")

n ljudi je došlo u pozorište i predalo kapute na garderobu. Na koliko im načina garderober, poslije završene predstave, može vratiti kapute, ali tako da napravi totalnu zbrku, to jeste da niko natrag ne dobije svoj kaput? Prevedeno na "matematički" jezik, pitanje glasi: Koliko ima permutacija $f : [n] \to [n]$ bez fiksnih tačaka? Pri tome, $i \in [n]$ je fiksna tačka permutacije f ako je $f(i) = i$.

Neka je σ_n skup svih permutacija skupa $[n]$. Za svako $i \in [n]$ označimo sa A_i skup permutacija $f \in \sigma$ čija je i fiksna tačka. Dalje, neka je D_n broj permutacija $f \in \sigma_n$ bez fiksnih tačaka (broj deranžmana). Primjenom formule uključenja - isključenja, dobijamo da važi:

$$
\begin{aligned}
D_n &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n| \\
&= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}| \\
&= |\sigma_n| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \\
&= n! - \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < 1_2 < \ldots < i_s \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}| \\
&= n! + \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} \sum_{1 \le i_1 < 1_2 < \ldots < i_s \le n} (n-s)! \\
&= n! + \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} \binom{n}{s} (n-s)! \\
&= n! \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s} \frac{1}{s!} \\
&= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)
\end{aligned}
$$

Primjer 3. (Broj kombinacija multiskupa sa ograničenim višestrukostima)

Primjer 4. (Broj "na" preslikavanja. Stirlingovi brojevi druge vrste)