Матрице (вежбе) и детерминанте

$I=\{1,2, \ldots m\}$, $J=\{1,2\ldots n\}$, $P\neq\emptyset$

Шеми облика
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$a_{ij}\in P$ називамо матрицом реда $m\times n$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$

$m\neq n$ A - је правоугаона

$m=n$, A - је квадратна

главна дијагонала

споредна дијагонала

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$ – дијагонална матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$ – јединична матрица

!

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$ – нула матрица

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ горња троугаона

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ доња троугаона

сабирање матрица

$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$C=A+B$

$C=(c_{ij})$, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$

$j=\overline{1,n}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 7\\ -5 & 6 & 9\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$C=A+B$

$$C=\begin{pmatrix}2+(-3) & 5+4 & 3+7\\ 0+(-5) & -2+6 & 1+9\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 10\\ -5 & 4 & 10\end{pmatrix}$$

Својства

$A+B=B+A$

$A+O=O+A=A$

$(A+B)+C=A+(B+C)$

$\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha\cdot B$, $\alpha\in R$

Множење матрице скаларом

$A=(a_{ij})_{m\times n}$

$B=\alpha\cdot A$

$B=(b_{ij})$ $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix}9 & -3\\ 12 & 0\\ 6 & 15\end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

$A^T = (a_{ji})_{n\times m}$ - транспонована матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^T = A$ A је симетрична матрица

$A^T \neq A$ A је антисиметрична матрица

Множење матрица

$A(a_{ij})_{m\times n}$ $B = (b_{ij})_{n\times p}$

$C = A \cdot B$

$C = (c_{ij})_{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 3 & 2\cdot 5+(-1)\cdot 1+0(-1) & 2\cdot 4+(-1)\cdot 2+0\cdot 2 \\ -3\cdot 0+4\cdot(-1)+1\cdot 3 & -3\cdot 5+4\cdot 1+1\cdot(-1) & -3\cdot 4+4\cdot 2+1\cdot 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & -12 & -2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ у општем случају

Ако је $A \cdot B = B \cdot A$ кажемо да су матрице A и B комутативне.

примјер

Ријешити матричну једначину

$$-2\cdot(X+A) = 3\cdot X + B \quad \text{гдје} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2(X+A) = 3X + B$$

$$-2X-2A=3X+B$$

$$5X=-2A-B.$$

$$X=\frac{1}{5}\cdot\left(-2A-B\right)$$

$$-2A-B=-2\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\0&-2&-4\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&-4&-6\\0&-2&-4\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3&-4&-6\\0&-2&-4\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{6}{5}\\0&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

1) $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha A + \beta A \qquad \alpha,\beta \in R$
2) $\alpha\cdot(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
4) $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
5) $A\cdot E = E\cdot A = A$
6) $A+O = O+A = A$
7) $(A^T)^T = A$
8) $(A+B)^T = A^T + B^T$
9) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Детерминанте

$\pi: X \to X$

π - биjекција (ињективно и сурјективно пресликавање)

$X = \{1,2,3,4,5\}$

$$\pi: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$\pi(1) = 3$
$\pi(2) = 1$
$\pi(3) = 2$
$\pi(4) = 5$
$\pi(5) = 4$

$X = \{1,2,\ldots n\}$

S_n = скуп пермутација на X

$|S_n| = n!$

$|S_5| = 5! = 120$

π_2 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$

π : 3 1 2 5 4

π_2 : 5 1 3 2 4

инверзија на пару (i, j)

$i < j$

$\pi(i) > \pi(j)$

$1 < 2$

$\pi(1) > \pi(2)$

$3 > 1$

$N(\pi) = 2 + 1 = 3$ инверзије

$N(\pi_2) = 3 + 1 = 4$ инверзије

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

деф.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{N(\pi)} \cdot a_{1\,\pi(1)} \cdot a_{2\,\pi(2)} \cdots a_{n\,\pi(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_3} (-1)^{N(\pi)} \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdot a_{3\pi(3)} =$$

$$= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$
$$+ (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^2 a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$
$$+ (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} =$$

$X = \{1, 2, 3\}$

$|S_3| = 3! = 6 \Rightarrow S_3 \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$

$\pi(1) = 1 \ 2 \ 3$

$\pi(2) = 1 \ 3 \ 2$

$$a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31}$$
$$+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$\pi(3) = 2 \ 1 \ 3$

$\pi(4) = 2 \ 3 \ 1$

$\pi(5) = 3 \ 1 \ 2$

$\pi(6) = 3 \ 2 \ 1$

$N(\pi_1) = 0$

$N(\pi_2) = 1$

$N(\pi_3) \ 1$

$N(\pi_4) = 1 + 1 = 2$

$N(\pi_5) = 2$

$N(\pi_6) = 2 + 1 = 3$