Diskretna matematika 1

Binomna i polinomijalna formula

1. Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x koji predstavlja razvoj izraza $(3x-2)^{100}$.

◀

$$(3x-2)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^{100-k} x^{100-k} (-2)^k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^{100-k} (-2)^k = (3-2)^{100} = 1.$$

▶

2. Naći koeficijent uz:

(a) x^2y^3z u razvoju izraza $(2x+2y-3z)^6$;
(b) x^2y^8z u razvoju izraza $(2x+y^2-5z)^7$;
(c) $u^2v^3z^3$ u razvoju izraza $(3uv-2z+u+v)^7$;
(d) x^{10} u razvoju izraza $(1-x^2+x^3)^{11}$;
(e) x^3 u razvoju izraza $(1-x+2x^2)^9$.

◀

(a) $(2x+2y-3z)^6 = \displaystyle\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=6\\ k_1,k_2,k_3\geqslant 0}} \binom{6}{k_1,k_2,k_3} (2x)^{k_1}(2y)^{k_2}(-3z)^{k_3}$

$$\Downarrow$$

koeficijent uz x^2y^3z je

$$\binom{6}{2,3,1} \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot (-3)^1 = -5760.$$

(b) $(2x+y^2-5z)^7 = \displaystyle\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=7\\ k_1,k_2,k_3\geqslant 0}} \binom{7}{k_1,k_2,k_3} (2x)^{k_1}(y^2)^{k_2}(-5z)^{k_3}$

$$\Downarrow$$

koeficijent uz $x^2y^8z = x^2(y^2)^4z^1$ je

$$\binom{7}{2,4,1} \cdot 2^2 \cdot 1^4 \cdot (-5)^1 = -2100.$$

(c) $(3uv-2z+u+v)^7 = \sum\limits_{\substack{k_1+k_2+k_3+k_4=7 \\ k_1,\ldots,k_4\geqslant 0}} \binom{7}{k_1,k_2,k_3,k_4}(3uv)^{k_1}(-2z)^{k_2}u^{k_3}v^{k_4};$

$$u^2v^3z^3 = (uv)^1z^3u^1v^2, \quad 1+3+1+2=7$$

$$u^2v^3z^3 = (uv)^0z^3u^2v^3, \quad \text{ali } 0+3+2+3\neq 7$$

$$u^2v^3z^3 = (uv)^2z^3u^0v^1, \quad \text{ali } 2+3+0+1\neq 7$$

$$\Downarrow$$

koeficijent uz $u^2v^3z^3$ je

$$\binom{7}{1,3,1,2}\cdot 3^1\cdot(-2)^3\cdot 1^1\cdot 1^2 = -10080.$$

(d) $(1-x^2+x^3)^{11} = \sum\limits_{\substack{k_1+k_2+k_3=11 \\ k_1,k_2,k_3\geqslant 0}} \binom{11}{k_1,k_2,k_3} 1^{k_1}(-x^2)^{k_2}(x^3)^{k_3},$

$$x^{10} = (x^2)^5(x^3)^0, \quad x^{10} = (x^2)^2(x^3)^2$$

$$\Downarrow$$

koeficijent uz x^{10} je

$$\binom{11}{6,5,0}\cdot 1^6\cdot(-1)^5\cdot 1^0 + \binom{11}{7,2,2}\cdot 1^7\cdot(-1)^2\cdot 1^2 = 1518.$$

(e) $(1-x+2x^2)^9 = \sum\limits_{\substack{k_1+k_2+k_3=9 \\ k_1,k_2,k_3\geqslant 0}} \binom{9}{k_1,k_2,k_3} 1^{k_1}(-x)^{k_2}(2x^2)^{k_3},$

$$x^3 = (x)^1(x^2)^1, \quad x^3 = (x)^3(x^2)^0$$

$$\Downarrow$$

koeficijent uz x^3 je

$$\binom{9}{7,1,1}\cdot 1^7\cdot(-1)^1\cdot 2^1 + \binom{9}{6,3,0}\cdot 1^6\cdot(-1)^3\cdot 2^0 = -228.$$

►

3. Odrediti broj racionalnih članova u razvoju $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$.

◄

$$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{100-k}\left(\sqrt[4]{3}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot 2^{\frac{100-k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{4}} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot 2^{33}\cdot 2^{\frac{1-k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}.$$

Racionalni su oni članovi razvoja kod kojih su $\dfrac{1-k}{3}$ i $\dfrac{k}{4}$ cijeli brojevi, $k\in\{0,1,2,\ldots,100\}$.

