4

Formula uključenja-isključenja

1. Pregled teorije

Teorema 14. (FUI) *Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ konačni skupovi. Kardinalni broj unije datih skupova zadovoljava jednakost:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Teorema 15. *Broj deranžmana skupa N_n jednak je $\mathsf{D}_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.*

Teorema 16. *Broj surjekcija is skupa N_n u skup N_k, $n \geqslant k$, jednak je*

$$|\mathsf{Sur}(N_n \to N_k)| = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Teorema 17. (Uopštena formula uključenja-isključenja) *Neka je S konačan skup i neka su dati skupovi $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S$. Tada je broj elemenata iz S koji su sadržani u tačno m (u bar m), $0 \leqslant m \leqslant n$, datih podskupova iznosi*

$$T_{=}(m) := \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}W_k, \qquad \left(T_{\geq}(m) := \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k-1}{m-1}W_k\right),$$

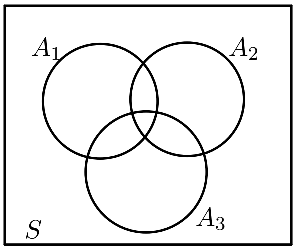
gdje je $W_k := \sum_{I\subseteq N_n, |I|=k} |A_I|$, $k \geqslant 1$, $W_0 := |S|$.

2. Zadaci

1. Na pismenom dijelu ispita iz *Uvoda u kombinatoriku* postavljena su 3 zadatka. Ispit je polagalo 90 studenata i pri tome je prvi zadatak riješilo 46 studenata, drugi 44, a treći 28 studenata. Sva tri zadatka je riješilo 14, a tačno dva zadatka 17 studenata. Koliko studenata nije riješilo nijedan zadatak?

◀

Neka je S skup svih studenata i neka je $A_i \subseteq S$ skup studenata koji su uradili zadatak i, $i = 1, 2, 3$.



Po formuli uključenja-isključenja je

$$\begin{aligned}
&|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| \\
&= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|).
\end{aligned}$$

Skup studenata koji su uradili tačno dva zadatka je

$$T := ((A_1 \cap A_2) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \uplus ((A_1 \cap A_3) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \uplus ((A_2 \cap A_3) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)),$$

pa važi

$$17 = |T| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Kako je $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 14$, dobijamo

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 59.$$

Slijedi da je

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = 90 - (46 + 44 + 28 - 59 + 14) = 17.$$

▶

2. Koliko ima prirodnih brojeva $\leqslant 10^6$ koji su djeljivi sa 7 i nijesu djeljivi ni sa 10, ni sa 12 ni sa 25?

◀

Tražimo koliko ima brojeva oblika $7k$, gdje je $k \leqslant \lfloor \frac{10^6}{7} \rfloor = 142857$, takvih da $7k$ nije djeljivo ni sa 10, ni sa 12, ni sa 25. Kako je broj 7 uzajamno prost i sa 10 i sa 12 i sa 25, naš zadatak se svodi da nađemo koliko ima prirodnih brojeva k, $k \leqslant 142857$, koji nijesu djeljivi ni sa 10, ni sa 12 ni sa 25.

Neka je

$$A_k := \{m : \ m \in N_{142857} \wedge k \,|\, m\}, \quad k = 10, 12, 25.$$

Treba naći kardinalnost skupa $A_{10}^c \cap A_{12}^c \cap A_{25}^c$:

$$|A_{10}^c \cap A_{12}^c \cap A_{25}^c| = |N_{142857}| - |A_{10} \cup A_{12} \cup A_{25}|.$$

Dobijamo

$|A_{10}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{10} \right\rfloor = 14285,$

$|A_{12}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{12} \right\rfloor = 11904,$

$|A_{25}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{25} \right\rfloor = 5714,$

$|A_{10} \cap A_{12}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{\text{NZS}(10,12)} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{142857}{60} \right\rfloor = 2380,$

$|A_{10} \cap A_{25}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{\text{NZS}(10,25)} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{142857}{50} \right\rfloor = 2857,$

$|A_{12} \cap A_{25}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{\text{NZS}(12,25)} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{142857}{300} \right\rfloor = 476,$

