

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1, 1.04.2009.

1. Деда Мраз је дошао у вртић са врећом у којој се налази 100 једнаких пакетића. У вртићу је тог дана било само 53-оје дјеце. Одлучио је да ипак подијели све пакетиће, али наравно тако да свако дијете добије бар један пакетић. На колико начина то може урадити?
2. Колико има природних бројева са бар три цифре код којих је свака цифра мања од претходне?
3. На ранг листи се налази M особа. Свакој особи додјељује се по једна од картица нумерисана бројевима од 1 до M . На колико начина се картице могу раздијелити тако да свака особа добије картицу са бројем различитим од њеног редног броја на ранг листи?

I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1 16.04.2009.

1. Колико има природних бројева са бар три цифре код којих је свака цифра већа од претходне?
2. Колико има пермутација скупа $X = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ које не фиксирају ни један непаран број?
3. Докажите комбинаторним аргументом да важи

$$\sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{n-1}{r-1} = \binom{2n-1}{n}$$

4. Наћи број ненегативних цјелобројних рјешења $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1,$

$y_2, \dots, y_m)$ једначине

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = p,$$

за произвољан прост број p .

Вријеме рада: 70 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 10 поена

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1, 4.05.2009.

1. Нека је a_n број n комбинација мултикупа $\{a^7, b^8\}$ у којима се појављује бар једно a и бар два b . Одредити генераторну функцију низа $(a_n, n \in N)$.
Наћи a_9 .
2. Докажите да је број партиција броја n на сабирке који се понављају највише два пута једнак броју партиција од n у којима се не појављују сабирци дјеливи са 3
3. Ријешити рекурзију $a_{n+1}^2 - 2a_n^2 = 1, n \geq 0, a_0 = 2$.
4. Ријешити рекурзију $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n \geq 0, a_0 = 1$

Вријеме рада: 70 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 9 поена

II-поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1 11.05.2009.

1. Наћи генераторну функцију за низ $(a_n, n \in N_0)$, ако је a_n број цјелобројних рјешења једначине $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = n$, тако да важи: $x_1 \geq 1, x_2 \geq -2, x_3 \geq -3$. Наћи општи члан низа $(a_n, n \in N_0)$.
2. Докажите да је број партиција броја n на сабирке који се понављају највише четири пута једнак броју партиција од n у којима се не појављују сабирци дјеливи са 5
3. Ријешити рекурзију те наћи припадну генераторну функцију за низ
$$a_n = \frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{3}{2}a_{n-1}, n \geq 1, \text{ при чему је } a_0 = 2, a_1 = 1.$$
4. Ријешити рекурзију $2a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = 3^n$, уз почетне услове $a_0 = 1, a_1 = 6$

Вријеме рада: 70 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 9 поена

**I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
октобар 2009.**

1. $2n$ људи ручало је за округлим столом. Желе вечерати за истим столом, али тако да нико не гледа себи насупрот особу коју је гледао за вријеме ручка. На колико различитих начина могу сјести, ако се два распореда сматрају једнаким уколико свако од $2n$ људи има истог сусједа са десна и истог са лијева?
2. Ријешити рекурзију $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, a_0 = 1$
3. Наћи број ненегативних цјелобројних рјешења $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ једначине
$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = pq,$$
за произвољне просте бројеве p и q .

Вријеме рада: 70 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 11 поена

**I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
новембар 2009.**

1. Ријешити рекурзију $a_{n+1} = a_n - a_n a_{n+1}, a_0 = 1$
2. На колико је начина могуће подијелити 60 јабука на петоро дјеце тако да свако дијете добије паран број јабука и то барем двије, а највише 16?
3. Дерек, Родни и Алберт Тротер препродају улазнице за Свјетско фудбалско првенство. Успјели су набавити 100 улазница за утаквицу Бразил-Аргентина, 75 улазница за утакмицу Италија-Њемачка и 50 за утакмицу Енглеска-Шпанија. На колико начина могу међусобно подијелити улазнице ако се улазнице за исту утакмицу међусобно не разликују?

Вријеме рада: 60 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 11 поена

**II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
децембар 2009.**

1. Наћи генераторну функцију за број начина да се постигне сума n при бацању 7 (различитих) коцки за игру. Одредити број начина да добијена сума буде 22.
2. Наћи генераторну функцију низа $(2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, \dots)$.
3. Коју рекурзивну једначину морају задовољавати бројеви $a_n, n \in N_0$, да би

степен ред $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ био разој функције $f(x) = \frac{e^x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}$.

4. Наћи генераторну функцију низа који задовољава рекурентну једначину $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, n \geq 3$, уз почетне услове $a_0 = 2, a_1 = 0$ и $a_2 = -2$.

Вријеме рада: 70 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 8 поена

**II поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
децембар 2009.**

1. (а) Наћи генераторну функцију за број партиција броја n на сабирке који се понављају највише 5 пута.
(б) Наћи генераторну функцију за број партиција броја n на највише 3 сабирка.
2. Наћи генераторну функцију низа $(2, 2^2, -1, -1, 2^3, 2^4, -1, -1, 2^5, 2^6, -1, -1, 2^7, 2^8, -1, -1, \dots)$.

