3. Eksponencijalne generatorne funkcije

1. Dokazati da je $(1-2x)^{-3/2}$ eksponecijalna generatorna funkcija niza

$$(1, 1\cdot 3, 1\cdot 3\cdot 5, 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7, \dots).$$

◀

Koeficijent uz x^n u razvoju

$$(1-2x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n\geq 0} \binom{-\frac{3}{2}}{n} (-2x)^n$$

je

$$\begin{aligned}(-2)^n \binom{-\frac{3}{2}}{n} &= (-2)^n \frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{3}{2}-1)\dots(-\frac{3}{2}-n+1)}{n!}\\ &= (-2)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{3\cdot 5\cdot 7\dots(2n+1)}{n!}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)}{n!}.\end{aligned}$$

▶

2. Neka je a_n broj nizova dužine n čiji su elementi iz skupa $\{0,1,2,3\}$ kod kojih se cifre 2 i 3 pojavljuju bar jednom. Koristeći eksponecijalnu generatornu funkciju naći a_n.

◀

Eksponencijalna generatorna funkcija niza (a_n) je

$$\begin{aligned}A_e(x) &= \underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2}_{0,1} \cdot \underbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^2}_{2,3}\\ &= (e^x)^2\cdot(e^x-1)^2\\ &= e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x}\\ &= \sum_{n\geq 0}(4^n-2\cdot 3^n+2^n)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Slijedi, $a_n = 4^n - 2\cdot 3^n + 2^n$.

▶

3. Neka je a_n broj nizova dužine n čiji su elementi iz skupa $\{0,1,2\}$, sa neparnim brojem jedinica i parnim brojem nula. Koristeći eksponecijalnu generatornu funkciju naći a_n.

◀

Eksponencijalna generatorna funkcija niza (a_n) je

$$\begin{aligned} A_e(x) &= \underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)}_{0}\cdot\underbrace{\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)}_{2} \\ &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)e^x \\ &= \frac{e^{3x}-e^{-x}}{4} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Slijedi, $a_n = \frac{1}{4}\left(3^n-(-1)^n\right)$.

▶

4. Neka je a_k broj rasporeda k različitih objekata u n različitih kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna. Koristeći eksponecijalnu generatornu funkciju naći a_k.

◀

Eksponencijalna funkcija generatrisa za (a_k) je

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\cdots\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)}_{n} \\ &= \left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^n \\ &= (e^x-1)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}e^{(n-j)x} \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{k\geq 0}\frac{((n-j)x)^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k\right)\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je

$$a_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^k = |\mathsf{Sur}(N_k \to N_n)|.$$

▶

5. Na koliko načina možemo pokriti ploču dimenzije $1 \times n$ zelenim, plavim, žutim i crvenim kvadratima dimenzije 1×1 tako da plavih i žutih kvadrata ima paran broj, a zelenih neparan?

◀

Neka je a_n broj popločavanja i $A_e(x)$ eksponencijalna generatorna funkcija niza (a_n).

$$\begin{aligned} A_e(x) &= \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2}_{\text{plavi, žuti}} \cdot \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)}_{\text{zeleni}} \cdot \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)}_{\text{crveni}} \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) e^x \\ &= \frac{e^{4x} + e^{2x} - e^{-2x} - 1}{8} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4^n + 2^n - (-2)^n}{8}\right) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Slijedi, $a_n = \dfrac{4^n + 2^n - (-2)^n}{8}$.

▶

6. Koristeći eksponencijalnu generatornu funkciju naći broj riječi dužine 8 koje se mogu formirati od slova riječi MATEMATIKA.

7. Odrediti eksponencijalnu generatornu funkciju za broj deranžmana skupa od n elemenata.

8. Koristeći eksponencijalnu generatornu funkciju odrediti broj uređenih parova (A, B), gdje je $A \subseteq B \subseteq N_n$.