$|A_{10} \cap A_{12} \cap A_{25}| = \left\lfloor \dfrac{142857}{\text{NZS}(10,12,25)} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{142857}{300} \right\rfloor = 476,$

pa je

$$|A_{10}^c \cap A_{12}^c \cap A_{25}^c| = 142857 - (14285 + 11904 + 5714 - 2380 - 2857 - 476 + 476) = 116191.$$

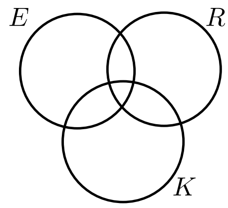
▶

3. Na međunarodnoj konferenciji sa ukupno 100 učesnika, 75 osoba govori Engleski, 60 Ruski, dok 45 osoba govori Kineski jezik. Odrediti najveći mogući broj osoba koje govore samo jedan jezik. Odrediti u tom slučaju koliko osoba govori samo Engleski, koliko samo Ruski, koliko samo Kineski i koliko osoba govori sva tri jezika.

◀

Neka je S skup svih učesnika, $E \subset S$ skup onih koji govore Engleski, $R \subset S$ skup onih koji govore Ruski i $K \subset S$ skup onih koji govore Kineski jezik.

Važi $S = E \cup R \cup K$.



Označimo sa D skup onih koji govore bar dva jezika. Nas zanima

$$\max(|S| - |D|) = 100 - \min|D|.$$

Važi

$$|D| = |E \cap R| + |E \cap K| + |R \cap K| - 2|E \cap R \cap K|.$$

Kako je

$$100 = |E \cup R \cup K| = \underbrace{|E| + |R| + |K|}_{=180} - |E \cap R| - |E \cap K| - |R \cap K| + |E \cap R \cap K|,$$

to dobijamo

$$|E \cap R| + |E \cap K| + |R \cap K| - |E \cap R \cap K| = 80.$$

Slijedi

$$|D| = 80 - |E \cap R \cap K|,$$

pa je

$$\max(|S| - |D|) = 100 - \min|D| = 20 + \max|E \cap R \cap K|.$$

Iz relacija

$$E \cap R \cap K \subset E \cap R, \quad E \cap R \cap K \subset E \cap K, \quad E \cap R \cap K \subset R \cap K$$

dobijamo

$$3|E \cap R \cap K| \leqslant |E \cap R| + |E \cap K| + |R \cap K|,$$

odnosno

$$2|E \cap R \cap K| \leqslant 80,$$

odnosno

$$|E \cap R \cap K| \leqslant 40,$$

pa je

$$\max(|S| - |D|) = 60.$$

▶

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Odrediti broj 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M} = \{a^4, b^3, c^4, d^5\}$.

◀

Neka je $\mathcal{M}^* = \{a^\infty, b^\infty, c^\infty, d^\infty\}$.

Označimo

sa $\mathcal{A}_1$ skup svih 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}^*$ kod kojih se a pojavljuje sa višestrukošću bar 5;

sa $\mathcal{A}_2$ skup svih 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}^*$ kod kojih se b pojavljuje sa višestrukošću bar 4;

sa $\mathcal{A}_3$ skup svih 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}^*$ kod kojih se c pojavljuje sa višestrukošću bar 5;

sa $\mathcal{A}_4$ skup svih 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}^*$ kod kojih se d pojavljuje sa višestrukošću bar 6;

sa $\mathcal{S}$ skup svih 12-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}^*$.

Uočimo da su 12-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}$ one 12-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$ kod kojih se: a pojavljuje sa višestrukošću najviše 4, b pojavljuje sa višestrukošću najviše 3, c pojavljuje sa višestrukošću najviše 4 i d pojavljuje sa višestrukošću najviše 5, a to je skup

$$\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{A}_2^c \cap \mathcal{A}_3^c \cap \mathcal{A}_4^c.$$