3. Коју рекурзивну једначину морају задовољавати бројеви $a_n, n \in N_0$, да би

степен ред $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ био разој функције $a(x) = \frac{\ln(1+x)}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}$?

4. Наћи генераторну функцију низа који задовољава рекурентну једначину $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3} + 2^n, n \geq 3$, уз почетне услове $a_0 = 0, a_1 = 1$ и $a_2 = 2$

Вријеме рада: 80 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 8 поена

**I (поновљени) поправни колоквијум из предмета
Дискретна математика 1, децембар 2009.**

1. Колико има функција $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ које су саме себи инверзне и немају фиксних тачака?
2. На колико различитих начина можемо правоугаоник димензије $2 \times n$ поплочати плочицама димензија 2×2 и 2×1 ?
3. На колико начина можемо n различитих куглица распоредити у r различитих кутија тако да тачно три кутије остану празне?
4. На колико начина је могуће да од 20 људи петоро узме свој кишобран, а остали туђе?

Вријеме рада: 80 минута,

Бодовање: сваки задатак носи највише 8 поена

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1

11. новембар 2010.

I група

1. На колико начина од 50 брачних парова можемо формирати делегацију од 10 чланова ако:
а) нема ограничења на избор групе
б) група има 5 брачних парова.
ц) група има бар један брачни пар.
2. Колико има петоцифрених природних бројева дјеливих са 9?
3. На колико се начина n студената може смјестити у k различитих учионица, тако да ни једна учионица не остане празна?

Бодовање		
1.	2.	3.
10	11	11

II група

1. На колико начина 100 посланика можемо смјестити у 20 различитих кабинета, тако да ниједан кабинет не остане празан и предсједник буде сам у кабинету?
2. Колико има шестоцифрених природних бројева са непарним бројем непарних цифара?
3. На колико начина од 65 брачних парова можемо формирати делегацију од 16 чланова ако:
а) група има 8 брачних парова,
б) група има бар један брачни пар,
ц) нема ограничења на избор групе,

Бодовање		
1.	2.	3.
11	11	10

Одговоре образложити. Вријеме рад 60 мин.

I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
24. новембар 2010.

1. Колоквијум из Дискретне математике се састоји из четири задатка. На колико се начина могу бодовати задаци тако да укупан број бодова буде 32 и да сваки задатак носи барем 4 бода?
2. Професор је за усмени испит, на који је изашло 10 студената, припремио 30 различитих испитних питања. На колико начина може подијелити питања ако:
 - а) студенти добијају по једно питање и не постоје два студента која имају исто испитно питање?
 - б) студенти добијају по једно питање, при чему могу добити и иста питања?
 - ц) сваки студент добија по тачно три питања и при томе ни једно питање не може бити заједничко за два студента?
 - д) студенти не морају добити по исти број питања, али сви добијају по бар једно питање, при чему ни једно питање не може бити заједничко за два студента? Постоји могућност и да неко питање уопште на испиту не буде постављено!
3. Одредити колико се петоцифрених бројева може направити од цифара броја 99242949.

Одговоре образложити. Вријеме рада: 60 мин.

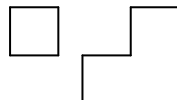
Бодовање				
1.	2.	3.	теорија	укупно
8	8 (1+1+2+4)	10	8	34

Теоријска питања:

1. Како гласи полиномијална формула
2. Навести три особине биномних коефицијената
3. Записати биномни идентитет Вандермондеова конволуција
4. Формула укључења-искључења
5. Шта је мултикуп?
6. Шта су комбинације скупа, колико има S -комбинација скуп од m елемената?
7. Шта су партиције скупа?
8. Шта је n -ти Белов број?

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
18. децембар 2010.

1. Наћи генераторну функцију низа
а) $(2, 3, 4, 9, 8, 27, \dots, 2^k, 3^k, \dots)$, б) $a_n = 3 \cdot 5^n - 4 \cdot 3^n, n \in N_0$.
2. Наћи рекурентну релацију за број начина да се у потпуности прекрије правоугаоник димензије $n \times 2$ помоћу квадрата димензије 1×1 и L-фигура, то јесте дјелова облика



3. Ријешити рекурзију:
$$a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - a_n - n + 3^n, n \geq 0$$
4. Коју рекурзивну једначину морају задовољавати бројеви $a_n, n \in N_0$, да би степени ред $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ био разој функције $a(x) = \frac{(1-2x)^{-2}}{1-x+3x}$?

Вријеме рада 90 мин.

(допунски) поправни I колоквијума

22. децембар 2010.

1. Колико има шестоцифрених природних бројева чији је производ цифара 3920?
2. Наћи $\sum_{k \in X} \frac{1}{4^k}$, гдје је X скуп природних бројева који нису дјелјиви ни са 2 ни са 3 ни са 5.
3. Одредити колико има бијекција $f : \{1, 2, \dots, 15\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 15\}$ таквих да ни један паран број није фиксна тачка. (x је фиксна тачка пресликавања f ако је $f(x) = x$)
4. Наћи број позитивних цјелобројних рјешења једначине:
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 605$$

Одговоре образложити.

Вријеме рада 80 минута.

поправни II колоквијума
22. децембар 2010.