$\dfrac{k}{4}$ je cio broj ako je $k \in \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots, 92, 96, 100\} =: A$.

Broj $\dfrac{1-k}{3}$, $k \in A$, je cio broj ako je $k = 4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100$. Dakle, racionalnih članova u datom razvoju ima 9.

▶

4. Naći član razvoja binoma $(3x+2)^7$ sa najvećim koeficijentom.

◀

$$(3x+2)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k \cdot x^{7-k}.$$

Neka je

$$b_k := \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$

Iz uslova

$$b_k > b_{k+1} \text{ i } b_k > b_{k-1}$$

tj. iz

$$\binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > \binom{7}{k+1} \cdot 3^{7-k-1} \cdot 2^{k+1} \text{ i } \binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > \binom{7}{k-1} \cdot 3^{7-k+1} \cdot 2^{k-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\binom{7}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > \binom{7}{k} \cdot \frac{7-(k+1)+1}{k+1} \cdot 3^{7-k} \cdot 3^{-1} \cdot 2^k \cdot 2$$

i

$$\binom{7}{k-1} \cdot \frac{7-k+1}{k} \cdot 3^{7-k} \cdot 2^k > \binom{7}{k-1} \cdot 3^{7-k} \cdot 3 \cdot 2^k \cdot 2^{-1}$$

dobija se

$$\frac{11}{5} < k < \frac{16}{5} \Longrightarrow k = 3.$$

Član sa najvećim koeficijentom je

$$\binom{7}{3} \cdot 3^4 \cdot 2^3 \cdot x^4 = 22680x^4.$$

Ovdje smo koristili da za $1 \leqslant k \leqslant n$ važi $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{k-1} \cdot \dfrac{n-k+1}{k}$.

▶

5. U razvoju $\left(\dfrac{1}{x} + 3x\right)^n$ naći član koji ne sadrži x, znajući da je koeficijent desetog člana najveći.

◀

$$\left(\frac{1}{x} + 3x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-k} (3x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k \cdot x^{-n+2k}.$$

Neka je

$$b_k := \binom{n}{k} \cdot 3^k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Koeficijent b_9 je najveći, pa je

$$b_9 > b_{10} \text{ i } b_9 > b_8,$$

odnosno iz

$$\binom{n}{9} \cdot 3^9 > \binom{n}{10} \cdot 3^{10} \text{ i } \binom{n}{9} \cdot 3^9 > \binom{n}{8} \cdot 3^8$$

dobijamo

$$11 < n < \frac{37}{3} \Longrightarrow n = 12.$$

Član koji ne sadrži x dobija se za $-12 + 2k = 0$ tj. za $k = 6$. Traženi član je

$$\binom{12}{6} \cdot 3^6 = 673596.$$

▶

6. Pomoću poznatih binomnih identiteta naći sume $\sum\limits_{k=1}^{n} k^i$, za $i = 1, 2, 3, 4$.

7. Izračunati

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1) \cdot 4^k} \binom{n}{k}.$$

◀

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1) \cdot 4^k} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{(k+1)} \binom{n}{k} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} \binom{n+1}{k} \\
&= -\frac{4}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \\
&= -\frac{4}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k - \binom{n+1}{0} \left(-\frac{1}{4}\right)^0 \right) \\
&= -\frac{4}{n+1} \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right) \\
&= \frac{4}{n+1} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

▶

8. Izračunati

$$\frac{\binom{11}{0}}{1}+\frac{\binom{11}{1}}{2}+\frac{\binom{11}{2}}{3}+\cdots+\frac{\binom{11}{11}}{12}.$$

◀

Za $0 \leqslant k \leqslant 11$ važi

$$\frac{\binom{11}{k}}{k+1}=\frac{1}{k+1}\binom{11}{k}\cdot\frac{12}{12}=\frac{1}{12}\binom{12}{k+1}.$$

Tražena suma je

$$\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{11}\binom{12}{k+1}=\frac{1}{12}\left(\sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}-\binom{12}{0}\right)=\frac{2^{12}-1}{12}.$$

▶

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

◀

Neka je $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$. Tada je

$$\begin{aligned}
S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}\\
&=S_n+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k}\\
&=S_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Dakle, za $m \geqslant 1$ važi

$$\begin{aligned}
S_{m+1}-S_m &= -\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\\
&=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\\
&=\frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Sada za $m=1,2,\ldots,n-1$ dobijamo $n-1$ jednakosti i sumiranjem lijevih i desnih strana dobijamo

$$S_n-S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

pa odatle slijedi tražena jednakost jer je $S_1=1$.