Dakle, tražimo

$$|\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{A}_2^c \cap \mathcal{A}_3^c \cap \mathcal{A}_4^c| = |\mathcal{S}| - |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4|.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_1$ formiramo od 5 a i 7-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_1| = \binom{4+7-1}{7} = 120.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_2$ formiramo od 4 b i 8-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_2| = \binom{4+8-1}{8} = 165.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_3$ formiramo od 5 c i 7-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_3| = \binom{4+7-1}{7} = 120.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_4$ formiramo od 6 d i 6-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_4| = \binom{4+6-1}{6} = 84.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ formiramo od 5 a, 4 b i 3-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \binom{4+3-1}{3} = 20.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3$ formiramo od 5 a, 5 c i 2-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = \binom{4+2-1}{2} = 10.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_4$ formiramo od 5 a, 6 d i 1-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_4| = 4.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$ formiramo od 4 b, 5 c i 3-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \binom{4+3-1}{3} = 20.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_4$ formiramo od 4 b, 6 d i 2-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_4| = \binom{4+2-1}{2} = 10.$$

12-kombinaciju iz $\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4$ formiramo od 5 c, 6 d i 1-kombinacije multiskupa $\mathcal{M}^*$, pa je

$$|\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4| = 4.$$

Uočimo da je

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 = \varnothing, \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_4 = \varnothing, \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4 = \varnothing,$$

$$\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4 = \varnothing, \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4 = \varnothing.$$

Najzad,

$$|\mathcal{A}_1^c \cap \mathcal{A}_2^c \cap \mathcal{A}_3^c \cap \mathcal{A}_4^c| = |\mathcal{S}| - |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4| = \cdots = 421.$$

▶

5. Koliko cjelobrojnih rješenja ima jednačina $x_1+x_2+x_3+x_4 = 20$, ako važe uslovi $1 \leqslant x_1 \leqslant 6$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 7$, $4 \leqslant x_3 \leqslant 8$ i $1 < x_4 \leqslant 6$?

◀

Najprije uočimo da je $x_4 > 1$ ekvivalentno sa $x_4 \geqslant 2$.

Uvedimo nove promjenljive:

$$y_1 := x_1 - 1, \quad y_2 := x_2, \quad y_3 := x_3 - 4, \quad y_4 := x_4 - 2.$$

Polazna jednačina se svodi na jednačinu

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13,$$

sa uslovima

$$0 \leqslant y_1 \leqslant 5, \quad 0 \leqslant y_2 \leqslant 7, \quad 0 \leqslant y_3 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant y_4 \leqslant 4.$$

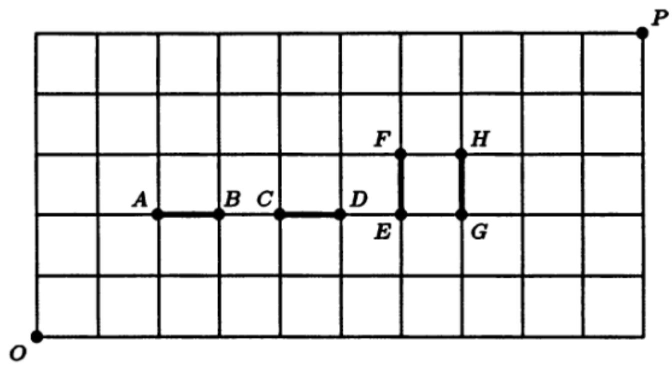
Skup rješenja date jednačine je u bijekciji sa skupom 13-kombinacija multiskupa $\mathcal{M} := \{a^5, b^7, c^4, d^4\}$.

Broj 13-kombinacija multiskupa $\mathcal{M}$ se nalazi kao u prethodnom zadatku. Uraditi za vježbu.

▶

6. Data je cjelobrojna mreža od $O(0,0)$ do $P(10,5)$ sa četiri istaknute duži AB, CD, EF i GH, gdje je $A(2,2)$, $B(3,2)$, $C(4,2)$, $D(5,2)$, $E(6,2)$, $F(6,3)$, $G(7,2)$, $H(7,3)$. (a) Koliko ima najkraćih puteva od tačke O do tačke P ako su sve date duži izbrisane? (b) Koliko ima najkraćih puteva od tačke O do tačke P koji prolaze kroz tačno dvije od datih duži?

◀



Neka je S skup svih najkraćih puteva od O do P.

Označimo

sa $A_1 \subset S$ skup najkraćih puteva od O do P koji sadrže duž AB,

sa $A_2 \subset S$ skup najkraćih puteva od O do P koji sadrže duž CD,

sa $A_3 \subset S$ skup najkraćih puteva od O do P koji sadrže duž EF,

sa $A_4 \subset S$ skup najkraćih puteva od O do P koji sadrže duž GH.