1. Одредити општи члан низа

$$a_n = \begin{vmatrix} p+q & pq & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p+q & pq & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p+q & pq & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p+q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p+q & pq \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p+q \end{vmatrix}_{n \times n},$$

у зависности од реалних бројева p и q .

2. Одредити генараторну функцију за број партиција природног броја на највише шест сабирака.

3. Наћи опште решење рекурентне једначине:

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n - 2^n + 5, n \geq 0.$$

4. Ријешити рекурзију

$$a_{n+1} = \frac{1-4a_n}{1-6a_n}, n \geq 0,$$

$$a_0 = 1.$$

Одговоре образложити.

Вријеме рада 80 минута. Сваки задатак носи највише 8 поена.

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
3. новембар 2011.

I група

1. Колико има шестоцифрених природних бројева са производом цифара 2100?
2. Одредити број ријечи дужине $2n$ над азбуком $\{0,1,2,\dots,n\}$ у којима се 0 појављује n пута, а свако друго слово тачно једном, и не постоје двије сусједне нуле.
3. Одредити колико има пермутација скупа $\{1,2,\dots,2n+1\}$ код којих $2k-1$ не долази непосредно испред $2k$, за $k=1,\dots,n$.

II група

1. Одредити колико има пермутација скупа $\{1,2,\dots,2n\}$ код којих $2k$ не долази непосредно иза $2k-1$, за $k=1,2,\dots,n$.
2. Одредити број ријечи дужине $2n$ над азбуком $\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n\}$ у којима се слово a_0 појављује n пута, а свако друго слово тачно једном, и не постоје два сусједна слова a_0 .
3. Колико има шестоцифрених природних бројева са производом цифара 3150?

Одговоре образложити.

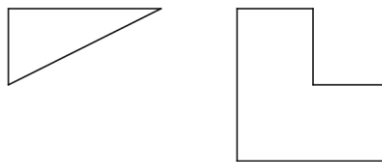
Вријеме рада 90 минута. Сваки задатак носи највише 10 поена.

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
15. децембар 2011.

1. (6 поена) Ако је $A(x)$ генераторна функција низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ наћи генераторну функцију низа $(a_0, 0, 0, 0, 2a_1, 0, 0, 0, 2^2 a_2, 0, 0, 0, 2^3 a_3, 0, 0, 0, 2^4 a_4, \dots)$.
2. (8 поена) За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ наћи генераторну функцију за број c_n цијелих бројева у опсегу од 0 до $10^k - 1$ чија је сума цифара једнак n .
3. (8 поена) Ријешити рекурзију:

$$a_n = 2a_{n-2} - a_{n-4} + (-1)^n + 5, \quad n \geq 4$$

4. (10 поена) Наћи генераторну функцију низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, гдје је a_n број начина да се у потпуности прекрије правоугаоник димензије $n \times 2$ помоћу правоуглих троуглова катета 1 и 2 и L-фигура, то јесте „плочица” облика



Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.

поправни I колоквијума из предмета Дискрета математика 1
22. децембар 2011.

1. (10 поена) На колико начина се 30 ученика једног одјељења може поређати у круг тако да Јанко и Петар не стоје један поред другог?
2. (10 поена) Марко је на зимовању купио 10 различитих разгледница. На колико начина може тројици својих другова послати разгледнице тако да сваки дјечак добије по барем једну разгледницу? Све разгледнице може, али не мора да потроши.
3. (10 поена) Колико има седмоцифрених природних бројева дјеливих са 4, у чијем се запису не појављује цифра 3?

Одговоре образложити.
Вријеме рада 70 минута.

поправни II колоквијума из предмета Дискретна математика 1
22. децембар 2011.

I група

1. (8 поена) За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ наћи генераторну функцију за број c_n цијелих k -тоцифрених бројева дјелјивих са 5 чија је сума цифара једнак n .
2. (8 поена) Ријешити рекурзију:
$$x_{n+1}x_n + 3x_{n+1} + x_n + 4 = 0$$
$$x_0 = 0,$$
3. (8 поена) Наћи решење једначине $x_{n+2}x_n^6 = x_{n+1}^5$, $n \in \mathbb{N}_0$ које задовољава услове $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.
4. (8 поена) Наћи генераторну функцију за број a_n тројки (x_1, x_2, x_3) бројева из $\mathbb{N}_0$, таквих да је $x_1 + x_2 + x_3 = n$ и $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

II група

1. (8 поена) За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ наћи генераторну функцију за број c_n цијелих k -тоцифрених парних бројева чија је сума цифара једнак n .
2. (8 поена) Ријешити рекурзију:
$$x_{n+1}x_n + 3x_{n+1} - x_n + 1 = 0$$
$$x_0 = 0,$$
3. (8 поена) Наћи решење једначине $x_{n+2}x_n^{12} = x_{n+1}^7$, $n \in \mathbb{N}_0$ које задовољава услове $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.
4. (8 поена) Наћи генераторну функцију за број a_n четворки (x_1, x_2, x_3, x_4) бројева из $\mathbb{N}_0$, таквих да је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ и $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.

поправни I колоквијума из предмета Дискртенa математика 1
29. август 2012.

