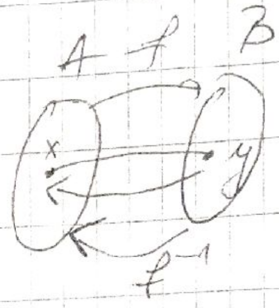
① Нађи f^{-1} за функцију $f(x) = 2x - 1$ и нацртати графике



Ако је f бијекција онда постоји f^{-1}

I

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$f(x) = y$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$y = 2x - 1$$

$$2x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

II

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$2 \cdot f^{-1}(x) - 1 = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$y = 2^{x}$

② Најди f^{-1} за функцију $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x - 5}$

$f(x) = y$

$f^{-1}(y) = x$

$y = \frac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x - 5}$

$y \cdot 2^x - 5y = 3 \cdot 2^x + 1$

$y \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 5y + 1$

$2^x (y - 3) = 5y + 1$

$2^x = \frac{5y+1}{y-3} \quad / \log_2$

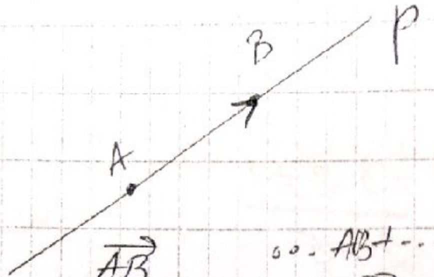
$x = \log_2 \left(\frac{5y+1}{y-3} \right)$

$f^{-1}(y) = \log_2 \left(\frac{5y+1}{y-3} \right)$

$f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{5y+1}{y-3} \right)$

Вјежбе 2   Вектори

Вектори су орјентисане дужи.
Сваки вектор одређен : правац
смјер
интезитет



$\vec{AB}$ ... AB + ... CD ... AB

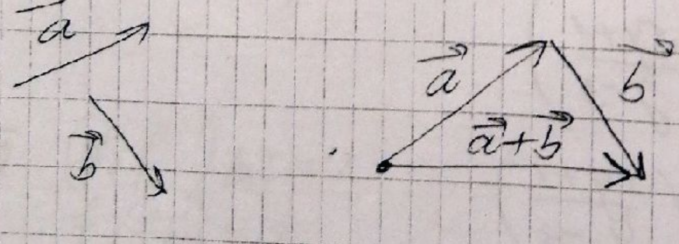
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\vec{AB} = \vec{CD}$

Вектор је орјентисана дуж, има почетну и крајњу тачку.

Два вектора су једнака ако су истог правца, интезитета, смјера.

Интезитет вектора $\vec{AB}$ је дужина дужи AB.
Релација једнакости вектора је релација еквиваленције на скупу свих вектора. Ова релација дијели тај скуп на дисјунктне класе еквиваленције.
Нула вектор $\vec{0}$, интезитет 0, а неодређен правац.

Сабирање вектора



збир вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ чији је почетак у почетку првог вектора а крај у крају другог вектора

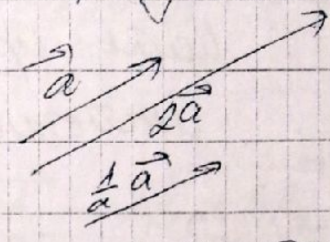
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$ комутативна

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ асоцијативна

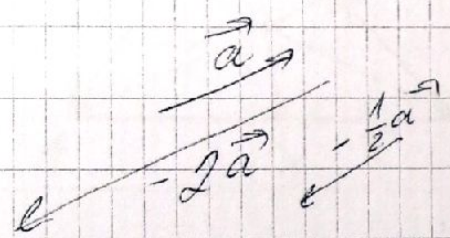
Множење вектора скаларом (бројем)

$|\lambda\cdot\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

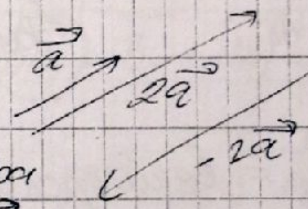
1° $\lambda>0$, $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ исти правац и смер