▶

10. Dokazati da važi
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

◀

Prvi način.

Iskoristićemo da za $k \geqslant 1$ važi
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \iff k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Sada je
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n}\binom{n-1}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Drugi način. Binomna formula za $x = 1$ dobija oblik
$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k.$$

Diferenciranjem obije strane po y dobijamo
$$n(1+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}y^{k-1}.$$

Najzad, za $y = 1$ dobijamo
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Treći način. Neka je dat skup od n osoba. Komisiju veličine k ($k = 1, 2, \dots, n$) možemo izabrati na $\binom{n}{k}$ načina i od odabranih članova komisije predsjednika možemo odabrati na k načina, pa je po principu proizvoda broj načina da se odabere komisija veličine k i predsjednik komisije $\binom{n}{k}k$. Broj načina da se odabere komisija proizvoljne veličine i njen predsjednik je po principu zbira
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Od n osoba najprije na n načina možemo odabrati predsjednika komisije, a zatim za svaku od preostalih $n-1$ osoba na dva načina odlučiti da li neka osoba pripada komisiji ili ne. Po principu proizvoda broj svih mogućih komisija je
$$n \cdot 2^{n-1}.$$

▶

11. Dokazati da za prirodne brojeve m i n, $m \leqslant n$ važi
$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

◀

Prvi način. Uočimo da važi

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!}$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}$$
$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Sada je

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$
$$= \binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}$$
$$= \binom{n}{m}\sum_{i=0}^{n}\binom{n-m}{i}$$
$$= \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

Drugi način. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i neka je $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$ proizvoljan i fiksiran broj. Broj $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ može se interpretirati kao broj parova (B, C) takvih da je $C \subset B \subset A$, $|B| = k$ i $|C| = m$. Po principu zbira $\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ je broj parova (B, C) takvih da je $C \subset B \subset A$, $m \leqslant |B| \leqslant n$ i $|C| = m$.

Najprije odredimo $m-$podskup C skupa A na $\binom{n}{m}$ načina. Time smo odredili i m elemenata koji pripadaju skupu B. Dakle,

$$B = C \cup C_1, \quad C \cap C_1 = \varnothing,$$

pa ako je već izabran skup C, skup B možemo formirati na 2^{n-m} načina, birajući skup $C_1 \in \mathcal{P}(A \backslash C)$, jer je $m \leqslant |B| \leqslant n$. Po principu proizvoda $\binom{n}{m}2^{n-m}$ je broj parova (B, C) takvih da je $C \subset B \subset A$, $m \leqslant |B| \leqslant n$ i $|C| = m$.

▶

12. Izračunati sumu

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}^2.$$

◀

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}\text{ Vandermondova konv.}}\\
&= n\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k}}_{=\binom{2n-1}{n}\text{ Vandermondova konv.}}+\underbrace{\binom{2n}{n}}_{\text{primijenimo }\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}}\\
&= n\binom{2n-1}{n}+\frac{2n}{2n-n}\binom{2n-1}{n}\\
&= (n+2)\binom{2n-1}{n}.
\end{aligned}
$$

▶

13. Kombinatornim argumentima dokazati da

(a) za sve $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$, važi

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1};$$

(b) za sve $n, k \in \mathbb{N}$ važi

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}.$$

◀

(a) Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1-k}, \ldots, a_{n+1}\}$ skup sa $n+1$ elemenata. Broj $(k+1)-$podskupova skupa A je $\binom{n+1}{k+1}$. Sve $(k+1)-$podskupove možemo podijeliti u $n+1-k$ disjunktne familije $(k+1)-$podskupova skupa A.

- $\mathcal{A}_1 = \{S \subset A : |S| = k+1,\ a_1 \in S\}$. $|\mathcal{A}_1| = \binom{n}{k}$: kako $a_1 \in S$ potrebno nam je još k elemenata iz $A\backslash\{a_1\}$ da formiramo S.
- $\mathcal{A}_2 = \{S \subset A : |S| = k+1,\ a_1 \notin S,\ a_2 \in S\}$. $|\mathcal{A}_2| = \binom{n-1}{k}$: kako $a_1 \notin S$ i $a_2 \in S$ potrebno nam je još k elemenata iz $A\backslash\{a_1, a_2\}$ da formiramo S.