1. Колико има природних бројева између 100 и 100 000 којима су тачно 3 цифре једнаке?
2. Доказати биномни идентитет
$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\binom{2}{1} + \binom{n}{1} = \binom{n+2}{3}, \quad n \geq 3,$$
 - а) комбинаторно
 - б) алгебарски или користећи особине биномних коефицијената
3. Колико има пермутација мултускупа $M = \{a^3, b^3, c^3\}$ код којих никоја два иста слова нису сусједна?

поправни II колоквијума из предмета Дискртенa математика 1
29. август 2012.

1. Наћи генераторну функцију за број c_n четворки (x_1, x_2, x_3, x_4) бројева из N_0 , таквих да је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ и $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.
2. Ријешити рекурзију:

$$x_{n+1} - 6x_n x_{n+1} = 1 - 4x_n, \quad n \in N$$

$$x_0 = \frac{3}{5}$$

3. Наћи опште решење једначине $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^4} \cdot 2^n, \quad n \in N_0$

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
1. новембар 2012.

I група

1. (8 поена) Одредити број ријечи дужине $2m$ над азбуком $\{0,1,2,\dots,m\}$ у којима се 0 јавља m пута, а свако друго слово тачно по једном, и не постоје двије сусједне нуле.
2. (8 поена) На колико се начина на шаховску таблу димензије 14×14 може поставити 8 топова тако да се они не нападају и ни један није у горњем лијевом углу?
3. (8 поена) Колико се тајних кодирања може направити тако да сваком слову абееде придружимо (јединствено) неко друго слово. Абецеда има 30 слова.
4. (8 поена) Одредити коефицијент уз $x^{\frac{20}{3}}$ у развоју бинома
$$\left(\sqrt{2x} + x^{\frac{2}{3}} \right)^{11},$$

II група

1. (8 поена) на колико начина 14 жена и 8 мушкараца можемо поређати у круг тако да два мушкараца не стоје један поред другог.
2. (8 поена) На колико се начина на шаховску таблу димензије 14×14 може поставити 8 топова тако да се они не нападају и ни један није у горњем углу (ни у лијевом ни у десном ?
3. (8 поена) Колико се тајних кодирања може направити тако да сваком слову абееде придружимо (јединствено) неко друго слово. Абецеда има 30 слова.
4. (8 поена) Одредити слободан члан у развоју бинома
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2x} - x^{\frac{1}{2}} \right)^{15},$$

 $x > 0.$

I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
22. новембар 2012.

1. (7 поена) Колико има петоцифрених природних бројева са производом цифара 1764?
2. (8 поена) Шесторо људи је за доручак наручило 3 пице (исте врсте) и 12 (једнаких) крофни. На колико начина могу „распоредити“ доручак тако да свако једе бар нешто и пице једу три различите особе.
3. (7 поена) Фирма, коју чине четири сектора, примила је 12 приправника. На колико начина их може распоредити на послове тако да сваки сектор добије бар једног приправника? У оквиру истог сектора, приправници обављају исте послове.
4. (8 поена) На колико начина 7 мушкараца и 7 жена може сјести за окригли сто, али тако да ма које двије особе истог пола не сједе једна наспрам друге?

Одговоре образложити.

Вријеме рада 80 минута.

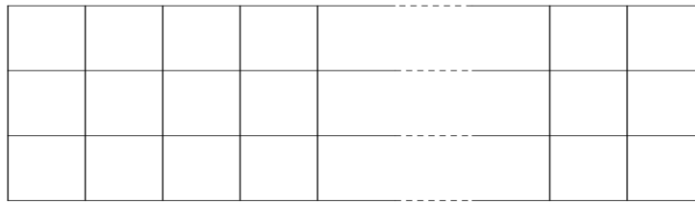
II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
13. децембар 2012.

I група

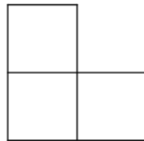
1. (6 поена) Наћи опште решење рекурзије

$$a_n a_{n-4} = a_{n-2}^2 \cdot 2^{n^2}, n \geq 4, a_i \geq 0, i = \overline{0,3}$$

2. (6 поена) Наћи затворену формулу за број поплочавања правоугаоника



димензије $3 \times n$ плочама са слике



3. (7 поена) Наћи генераторну функцију за број партиција природног броја на тачно 4 сабирака.

4. (3 поена) Ако је $A(x) = \sin x \ln(\sqrt{1+x^2})$ генераторна функција низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, наћи генераторну функцију низа

$$(0, a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, a_4, 0, 0, a_5, \dots).$$

5. (8 поена) Примјеном генераторне функције, наћи број рјешења једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21,$$

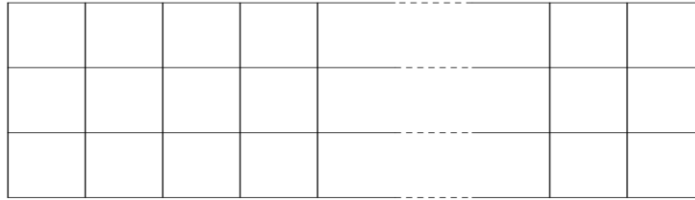
ако су x_1, x_2, x_3, x_4 цијели бројеви такви да важи $x_2, x_4 \geq 0, x_1 \geq -4, -4 \leq x_4 \leq 3$.