2° $\lambda<0$; $\lambda\vec{a}$; $\vec{a}$ исти правац, а супротан смер

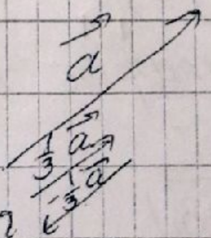


3° $|\lambda|>1$, $|\lambda\vec{a}|>|\vec{a}|$



$\lambda\vec{a}$ је истезање вектора $\vec{a}$

4° $|\lambda|<1$, $|\lambda\vec{a}|<|\vec{a}|$



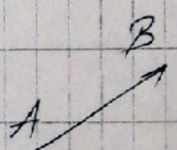
$\lambda\vec{a}$ је сажимање вектора $\vec{a}$

Супротан вектор вектора $\overrightarrow{AB}$ је $-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Уочимо: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$



1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

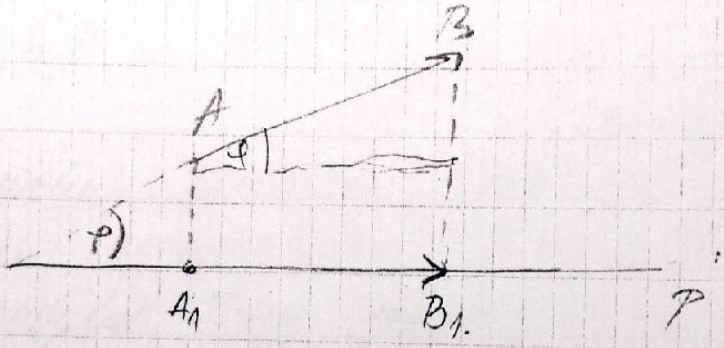
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$

3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$

4) $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ јединични вектор вектора $\vec{a}$
исти правац и смјер као $\vec{a}$, а
интензитет 1

$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a_0}$



$\overrightarrow{A_1B_1}$ = векторска пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$
на праву p

$Pr_p(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_1B_1}$

$|\overrightarrow{A_1B_1}|$ – скаларна пројекција вектора $\overrightarrow{AB}$ на
праву p

$pr_p \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}|$

$pr_p(\vec{a} + \vec{b}) = pr_p \vec{a} + pr_p \vec{b}$

$pr_p(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot pr_p \vec{a}$

$$\boxed{|pr_p \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi}$$

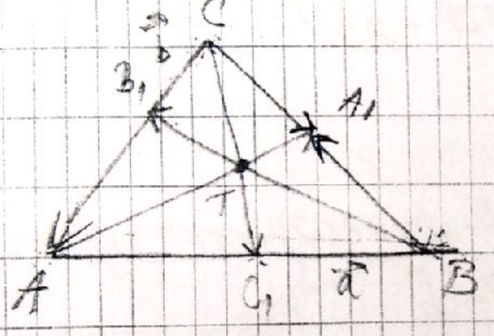
Задаци

① Нека су A_1, B_1, C_1 редом средине страница BC, CA и AB троугла ABC и нека је $\vec{AB}=\vec{a}$; $\vec{AC}=\vec{b}$

а) помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изразити векторе $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ и $\vec{CC_1}$

б) доказати да је $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$

решење



а)

$$\vec{AA_1} - \vec{AB} + \vec{BA_1}$$
$$\vec{AA_1} = \vec{AC} + \vec{CA_1}$$
$$2\vec{AA_1} = \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BA_1} + \vec{CA_1}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{BB_1} = \vec{BC} + \vec{CB_1} = \vec{BA} + \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$$
$$= -\vec{AB} + \vec{AC} + \frac{1}{2}(-\vec{AC}) =$$
$$= -\vec{AB} + \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \ ?$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{CC_1} = \vec{CA} + \vec{AC_1}$$
$$\vec{CC_1} = \vec{CB} + \vec{BC_1}$$
$$2\vec{CC_1} = \vec{CA} + \vec{CB} + \underbrace{\vec{AC_1} + \vec{BC_1}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) =$$
$$= \frac{1}{2}(-\vec{AC} + \vec{CA} + \vec{AB}) =$$
$$= \frac{1}{2}(-\vec{AC} - \vec{AC} + \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

б) $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - a + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$

$= \vec{0}$

в) доказати да је $\vec{AT}+\vec{BT}+\vec{CT}=\vec{0}$

$$\vec{AT}=\frac{2}{3}\vec{AA_1}=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\vec{BT}=\frac{2}{3}\vec{BB_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}-2\vec{a})=\frac{1}{3}(\vec{b}-2\vec{a})$$