(a) Tražimo

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

Dobijamo

$$|S| = \binom{10+5}{5} = \binom{15}{5},$$

$$|A_1| = \binom{4}{2}\binom{10}{3}, \quad |A_2| = \binom{6}{2}\binom{8}{3}, \quad |A_3| = \binom{8}{2}\binom{6}{2}, \quad |A_4| = \binom{9}{2}\binom{5}{2},$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{2}\binom{8}{3}, \quad |A_1 \cap A_3| = \binom{4}{2}\binom{6}{2}, \quad |A_1 \cap A_4| = \binom{4}{2}\binom{5}{2},$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{6}{2}\binom{6}{2}, \quad |A_2 \cap A_4| = \binom{6}{2}\binom{5}{2}, \quad |A_3 \cap A_4| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{4}{2}\binom{6}{2}, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \binom{4}{2}\binom{5}{2},$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 0, \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$

pa je

$$\begin{aligned}
&|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| \\
&= \binom{15}{5} - \binom{4}{2}\binom{10}{3} - \binom{6}{2}\binom{8}{3} - \binom{8}{2}\binom{6}{2} - \binom{9}{2}\binom{5}{2} \\
&\quad + \binom{4}{2}\binom{8}{3} + \binom{4}{2}\binom{6}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\binom{6}{2} + \binom{6}{2}\binom{5}{2} \\
&\quad - \binom{4}{2}\binom{6}{2} - \binom{4}{2}\binom{5}{2}..
\end{aligned}$$

(b) Na osnovu uopštene formule uključenja-isključenja, traženi broj najkraćih puteva jednak je

$$T_=(2) := \sum_{k=2}^{4} (-1)^{k-2} \binom{k}{2} W_k,$$

gdje je

$$W_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant j \leqslant 4} |A_i \cap A_j|, \quad W_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} |A_i \cap A_j \cap A_k|, \quad W_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
T_=(2) = &\binom{4}{2}\binom{8}{3} + \binom{4}{2}\binom{6}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\binom{6}{2} + \binom{6}{2}\binom{5}{2} \\
&- \binom{3}{2}\left(\binom{4}{2}\binom{6}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

▶

7. U radnji je kupljeno k različitih razglednica koje treba poslati prijateljima, kojih ima n, $k \geqslant n$.

(a) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako svaki prijatelj treba da dobije bar jednu razglednicu?

(b) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako tačno ℓ prijatelja ne treba da dobije razglednicu?

◀

(a) Svaki prijatelj treba da dobije bar jednu razglednicu, pa se zadatak svodi na traženje broja surjekcija iz skupa razglednica u skup prijatelja, odnosno broja surjekcija iz skupa N_k u skup N_n:

$$|\mathsf{Sur}(N_k \to N_n)| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^k.$$

(b) Kako ℓ prijatelja ne treba da dobije razglednicu, to ćemo na $\binom{n}{\ell}$ načina odabrati prijatelje koji neće dobiti razglednicu, a od preostalih $n-\ell$ svaki treba da dobije razglednicu, pa se njima ragladnice mogu poslati na $|\mathsf{Sur}(N_k \to N_{n-\ell})|$ načina. Po principu proizvoda, traženi broj je

$$\binom{n}{\ell} \cdot |\mathsf{Sur}(N_k \to N_{n-\ell})| = \binom{n}{\ell}\sum_{i=0}^{n-\ell}(-1)^i \binom{n-\ell}{i}(n-\ell-i)^k.$$

▶

8. Kocka za igru čije su strane numerisane brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 baca se do pojave svih šest strana. Rezultat takvog eksperimenta je niz cifara koje su se pojavljivale na gornjoj strani kocke. Koliko ima nizova sa n cifara koji mogu biti rezultat eksperimenta?

◀

Stranu koja će se pojaviti u posljednjem $n-$tom bacanju možemo odabrati na $\binom{6}{1}$ načina. Svih 5 preostalih strana se pojavljuje u prvih $n-1$ bacanja, pa je traženi broj nizova

$$\binom{6}{1} \cdot |\mathsf{Sur}(N_{n-1} \to N_5)| = 6 \cdot \sum_{i=0}^{5}(-1)^i \binom{5}{i}(5-i)^{n-1}.$$

▶

9. Na ples je došlo n bračnih parova. Na koliko načina oni mogu da oforme n plesnih parova tako da (a) nijedan par supružnika ne igra zajedno; (b) bar jedan par supružnika igra zajedno; (c) bar dva para supružnika igraju zajedno?