II група

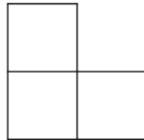
1. (6 поена) Наћи опште решење рекурзије

$$a_n a_{n-4}^9 = a_{n-2}^6 \cdot 3^{n^2}, n \geq 4, a_i \geq 0, i = \overline{0,3}$$

2. (6 поена) Наћи затворену формулу за број поплочавања правоугаоника



димензије $3 \times n$ плочама са слике



3. (7 поена) Наћи генераторну функцију за број партиција природног броја на тачно 5 сабирака.

4. (3 поена) Ако је $A(x) = \sqrt{2+x^5} \ln(1+x^2)$ генераторна функција низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, наћи генераторну функцију низа

$$(a_4, 0, 0, 0, a_5, 0, 0, 0, a_6, 0, 0, 0, a_7, 0, 0, 0, a_8, 0, 0, 0, a_9, \dots).$$

5. (8 поена) Примјеном генераторне функције, наћи број рјешења једначине

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

ако су x_1, x_2, x_3, x_4 цијели бројеви такви да важи $x_1, x_3 \geq 0, x_2 \geq -3, -3 \leq x_4 \leq 3$.

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.

II поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
20. децембар 2012.

1. (4 поена) Задата је рекурзија $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^n$, $a_0 = 1$. Наћи њено рјешење а затим одредити припадну генераторну функцију.
2. (5 поена) Ако је $A(x) = \sin x^2 \ln(1 + x^4)$ генераторна функција низа $(a_n)_{n \in N_0}$, наћи генераторну функцију низа
 - а) $(0, 2a_1, 0, 0, 0, 4a_2, 0, 0, 0, 8a_3, 0, 0, 0, 16a_4, 0, 0, 0, 32a_5, \dots)$,
 - б) $b_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \in N_0$.
3. (6 поена) Наћи опште решење рекурзије
$$a_{n+3}^2 = a_{n+2}^2 + 8a_{n+1}^2 - 12a_n^2 + 2^n + 4 \cdot 5^n, n \geq 0, a_n \geq 0, n \in N_0.$$
4. (7 поена) Наћи генераторну функцију за број начина да се природан број добија као збир двојки и тројки. На колико начина се број 30 може добити као збир двојки и тројки (т.ј. сабирака 2 и 3, редосљед сабирака није битан)?
5. (8 поена) На колико начина можемо покрити плочу димензије $1 \times n$ зеленим, плавим и жутиим квадратима димензије 1×1 тако да плавих и жутих квадрата има непаран број, а зелених паран.

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.
минута.

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
31. октобар 2013.

I група

1. Колико има уређених четворки $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N_0^4$ таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 10000$? (8 поена)
2. Одредити коефицијент уз
 - а) $x^{11}y^4$ у полиному $(x + 2y^2)^{13}$,
 - б) $x^{11}y^3z^4$ у полиному $(-x - 2y + 3z)^{18}$. (3+4 поена)
3. Колико има бинарних низова од n јединица и $3n$ нула у којима се између сваке двије јединице налазе бар 3 нуле? (7 поена)
4. Колико има пермутација мултикупа $\{a_1^2, a_2^2, \dots, a_{10}^2, b_1, \dots, b_8\}$ у којима су сусједни елементи различити? (8 поена)

II група

1. Колико има уређених четворки $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N_0^4$ таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 20000$? (8 поена)
2. Одредити коефицијент уз
 - а) $x_1^{11}x_2^4$ у полиному $(2x_1 + x_2^2)^{13}$,
 - б) $x_1^{11}x_2^3x_3^4$ у полиному $(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)^{18}$. (3+4 поена)
3. Колико има бинарних низова од n нула и $2n$ јединица у којима се између сваке двије нуле налазе бар двије јединице? (7 поена)
4. Колико има пермутација мултикупа $\{b_1^2, b_2^2, \dots, b_8^2, a_1, \dots, a_{10}\}$ у којима су сусједни елементи различити? (8 поена)

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.

I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
20. новембар 2013.

1. Ако је $N_{200} = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ и $A = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in N_{200}, x < y, x < z\}$ наћи $|A|$. (7 поена)
2. Дат је конвексни n -тоугао P . Колико има троуглова чија су тјемена у тјеменима многоугла P тако да ни једна страница тог троугла није уједно и страница многоугла P ? (9 поена)
3. На колико начина можемо n различитих куглица распоредити у k различитих кутија тако да тачно 4 кутије остану празне? (9 поена)
4. Наћи коефицијент уз $x^6 y^{11} z^5 w^4$ у развоју израза $(2x^3 - y + 3z - w^2)^{20}$. (5 поена)

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута.

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
12. децембар 2013.

I група

1. Одредити генераторну функцију за број комбинација мултикупа $\{a^{11}, b^6, c^{12}\}$, а затим одредити број 15-комбинација.

2. Наћи генераторну функцију за низ $(a_n)_{n \in N_0}$ задат рекурзијом

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

3. Ријешити рекурзију

$$\sqrt[3]{a_{n+3}} = \sqrt[3]{a_{n+2}} + \sqrt[3]{a_{n+1}} - \sqrt[3]{a_n} + 2, \quad n \in N_0.$$

II група

1. Одредити генераторну функцију за број комбинација мултикупа $\{a^9, b^{10}, c^{12}\}$, а затим одредити број 16-комбинација.