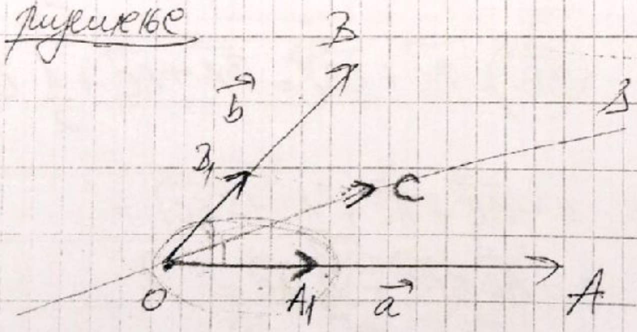
$$\vec{CT}=\frac{2}{3}\vec{CC_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$$

$$\vec{AT}+\vec{BT}+\vec{CT}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b}-2\vec{a}+\vec{a}-2\vec{b})=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\vec{0}=\vec{0}$$

2) Одредити вектор правца симетрале угла $\measuredangle AOB$ ако је $\vec{OA}=\vec{a}$; $\vec{OB}=\vec{b}$

<u>решење</u>



OA_1 – јединични вектор вектора $\vec{OA}$

OB_1 – јединични вектор вектора $\vec{OB}$

Над векторима $\vec{OA_1}$ и $\vec{OB_1}$ конструишимо ромб OA_1CB_1

Дијагонала OC ромба OA_1CB_1 полови угао $\measuredangle A_1OB_1$ па самим тим и угао $\measuredangle AOB$. Вектор $\vec{OC}$ је вектор правца симетрале угла $\measuredangle AOB$

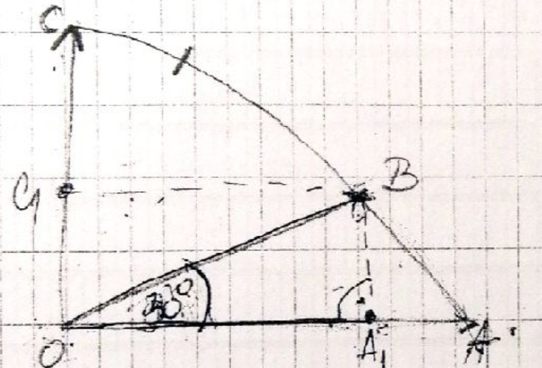
$\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{A_1C}$

$\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$

$$\boxed{\vec{OC} = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}} \quad ?$$

③ Тачка B дијели лук $\widehat{AC}$ – 90° у односу 1 : 2. Разложити вектор $\vec{OC} = \vec{c}$ дуж вектора $\vec{OA} = \vec{a}$; $\vec{OB} = \vec{b}$, гдје је O центар круга.

$|\vec{OA}| = |\vec{OC}| = |\vec{OB}| = r$



30° = ?

ортогонална

A_1 – пројекција тачке B на праву p(OA)

C_1 – орт. пројекција тачке B на праву q(OC)

B дијели лук $\widehat{AC}$ 90° у односу 1 : 2 па је $\measuredangle A_1OB = \measuredangle AOB = 3$

ΔOA_1B : $\cos 30^\circ = \dfrac{|\vec{OA_1}|}{|\vec{OB}|}$

$$|\vec{OA_1}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|\vec{OA}| \qquad (1)$$

Вектори $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA}$ су истог правца и истог смјера па из (1) слиједи да је $\vec{OA_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{OA}$

$$\boxed{\vec{OA_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{a}}$$

$\vec{a}$

ΔOA_1B : $\sin 30^\circ = \dfrac{|\overrightarrow{A_1B}|}{|\overrightarrow{OB}|}$

$\sin 30^\circ = \dfrac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OC}|}$

$|\overrightarrow{OC_1}| = \dfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OC}|$ (2)

$\boxed{|\overrightarrow{OC_1}| = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}}$

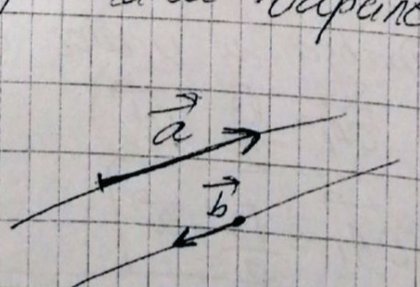
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B}$

