Пример 1

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4-(3\cdot(-1)) = 20+3 = 23$$

Пример 2

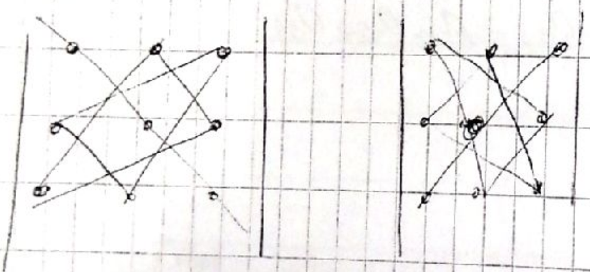
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 6 & -2 & -3 \end{array}\right| \quad 24+2+(-18)-(-24)-(-3)-(-12) =$$

$$= 24+2-18+24+3+12 =$$

$$= 8+24+3+12 = 47$$

Сарусово правило

Пример 3

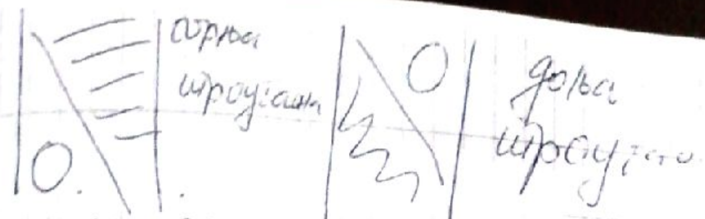


$P_1+P_2-(T_1+T_2+T_3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 24+2-18-(-24-3-12) =$$

$$= 8+39 = 47$$

само код детерминанти трећег реда




1) Израчунати детерминанту користећи дефиницију

а)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{N\Pi} \cdot a_{1n} \cdot a_{2n-1} \cdot \; a_{n-12} \cdot a_{n1}$$

$\Pi : n \quad n-1 \quad \dots \quad 2 \quad 1$

$N(\Pi) = n-1 + n-2 + \dots 1 =$

$= \frac{n - n(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 1 \cdot 1 \cdots = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

б)

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ 0 & 2 & n & \cdots & n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{N\Pi} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

$= (-1)^0 \cdot 1 \cdot 2 \cdots n = n!$

$\Pi : 1 \;\; 2 \;\; 3 \dots n$

$N(\Pi) = 0$

Напомена: Вриједност троугаоне детерминанте једнака је производу елемената са главне дијагонале

Особине.

1) $D=0$, ако има двије исте врсте (или исте колоне)

2) $D$ мијења знак ако двије врсте (колоне) замјене мјесто.

3) $D$ се множи бројем тако што се нека врста (колона) помножи тим бројем

4) $D$ не мијења вриједност ако неку врсту (колону) помножимо бројем и додамо некој другој врсти (колони)

5) $D$ је линеарна функција од сваког свог врсте (колоне)

6) $\det A = \det A^T$

② Одредити вриједност детерминанте.

$$\begin{vmatrix} x+a & x & x & \cdots & x \\ x & x+a & x & \cdots & x \\ x & x & x+a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+a \end{vmatrix}_{n} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+a & x & x & \cdots & x \\ -a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+n\cdot x & x & x & x \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_n = (a+nx)a^{n-1}$$

(3) Не развијајући детерминанте, доказати једнакости.

а) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+b+c & a & 1 \\ a+b+c & b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}_{0} = (a+b+c)\cdot 0 = 0$$

б) $$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+b & a & a \\ 2a+b & b & a \\ 2a+b & a & b \end{vmatrix} = (2a+b) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (2a+b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (2a+b)(b-a)^2$$

(b) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y)$

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x & a^2+x^2 & 1 \\ y & a^2+y^2 & 1 \\ z & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a\left( \begin{vmatrix} x & a^2 & 1 \\ y & a^2 & 1 \\ z & a^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= a\left( a^2 \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} - \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} \right)$$

$$a \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (-1) = a \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix} (-1) =$$

$$= a(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & z-y \end{vmatrix}$$

$a(y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y) = a(x-y)(x-z)\cdot(z-y)$

Лапласов развој

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots a_{in}\, A_{in}$$

$A_{ij}$ – алгебарски комплемента елемената $a_{ij}$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, $M_{ij}$ – минор, детерминанта која се добија избацивањем $i$-те врсте и $j$-те колоне из $D$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \dots + a_{nj}\, A_{nj}$$

развој по $j$-тој колони

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\, A_{22} + a_{23}\cdot A_{23}$$

$$D = 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= -2\cdot(-6)-(-9) + 4\cdot(6-(-6) - (-3-2) =$

$= -2\cdot 3 + 4\cdot 12 + 5 = -6 + 48 + 5 = 47$

1. Нека је $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ одредити све нуле полинома $P(x)$ и њихову вишеструкост

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & x \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (-1) \; (-1) \; (-1)$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

развој по првој колони

$$= (x+3) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x-1 & 1-x \\ x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

развој

$$= (x+3)(x-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x-1 & 1-x \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(x+3)(x-1)(x-1)(1-x) =$$

$$= (x+3)(x-1)^3$$

$$P(x) = (x+3)(x-1)^3$$

Нуле полинома су:

$x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ а вишеструкости $V_1 = 1$, $V_2 = 3$

$A^{-1}$ - инверзна матрица матрице $A$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A\cdot B)^{-1} = \cancel{A^{-1} \cdot B^{-1}}$ $B^{-1} \cdot A^{-1}$

Ако је детерминанта $A \neq 0$ тада $A^{-1}$ постоји, $A$ - регуларна

У супротном $A$ је сингуларна матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Пример 5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \quad A^{-1} \text{ постоји}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot(-2) = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 5 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^T =$$

$$\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/17 & \frac{-1}{17} \\ 2/17 & \frac{5}{17} \end{pmatrix}$$

Пример 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 30 - 30 - (36 - 25 - 24) =$$
$$= -84 - (-85) = 1 \neq 0$$

$A^{-1}$ постоји

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \; 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E

Пример 7.