◀

(a) Numerišimo muškarce brojevima od 1 do n; supruga muškarca i takođe je numerisana brojem i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Formiranje n plesnih parova od n bračnih parova je ekvivalentno formiranju permutacije skupa N_n. Zadatak se svodi na traženje broja permutacija skupa N_n bez fiksnih tačaka, a taj broj iznosi

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

(b) $n! - D_n$.

(c) $n! - D_n - nD_{n-1}$.

▶

10. Koliko ima prirodnih brojeva koji dijele bar jedan od brojeva 10^{60}, 20^{50} i 30^{40}?

11. Koliko ima permutacija multiskupa $\mathcal{M} = \{P^3, M^3, F^3\}$, kod kojih nikoja (a) tri ista slova nijesu susjedna, (b) dva ista slova nijesu susjedna?

◀

(a) Za vježbu.

(b) Označimo sa $\mathrm{Per}(\mathcal{M})$ skup svih permutacija multiskupa $\mathcal{M}$, a sa $A_s \subset \mathrm{Per}(\mathcal{M})$, skup permutacija kod kojih su neka dva slova s susjedna, $s = P, M, F$.

Tražimo:

$$\begin{aligned} &|A_P^c \cap A_M^c \cap A_F^c| \\ &= |\mathrm{Per}(\mathcal{M})| - |A_P^c \cap A_M^c \cap A_F^c|. \end{aligned}$$

Neka je $\mathcal{M}_1 = \{PP, P, M^3, F^3\}$. Uočimo da se A_P ne poklapa sa $\mathrm{Per}(\mathcal{M}_1)$, jer u $\mathrm{Per}(\mathcal{M}_1)$ postoje permutacije koje se, gledano kao permutacije multiskupa $\mathcal{M}$, ponavljaju. Npr.

$$(M, F, M, F, M, F, PP, P) \quad \text{i} \quad (M, F, M, F, M, F, P, PP)$$

Dakle, treba iz skupa $\mathrm{Per}(\mathcal{M}_1)$ eliminisati permutacije kod kojih su PP i P susjedni. Slijedi

$$|A_P| = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} - \frac{7!}{1! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Analogno,

$$|A_M| = |A_F| = \frac{8! - 7!}{3! \cdot 3!}.$$

Da bi odredili kardinalnost presjeka $A_P \cap A_M$, posmatramo $\mathcal{M}_2 = \{PP, P, MM, M, F^3\}$. Treba eliminisati one permutacije, kod kojih su PP i P ili MM i M susjedni.

Slijedi,

$$|A_P \cap A_M| = \frac{7!}{3!} - 2\frac{6!}{3!} + \frac{5!}{3!} = |A_P \cap A_F| = |A_M \cap A_F|.$$

Najzad, za $A_P \cap A_M \cap A_F$ posmatramo $\mathcal{M}_3 = \{PP, P, MM, M, FF, F\}$. Treba eliminisati one permutacije, kod kojih su PP i P ili MM i M ili FF i F susjedni. Dobijamo,

$$|A_P \cap A_M \cap A_F| = 6! - 3 \cdot 5! + 3 \cdot 4! - 3!.$$

▶

12. Na koliko načina se mogu poređati u niz 3 Amerikanca, 3 Engleza i 3 Rusa, tako da (a) nikoja tri zemljaka ne stoje zajedno; (b) nikoja dva zemljaka ne stoje zajedno?

13. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz "123"?

14. Na koliko načina četvoro djece mogu među sobom podijeliti 8 jabuka, 10 krušaka i 7 narandži, tako da svako dijete dobije bar jedno voće?

15. Pismeni dio ispita položilo je $n \geqslant 3$ studenata. Usmeni dio se polaže kod tri profesora. Na koliko načina je moguće napraviti spisak za usmeni tako da prvi i drugi profesor ispituju bar po jednog studenta, a treći i četvrti bar dva studenta? (Nije bitan redosljed odgovaranja, već samo koji će student odgovarati kod kojeg profesora).