$\vec{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{a} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} \quad / \cdot 2$

$2\vec{b} = \sqrt{3} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{OC}$

$\boxed{\overrightarrow{OC} = -\sqrt{3} \cdot \vec{a} + 2\vec{b}}$

Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни ако припадају истој или паралелним правама

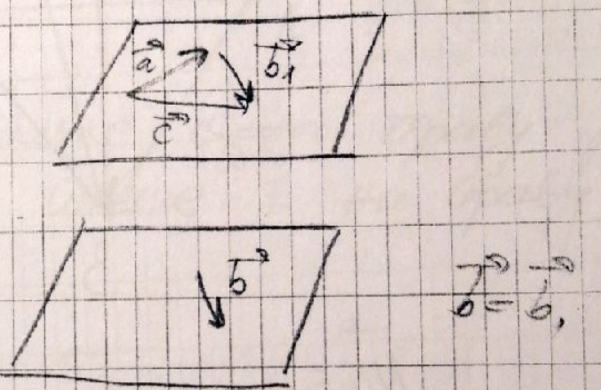


помоћна тврдња

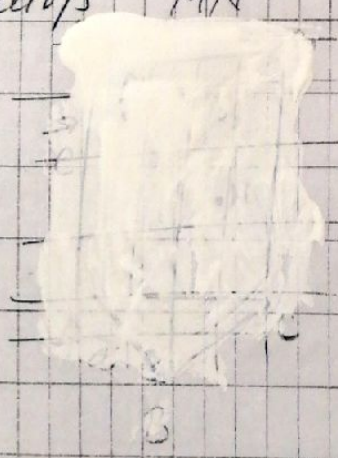
Лема: Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни акко
$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ за неко $k \neq 0$

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су компланарни ако леже у истој или паралелним равнима.

Лема: Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су компланарни акко
$\vec{c} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$ за неко k и m

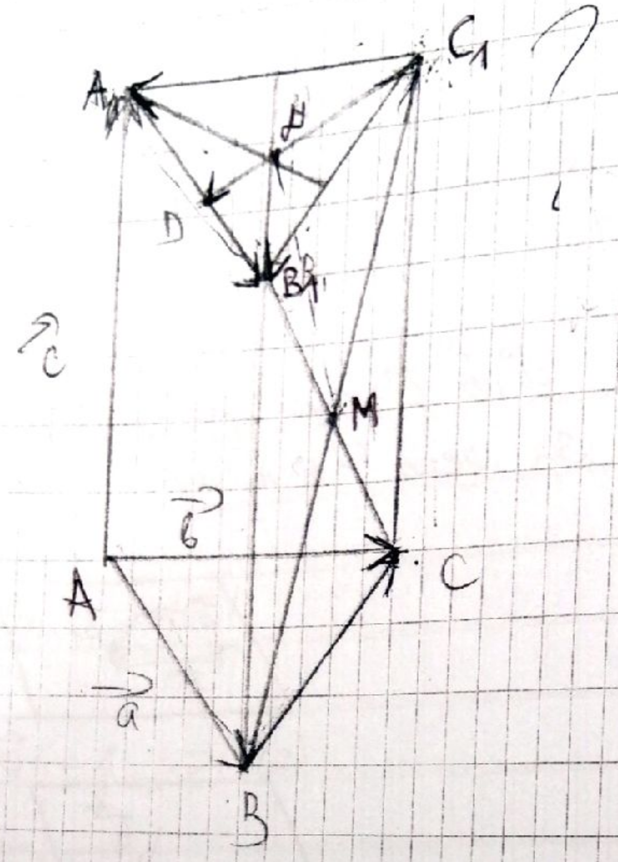


(4) Дата је тространа призма $ABCA_1B_1C_1$. Тачка M је центар паралелограма BCC_1B_1 а тачка N је тежиште троугла $A_1B_1C_1$. Изразити вектор MN помоћу вектора $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{AA_1}$



Нека је $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$

D - средиште дужи A_1B_1



$$\vec{MN} = \vec{MC_1} + \vec{C_1N}$$

$$\vec{MC_1} = \frac{1}{2}\vec{BC_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{BC} + \vec{CC_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right)$$

