6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^9 u čijem zapisu se pojavljuje niz 123 (na uzastopnim mjestima)?

R)

Brojeve ćemo posmatrati kao uređene devetorke cifera $\{0,1,\dots,9\}$ (npr. $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{8},1)$ je broj 1)

A_i – skup brojeva $< 10^9$ u čijem se zapisu niz 123 pojavljuje na mjestima $i, i+1, i+2$, $i=\overline{1,7}$.

$$|A_i| = 10^6, \quad i=\overline{1,7}.$$

Odredićemo $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7|$ (pomoću FUI)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7| = \sum_{i=1}^{7} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le 7} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^6 |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7|$$

$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |i-j|<3 \\ 10^3, & \text{ako je } |i-j|\geq 3 \end{cases}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{i,j,k\} = \{1,4,7\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ostali presjeci su prazni skupovi.
Dakle,

$$|A_1 \cup \dots \cup A_7| = 7\cdot 10^6 - 10^3(\underset{i=1}{4}+3+2+\underset{i=4}{1}) + 1$$

j može biti iz $\{4,5,6,7\}$

(10.) Na koliko načina četvoro djece mogu među sobom podijeliti 8 jabuka, 10 krušaka i 7 narandži, tako da svako dijete dobije bar jedno voće?

R|

S - skup svih mogućih raspodjela
(neka djeca ne moraju dobiti voćku)

Broj načina na koje možemo podijeliti 8 jabuka jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednačine

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8.$$

Taj broj je $\binom{8+4-1}{8}=\binom{11}{8}$.

Analogno za kruške $\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}$ i narandže $\binom{7+4-1}{7}=\binom{10}{7}$ $\Longrightarrow$

$$|S|=\binom{11}{8}\binom{13}{10}\binom{10}{7}.$$

$A_i \subset S$, raspodjele u kojima i-to dijete ne dobija voćku, $i=\overline{1,4}$

$$|A_1|=\binom{8+3-1}{8}\binom{10+3-1}{10}\cdot\binom{7+3-1}{7}$$

$$=\binom{10}{8}\binom{12}{10}\binom{9}{7}=|A_2|=|A_3|=|A_4|$$

$$|A_1\cap A_2|=\binom{9}{8}\binom{11}{10}\binom{8}{7}=|A_1\cap A_3|$$
$$=|A_1\cap A_4|$$
$$=|A_2\cap A_3|$$
$$=|A_2\cap A_4|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1 = |A_1 \cap A_2 \cap A_4|$$
$$= |A_1 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$= |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$\Rightarrow$ Broj raspodjela u kojima svako dijete dobije bar jedno voće je

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= |S| - \sum_{i=1}^{4} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$= \binom{11}{8}\binom{13}{10}\binom{10}{7} - \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{8}\binom{12}{10}\binom{9}{7} + \binom{4}{2}\binom{9}{8}\binom{11}{10}\binom{8}{7}$$
$$- \binom{4}{3} \cdot 1 + 0$$

11. Pismeni dio ispita položilo je $n \geq 3$ studenata. Usmeni dio se polaže kod tri profesora. Na koliko načina je moguće rasporediti studente profesorima tako da prvi i drugi profesor ispituju bar po jednog studenta, a treći bar dva studenta? (Nije bitan redosljed odgovaranja, već samo koji će student odgovarati kod kojeg profesora).

R|

Neka je S - skup svih rasporeda.

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{\underbrace{P_1, P_2, P_3}_{\uparrow \text{profesori}}\} \quad i = \overline{1,n}\}$$

$$|S| = 3^n.$$

$A_1 \subset S$, rasporedi kod kojih profesor P_1 nije ispitivao ni jednog studenta

$A_2 \subset S$, rasporedi kod kojih profesor P_2 nije ispitivao ni jednog studenta.

$A_3 \subset S$, rasporedi kod kojih je profesor P_3 ispitivao najviše jednog studenta.

Traženi broj rasporeda je:

$$r = |A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$|A_1| = 2^n, \quad |A_2| = 2^n, \quad |A_3| = 2^n + n \cdot 2^{n-1}$

$|A_1 \cap A_2| = 1$

$|A_1 \cap A_3| = 1 + n$

$|A_2 \cap A_3| = 1 + n$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$\Rightarrow \quad r = 3^n - (2^n + 2^n + 2^n + n \cdot 2^{n-1}) + (1 + 1 + n + 1 + n)$$

$$= 3^n - 3 \cdot 2^n - n \cdot 2^{n-1} + 3 + 2n.$$

(12.) Na ulasku u restoran svaki od n ljudi ostavio je na ulazu šešir i kišobran. Na izlasku oni slučajno uzimaju jedan kišobran i jedan šešir. Dokazati da je broj načina ~~da~~ da se to učini tako da niko ne uzme svoje stvari jednak $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left((n-k)!\right)^2$.

(13.) 2n osoba je ručalo za okruglim stolom (stolice su numerisane). Na koliko načina se mogu rasporediti za istim stolom da bi večerali, tako da niko naspram sebe ne gleda osobu koju je gledao za vrijeme ručka?

(14.) Na večeru kod kralja Artura došlo je 2n vitezova. Svaki vitez je u svađi sa tačno jednim od preostalih vitezova. Na koliko načina vitezovi mogu sjesti oko okruglog stola tako da zavađeni vitezovi ne sjede jedan pored drugog?

(15) Koliko ima n-tocifrenih brojeva u čijem zapisu učestvuje k različitih nenula cifara, $k\in\{1,2,\dots,9\}$.

(16.) Koliko riječi se dobije premještanjem slova riječi KOMBINATORIKA kod kojih nikoja dva ista slova nisu susjedna?