2. Наћи генераторну функцију за низ $(a_n)_{n \in N_0}$ задат рекурзијом

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

3. Ријешити рекурзију

$$\ln(a_{n+3}^2) = \ln(a_{n+2}^2) + \ln(a_{n+1}^2) - \ln(a_n^2) - 2, \quad a_n > 0, \quad n \in N_0$$

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута. Сваки задатак носи највише 10 поена.

II-поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
21.12.2013.

1. Наћи генераторну функцију за низ $(a_n, n \in N_0)$, ако је a_n број цјелобројних рјешења једначине $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = n$, тако да важи: $x_1 \geq 1, x_2 \geq -2, x_3 \geq -3$. Наћи општи члан низа $(a_n, n \in N_0)$.
2. Докажите да је број партиција броја n на сабирке који се понављају највише четири пута једнак броју партиција од n у којима се не појављују сабирци дјелјиви са 5
3. Ријешити рекурзију те наћи припадну генераторну функцију за низ
$$a_n = \frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{3}{2}a_{n-1}, \quad n \geq 1, \text{ при чему је } a_0 = 2, a_1 = 1.$$
4. Ријешити рекурзију $2a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = 3^n$, уз почетне услове $a_0 = 1, a_1 = 6$

Вријеме рада: 70 минута,

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
23. август 2014.

1. (6 бодова) Доказати да важи једнакост:

$$\sum_{\substack{k \text{ је непаран број} \\ 1 \leq k \leq n}} \binom{n}{k} 5^k = \frac{6^n - (-4)^n}{2}.$$

2. (6 бодова) Одредити вриједност суме

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_{2014} = \ell \\ k_1, k_2, \dots, k_{2014} \geq 0}} \binom{\ell}{k_1, k_2, \dots, k_{2014}}.$$

3. (8 бодова) Дат је конвексни n -тоугао P . Колико има троуглова чија су тјемена у тјеменима многоугла P тако да ни једна страница тог троугла није уједно и страница многоугла P ?
4. (10 бодова) На међународној конференцији сваки од 100 учесника говори бар један од три језика: енглески, руски или кинески. Ако 75 учесника говори енглески језик, 60 руски и 45 кинески, одредити највећи могући број особа које говоре само један од ових језика. У том случају, колико особа говори сва три језика?

Одговоре образложити.

Вријеме рада 60 минута.

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1
28. октобар 2014.

I група

1. Наћи $\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k}^2$.
2. Наћи број шестоцифрених природних бројева са непарним бројем непарних цифара.
3. Колико има природних бројева мањих од 10^9 у чијем запису се појављује низ цифара 123 (као „блок”, то јесте на узастопним мјестима) ?

II група

1. Наћи $\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k}^2$.
2. Колико има природних бројева са највише 9 цифра у чијем запису се не појављује низ цифара 123 (као „блок”, то јесте на узастопним мјестима) ?
3. Колико има шестоцифрених природних бројева са непарним бројем парних цифара?

Одговоре образложити.

Вријеме рада 90 минута. Сваки задатак носи највише 10 поена.

**I поправни колоквијум из предмета Дискретна математика 1
19. новембар 2014.**

I група

1. Одредити коефицијент уз x^{11} у полиному $(1 + 3x^2 + 2x^3)^n$.
2. Нека је S скуп од n елемената. Наћи број уређених парова (X, Y) такви да су X и Y подскупови скупа S који задовољавају услове:
 $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$ и $|X \Delta Y| = 2$.
Са $X \Delta Y$ означена је симетрична разлика скупова X и Y .
3. Колико има природних бројева мањих од 10^5 који су дјеливи са 5 а нису са 3, 10 и 11?

II група

1. Одредити коефицијент уз x^{11} у полиному $(1 + 3x^3 + 2x^2)^n$.
2. Нека је S скуп од n елемената. Наћи број уређених парова (X, Y) такви да су X и Y подскупови скупа S који задовољавају услове:
 $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$ и $|X \Delta Y| = 2$.
Са $X \Delta Y$ означена је симетрична разлика скупова X и Y .
3. Колико има природних бројева мањих од 10^6 који су дјеливи са 6 а нису са 5, 10 и 11?

Одговоре образложити.

Вријеме рада 80 минута. Сваки задатак носи највише 10 поена.

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
10. децембар 2014.

I група

5. (10 поена) Доказати да је број партиција броја $2n$ на три сабирка, тако да је збир свака два сабирка већи од трећег, једнак броју партиција броја n на тачно три сабирка.

6. (10 поена) Ријешити рекурзију:

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n + 2^n + n, n \geq 0$$

7. (10 поена) Напијасати генераторну функцију за број ријечи дужине n састављене од слова азбуке $\{A, B\}$ које садрже барем три слова A . Поредак слова у ријечи није битан, то јесте $AAAB$ и $ABAA$ су исте ријечи. Израчунајте број таквих ријечи за $n = 13$.