$\vdots$

- $\mathcal{A}_{n-k} = \{S \subset A : |S| = k+1,\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1-k} \notin S,\ a_{n-k} \in S\}$. $|\mathcal{A}_{n-k}| = \binom{n+1-(n-k)}{k} = \binom{k+1}{k}$: kako $a_1, a_2, \ldots a_{n-1-k} \notin S$ i $a_{n-k} \in S$ to je potrebno još k elemenata iz $A\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}\}$ da formiramo S.
- $\mathcal{A}_{n-k+1} = \{S \subset A : |S| = k+1,\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-k} \notin S\}$. $|\mathcal{A}_{n-k+1}| = 1$: na $\binom{k}{k} = 1$ način formiramo S, tačnije $S = \{a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_{n+1}\}$.

Prethodne familije $(k+1)-$podskupova su disjunktne, pa prema principu zbira važi

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Za vježbu.

▶

14. Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ i neka je $F(n,k)$ aritmetička sredina najmanjih elemenata svih $k-$podskupova skupa $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$. Dokazati da je

$$F(n,k)=\frac{n+1}{k+1}.$$

Komentar. Razmotrimo specijalan slučaj $n=5, k=3$. Svi $3-$podskupovi skupa $\{1,2,3,4,5\}$ i njihovi najmanji elementi dati su u tabeli.

3-podskupovi skupa $\{1,2,3,4,5\}$	najmanji elementi
$\{1,2,3\}$	1
$\{1,2,4\}$	1
$\{1,2,5\}$	1
$\{1,3,4\}$	1
$\{1,3,5\}$	1
$\{1,4,5\}$	1
$\{2,3,4\}$	2
$\{2,3,5\}$	2
$\{2,4,5\}$	2
$\{3,4,5\}$	3

U ovom slučaju je $F(5,3)=\frac{6\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3}{10}=\frac{3}{2}$, dok je $\frac{n+1}{k+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, i jednaki su.

Nameću se dva pitanja.

1. Koji brojevi iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ mogu biti najmanji elementi nekog $k-$podskupa od $[n]$?

2. Koliko puta se svaki od ovih najmanjih brojeva pojavljuje u zbiru?

Uočimo da skup $\{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$ ima $n-(n-k+1)+1=k$ elemenata i to je $k-$podskup od $[n]$ sa najvećim mogućim elementima. Dakle, $1,2,\ldots,n-k+1$ su svi mogući najmanji elementi nekog $k-$podskupa skupa $[n]$. Ovo je odgovor na prvo pitanje.

Neka je $m \in \{1,2,\ldots,n-k+1\}$. Broj m se pojavljuje u sumi onoliko puta koliko ima $k-$podskupova skupa $[n]$ kojma je m najmanji element. Njih ima onoliko koliko i $(k-1)-$podskupova skupa $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$ odnosno $\binom{n-m}{k-1}$, što je odgovor na drugo pitanje.

◀

Za $m=1,2,\ldots,n-k+1$ broj $k-$podskupova skupa $[n]$ koji sadrže m kao najmanji element je $\binom{n-m}{k-1}$. Suma σ najmanjih brojeva svih $k-$podskupova skupa $[n]$ je

$$\sigma = 1\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-2}{k-1} + \cdots + (n-k+1)\binom{k-1}{k-1}$$

$$\left.\begin{array}{lllllllllll}
= \tbinom{n-1}{k-1} & + & \tbinom{n-2}{k-1} & + & \tbinom{n-3}{k-1} & + & \ldots & + & \tbinom{k-1}{k-1} \\
 & + & \tbinom{n-2}{k-1} & + & \tbinom{n-3}{k-1} & + & \ldots & + & \tbinom{k-1}{k-1} \\
 & & & + & \tbinom{n-3}{k-1} & + & \ldots & + & \tbinom{k-1}{k-1} \\
 & & & & & + & \ldots & + & \tbinom{k-1}{k-1} \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & + & \tbinom{k-1}{k-1}
\end{array}\right\} (n-k+1) \text{ vrsta}$$

Prijenjujući prethodni zadatak pod (a) na svaku vrstu dobijamo da je

$$\sigma = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k},$$

a ovo je na osnovu istog zadatka jednako $\binom{n+1}{k+1}$. Kako je broj $k-$podskupova skupa $[n]$ jednak $\binom{n}{k}$, to je

$$F(n,k) = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n+1}{k+1}. \qquad \blacktriangleright$$