~~Решити матричну једначину~~ $\cancel{A+B(X^T)^{-1} = E+A(X^T)}$

Решити матричну једначину $A+B(X^T)^{-1}=E+A(X^T)^{-1}$ па наки

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A+B\cdot(X^T)^{-1} = E+A\cdot(X^T)^{-1}$$

$$A\cdot(X^T)^{-1} - B(X^T)^{-1} = A-E$$

$$(A-B)^{-1} / \; (A-B)\cdot(X^T)^{-1} = A-E$$

$$\underbrace{(A-B)^{-1}\cdot(A-B)}_{E}\cdot(X^T)^{-1} = (A-B)^{-1}\cdot(A-E)$$

$$(X^T)^{-1} = (A-B)^{-1}\cdot(A-E) \;/^{-1}$$

$$X^T = (A-E)^{-1}\cdot(A-B) \;/^T$$

$$X = (A-B)^T\cdot((A-E)^{-1})^T$$

$$X = \left(\boxed{(A-E)^{-1}}\cdot\boxed{(A-B)}\right)^T$$

$$C = A-E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$ постоји

$$C^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$X=\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & -3 & -5\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\right)^T=$$

$$=\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}24 & -3 & -18\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}\right)^T=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}24 & 0 & 0\\ -3 & 15 & 0\\ -18 & 0 & 12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -1/2 & 5/2 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1. Розв'язати матричну рівняння

$$(XA+B)^{-1}\cdot(XD+B)=D$$

та найти $X$ якщо є

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$(XA+B)\,/\,(XA+B)^{-1}\cdot(XD+B)=D$$

$$XD+B=(XA+B)\,D$$

$$XD+B=XAD+BD$$

$$XD-XAD=BD-B$$

$$X(D-AD)=BD-B\ /\cdot(D-AD)^{-1}$$

$$X=(BD-B)\cdot(D-AD)^{-1}$$

$$G=B\cdot D-B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= D - AD = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8$$

$$H_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4, \quad H_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad H_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$H_{21} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16, \quad H_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8, \quad H_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$H_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6, \quad H_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad H_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$H^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 16 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = G \cdot H^{-1}$$

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 16 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 16 & -32 & -30 \\ 0 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -15/4 \\ 0 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

задржип,

(2) Ријешити матричну једначину

$$A\cdot(A^{-1}\cdot X\cdot B+A^{-1})=(XB+B^{-1})\cdot C$$

$$XB+E=XBC+B^{-1}C$$

$$XB-XBC=B^{-1}C-E$$

$$X\cdot(B-BC)=B^{-1}C-E \quad / \cdot (B-BC)^{-1}$$

$$\boxed{X=(B^{-1}C-E)\cdot(B-BC)^{-1}}$$

Наћи X ако је:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\3&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

рјешење

$$X=\begin{pmatrix}-7/2&-13/2&8\\-6&-12&14\\8&15&-18\end{pmatrix}$$

(3) Наћи $A^n$ $(n\in N)$ ако је $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3a\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&3a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4a\\0&1\end{pmatrix}$$

Уочимо да је $A^n=\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}$, $n\in N$

1° $n=1$

$$A^1=\begin{pmatrix}1&1\cdot a\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$$

2° нека је тврђење тачно за $n=k$

$$A^k=\begin{pmatrix}1&ka\\0&1\end{pmatrix}$$

$A_{n\times n}$ : $A^0 = E$

$A^1 = A$

$A^{p+1} = A^p \cdot A$

$\forall p, q \in N_0$

$A^p \cdot A^q = A^{p+q}$

$(A^p)^q = A^{p\cdot q}$

Докажимо да је тада тврдење тачно и з, $n=k+1$ тј. да важи

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из 1. и 2. следи да је $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in N$

Ако су $A$ и $B$ комутативне матрице тада

$(\forall p, q \in N_0)$ : $A^p \cdot B^q = B^q \cdot A^p$

$(A \cdot B)^p = A^p \cdot B^p$

Њутнова бинома формула $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot A^{n-k} \cdot B^k$

③ Одредити $A^n$, $n \in N$ ако је $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & a & -2 \end{pmatrix}$, $a \in R$

Рј.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$A = (-2)\,E + B$ , $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

Матрице $(-2)E$ и $B$ су комутативне па је

$$A^n = ((-2)\cdot E + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2} \cdot (-2E)^{n-k} \cdot B^k$$

$$B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^k = 0, \quad k \geq 3$$

$$A^n = \binom{n}{0} \cdot (-2) \cdot E^n \cdot B^0 + \binom{n}{1} \cdot (-2) E^{n-1} \cdot B^1 + \binom{n}{2} \cdot (-2) \cdot E^{n-2} \cdot B^2$$

$$+ \binom{n}{3} (-2 \cdot E)^{n-3} \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{B^3}} \cdots + \binom{n}{n} (-2 \cdot E)^0 \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{B^n}}$$

$$A^n = (-2)^n \cdot E + n \cdot (-2)^{n-1} \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2)^{n-2} \cdot B^2$$

$$A^n = (-2)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot (-2)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2)^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ n(-2)^{n-1} \cdot a & (-2)^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} (-2)^{n-2} \cdot a^2 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$