II група

1. (10 поена) Напијасати генераторну функцију за број ријечи дужине n састављене од слова азбуке $\{C, D\}$ које садрже барем четири слова C . Поредак слова у ријечи није битан, то јесте $DCCDC$ и $DDCCC$ су исте ријечи. Израчунајте број таквих ријечи за $n = 15$.

2. (10 поена) Ријешити рекурзију:

$$a_{n+4} = 6a_{n+3} - 8a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n + (-1)^n + n, n \geq 0$$

3. (10 поена) Доказати да је број партиција броја $2n$ на три сабирка, тако да је збир свака два сабирка већи од трећег, једнак броју партиција броја n на тачно три сабирка.

III група

1. (10 поена) Доказати да је број партиција броја $2n$ на три сабирка, тако да је збир свака два сабирка већи од трећег, једнак броју партиција броја n на тачно три сабирка.
2. (10 поена) Ријешити рекурзију:

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n + 3^n + n, n \geq 0$$

3. (10 поена) Напиасати генераторну функцију за број ријечи дужине n састављене од слова азбуке $\{A, B\}$ које садрже барем пет слова A . Поредак слова у ријечи није битан, то јесте $AAAB$ и $ABAA$ су исте ријечи. Израчунајте број таквих ријечи за $n = 17$.

IV група

1. (10 поена) Напиасати генераторну функцију за број ријечи дужине n састављене од слова азбуке $\{C, D\}$ које садрже барем седам слова C . Поредак слова у ријечи није битан, то јесте $DCCDC$ и $DDCCC$ су исте ријечи. Израчунајте број таквих ријечи за $n = 19$.
2. (10 поена) Ријешити рекурзију:

$$a_{n+4} = a_{n+3} + 7a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n + (-2)^n + n, n \geq 0$$

3. (10 поена) Доказати да је број партиција броја $2n$ на три сабирка, тако да је збир свака два сабирка већи од трећег, једнак броју партиција броја n на тачно три сабирка.

Одговоре образложити. Вријеме рада 80 минута.

Августовски поправни рок, 29. 08. 2015.

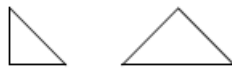
Поправни I колоквијум из предмета Дискретна математика 1

1. (3+5 поена)
а) На колико начина можемо поређати у врсту 11 мушкараца и 24 жене тако да ма која два мушкарца не буду један поред другог?

б) На колико начина можемо поређати око округлог стола 11 мушкараца и 24 жене тако да ма која два мушкарца не буду један поред другог? Два распореда су једнака ако су иста до на ротацију.
2. (8 поена)
На колико начина три студента студијског програма математика, три студента студијског програма рачунарске науке и три студијског програма физика можемо поређати у врсту, али тако да не постоје два студента истог студијског програма који стоје један поред другог?
3. (7 поена)
Нека фирма, која има своја представништва у пет градова, је запослила 17 нових радника. На колико начина их она може распоредити у ова представништва, тако да свако представништво добије барем једног новог радника? Један запослени не може радити у више градова.
4. (7 поена) Одредити коефицијент уз x^8 у развоју полинома $(2 - 3x + 5x^2 - 7x^3)^{11}$.

Поправни II колоквијум из предмета Дискретна математика 1

1. (10 поена) Ријешити рекурзију $n(a_{n+1} + a_n) + a_{n+1} = 2n - 3$, ако је $a_1 = 1$.
2. (10 поена) Нека је a_n број начина на који се правоугаоник димензије $1 \times n$ може поплочати помоћу троуглова датих на слици:



Први троугао је правоугли са катетама дужине 1, а други је једнакокраки са основицом дужине 2 и њој одговарајућом висином дужине 1. Одредити рекурентну релацију за низ (a_n) и ријешити је.

3. (10 поена) Доказати да је број партиција броја $2n$ на три сабирка, тако да је збир свака два сабирка већи од трећег, једнак броју партиција броја n на тачно три сабирка. Одговор без прецизног образложења неће бити бодован.

Вријеме рада 80 минута.

I колоквијум из предмета Дискретна математика 1, 6. новембар 2015.

1. (7 поена) У кутији се налази 25 плавих и 29 црвених куглица. На колико начина дјечаку можемо дати куглице тако да добије једнак број плавих и црвених? Размотрити случајеве када су куглице исте боје идентичне и када су различите.
2. (8 поена) Колико сабирака у развоју $(x + y + z)^{20}$ има само једну, колико тачно двије, а колико их има све три промјенљиве?
3. (8 поена) Одредити број бијекција $f: N_n \rightarrow N_n$ у којима је $f(n-1) > n-1$ или $f(n-2) > n-2$.
4. (7 поена) Колико има различитих исхода бацања три различите коцкице за јамб ако се зна да је збир „палих“ бројева једнак 10?

Одговоре прецизно образложити!
Вријеме рада: 120 минута.

**Поправни I колоквијум из предмета Дискретна математика 1,
26. новембар 2015.**

5. (6 поена) Колико има природних бројева од 1 до 10^6 у чијем се декадном запису бар једном појављује цифра 2?
6. (8 поена) Наћи број уређених парова скупова (A, B) таквих да је $A \subseteq B \subseteq N_{60}$.