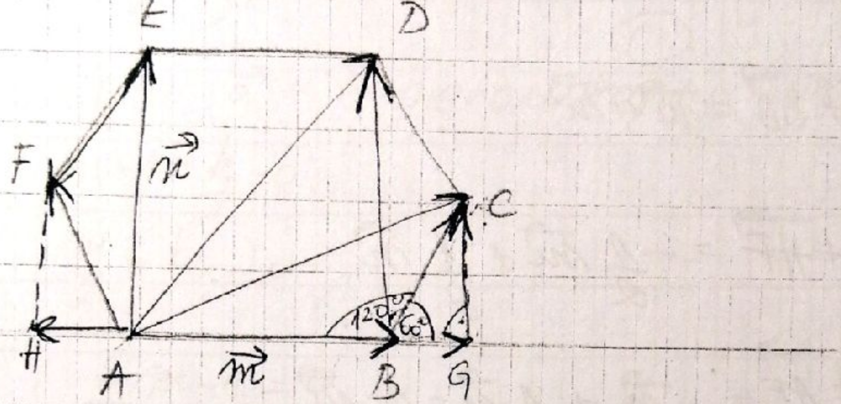
$$\vec{C_1N} = \frac{2}{3}\vec{C_1D} = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left(\vec{C_1A_1} + \vec{C_1B_1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\vec{b} + \vec{a} - \vec{b}\right)?$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\vec{MN} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

5. У правилном шестоуглу ABCDEF дати су вектори $\vec{AB}=\vec{m}$; $\vec{AE}=\vec{n}$ Изразити векторе $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AF}$ и $\vec{EF}$ преко вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

рјешење



G - ортогонална пројекција тачке C на праву p

H - ортогонална пројекција тачке F на праву p

$$\vec{GC}=\frac{1}{2}\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{n}$$

$\angle ABC=120^\circ \Longrightarrow \angle GBC=60^\circ$

$\vec{BG}$ - пројекција $\vec{BC}$ на праву p

I $|\vec{BG}|=\cos 60^\circ\cdot|\vec{BC}|$

$|\vec{BG}|=\frac{1}{2}|\vec{BC}|$

$|\vec{BG}|=\frac{1}{2}|\vec{AB}|$ (1)

II ΔBGC

$\cos 60^\circ=\dfrac{|\vec{BG}|}{|\vec{BC}|}$

Како су $\vec{AB}$ и BG истог правца и смјера то из (1) слиједи да је $\vec{BG}$ $\vec{BG}=\frac{1}{2}\vec{AB}$

(слично $\vec{AH}=-\frac{1}{2}\vec{AB}$)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GC} = \vec{m} + \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} =$$

$$= \frac{3}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$$

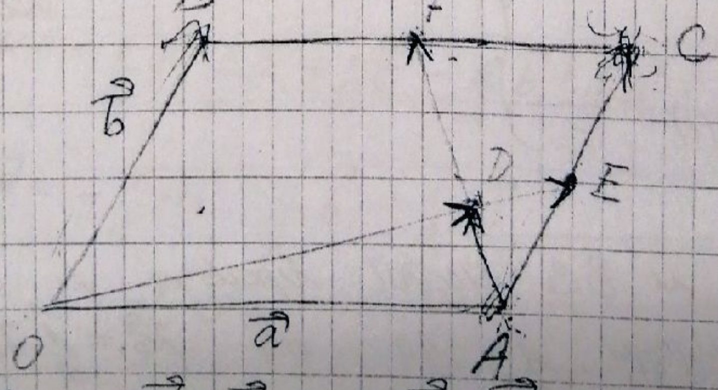
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{m} + \vec{n}$$

$$\vec{AF} = \vec{AH} + \vec{HF} = -\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$$

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = -\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{m} =$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}}$$

6. Дат је паралелограм OACB. Нека је E средиште странице AC, F – средиште странице CB а тачка D пресјек дужи OE и AF. Одредити $\frac{|AD|}{|AF|}$ и $\frac{|OD|}{|OE|}$



Нека је $\vec{OA} = \vec{a}$. $\vec{OB} = \vec{b}$

$$\vec{AD} = k \cdot \vec{AF} = k(\vec{AC} + \vec{CF}) = k \cdot (\vec{b} + (-\frac{1}{2}) \cdot \vec{a})$$

$$\vec{OD} = m \cdot \vec{OE} = m \cdot (\vec{OA} + \vec{AE}) = m \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$$