Напомена: Није довољно решење представити преко суме, већ треба наћи тачан број.

7. (10 поена) Колико има пермутација мултускупа $M = \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$ у којима сусједни елементи нису једнаки?
8. (6 поена) Нека је n непаран број.
 - а) Наћи $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k}$
 - б) Докажите да међу бројевима $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ има непаран број непарних.

Одговоре прецизно образложити!
минута.

Вријеме рада: 120

II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
18. 12. 2015.

1. (10 поена) Колико се ријечи дужине n може написати словима двоелементне азбуке $\Delta = \{a, b\}$ у којима не постоје три узастопна иста слова.
2. (6 поена) Бака је пошла у продавницу са једном новчаницом од 50 евра, четири новчанице од 5 евра, 7 кованица од по 2 евра и 11 кованица по 1 евро. Нека је a_n број начина на које може платити рачун од n евра. Написати генераторну функцију овог низа.
3. (6 поена) Ријешити систем рекурзија:

$$\begin{aligned}3a_n - 2a_{n-1} - b_{n-1} &= 0, \text{ Type equation here.} \\3b_n - a_{n-1} - 2b_{n-1} &= 0, n \geq 1 \\a_0 &= 2, b_0 = -1.\end{aligned}$$

4. (8 поена)
 - а) Ако је $A(x)$ генераторна функција низа a_n , доказати да је
$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$
генераторна функција низа $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$
 - б) Наћи генераторну функцију низа $b_n = F_0 + F_1 + \dots + F_n$, гдје је са F_n означен n -ти Фибоначијев број.

Одговоре образложити. Вријеме рада 100 минута

Поправни II колоквијум из предмета Дискретна математика 1
25. 12. 2015.

1. (10 поена) Наћи рекурентну релацију за број ријечи дужине n у двоелементној азбуци $\Delta = \{a, b\}$ у којима не постоје четири узастопна иста слова.
2. (10 поена) На колико начина n бонбона можемо распоредити на мајку и четворо дјеце тако да свако дијете добије непаран број бонбона а њихова мајка или један или два бонбона?
3. (10 поена) Ријешити систем рекурзија:

$$\begin{aligned}b_{n-1} &= 3\sqrt[3]{a_n} - 2\sqrt[3]{a_{n-1}}, \\b_n &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{a_{n-1}} + \frac{2}{3}b_{n-1}, n \geq 1 \\a_0 &= 2, \\b_0 &= -1.\end{aligned}$$

Одговоре образложити. Вријеме рада 90 минута

Поправни колоквиум (августовски рок) из предмета

Дискретна математика 1, 31. август 2016.

I колоквијум

9. ⁽¹⁰⁾ Показати да је за свако парно n и свако непарно k биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ паран број.
10. ^(10 поена) Наћи број подскупова скупа $N_m = \{1, 2, 3, 4, \dots, m\}$ који садрже све непарне бројеве из N_m .
11. ^(10 поена) Израчунати суму: $\sum_{k \in B} \frac{3}{7^k}$, гдје је $B = \{k \in \mathbb{N} : 2 \nmid k, 3 \nmid k, 7 \nmid k\}$.

II колоквијум

1. ^(10 поена) Показати да Фибоначијев низ $F_n, n \in \mathbb{N}_0$, задовољава рекурзију
- $$F_{n-1}F_{n+1} = (F_n)^2 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$
2. ^(10 поена) Ако је a_n број подскупова скупа $N_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ који садрже све непарне бројеве из N_n , наћи генераторну функцију низа $a_n, n \in \mathbb{N}$.
3. ^(10 поена) За сваки од бројева $1, 2, 3, \dots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, одређује се највећи непарни дјелилац и добијене вриједности се саберу. Означимо са t_n добијени збир. Одредити рекурентну релацију за низ (t_n) и ријешити је.

Само прецизно образложени одговори ће бити разматрани!
Вријеме рада: 60 минута.

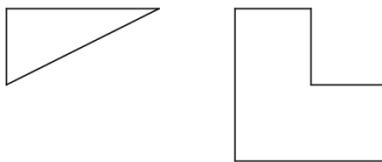
Име и презиме: _____
Број индекса: _____

Колоквијум из предмета Дискретна математика 1, 23. децембар 2016.

12. ^(10 поена) Колекција новчића се састоји од k врста новчића: n_1 новчића типа 1, n_2 новчића типа 2, ..., n_k новчића типа k . Наћи број начина селекције бар једног новчића из ове колекције.

13. ^(10 поена) Наћи број цјелобројних рјешења једначине
$$a + b + c + d = 26,$$
тако да важи: $1 \leq a \leq 5$, $2 \leq b \leq 6$, $3 \leq c \leq 7$, $4 \leq d \leq 8$.

14. ^(10 поена) Написати рекурзију чије је рјешење низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, гдје је a_n број начина да се у потпуности прекрије правоугаоник димензије $n \times 2$ помоћу правоуглих троуглова катета 1 и 2 и L-фигура, то јесте „плочица” облика.



Ротација „плочица” је дозвољена у равни и простору.

15. ^(10 поена) Наћи број бинарних низова дужине n са парним бројем симбола 1.

Одговоре прецизно образложити!

Вријеме рада: 100 минута.