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$

$m(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{a} + k(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a})$

$\left(m - 1 + \frac{k}{2}\right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{m}{2} - k\right) \cdot \vec{b} = \vec{0} \cdot (1)$

Како су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **неколинеарни** то из (1) слиједи да је

$$m - 1 + \frac{k}{2} = 0$$

$$\frac{m}{2} - k = 0$$

$$\frac{5}{4}m - 1 = 0$$

$$m = \frac{4}{5}$$

$$k = \frac{2}{5}$$

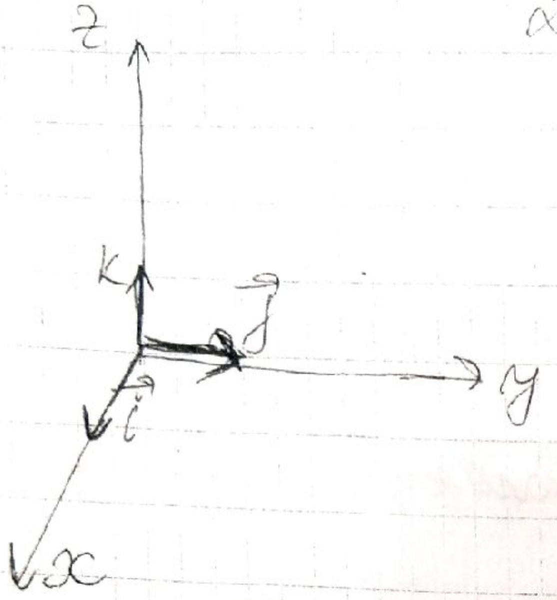
$\vec{AD} = \frac{2}{5} \cdot \vec{AF} \Rightarrow \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{AF}|} = \frac{2}{5}$

$\vec{OD} = \frac{4}{5} \vec{OE} \Rightarrow \frac{|\vec{OD}|}{|\vec{OE}|} = \frac{4}{5}$

$\frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DF}|} = \frac{2}{5}$

$\frac{|\vec{OD}|}{|\vec{DE}|} = \frac{4}{5}$

Декартові прямокутні координатні систем



$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} + x_3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$M_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$M_2(y_1, y_2, y_3)$$

$$i = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$M(x, y, z)$ ділить дугу M_1M_2 у ошеру

$$|\overrightarrow{M_1M}| : |\overrightarrow{MM_2}| = |\lambda|, \quad \lambda \neq -1$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

$\lambda = 1$ онда је M средиште дужи M_1M_2

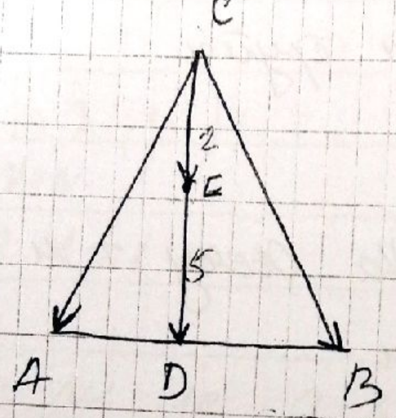
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

1. Дат је троугао ABC. Тачка D дијели дуж AB у омјеру 3:4, а тачка E дијели дуж CD у омјеру 2:5. Изразити вектор $\overrightarrow{CE}$ преко вектора $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и наћи координате тачке D, ако је

A(2, 1, -1) B(3, 0, 1) C(2, -1, 3)



$$CE = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CE} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{7} \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) =$$

$$= \frac{4}{7} \overrightarrow{CA} + \frac{3}{7} \overrightarrow{CB}$$

$$\boxed{CE = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{4}{7} \overrightarrow{CA} + \frac{3}{7} \overrightarrow{CB} \right)}$$

$A(2,1,-1)$ $\quad$ $B(3,0,1)$

$D(x,y,z)$

$|\vec{AD}| : |\vec{DB}| = \frac{3}{4}$, $\lambda = \frac{3}{4}$

$$x = \frac{2 + \frac{3}{4}\cdot 3}{1+\frac{3}{4}} = \frac{17}{7}$$

$$y = \frac{1 + \frac{3}{4}\cdot 0}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$z = \frac{-1 + \frac{3}{4}\cdot 1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{-1}{7}$$

$$\boxed{D\left(\frac{17}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)}$$