Одредити ранг матрице

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&3&-1\\2&2&-1&3\\1&3&-2&4\\1&6&0&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\2&2&-1&3\\-2&1&3&-1\\1&6&0&6\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)\\(2)\\(-1)\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-4&3&-5\\0&7&-1&7\\0&3&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\0&3&-4&-5\\0&-1&7&7\\0&2&3&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\0&-1&7&7\\0&3&-4&-5\\0&2&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}3\\ \cdot(2)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\0&-1&7&7\\0&0&17&16\\0&0&17&16\end{pmatrix}(-1)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\0&-1&7&7\\0&0&17&16\\0&0&0&\end{pmatrix}$$

Ранг матрице је 3

$A=3$, $M=\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&-1&7\\0&0&17\end{vmatrix}=-17\neq0$, а ненулти минор реда веће од 3 не постоји.

7. У зависности од параметра a, одредити ранг матрице A.

$$A=\begin{pmatrix}a&1&0&-1\\2&-2&-1&-2\\-1&3&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&3&1&1\\2&-2&-1&-2\\a&1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&1&-1\\-2&-2&-1&2\\-1&1&0&a\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot2\\+\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&4&1&0\\0&4&1&a-1\end{pmatrix}(-1)$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&4&1&0\\0&0&0&a-1\end{pmatrix}$$

I $a \neq 1$

ранг $A = 3$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (a-1) \neq 0$

II $a = 1$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг $A = 2$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

А минори реда веће од 2, једнаки су нули, јер леже на врсти састављеној нула.

- Gausov metod rješavanja sistema linearnih jednačina

1. $x_1+3x_2+2x_4=2$

$3x_1+7x_2-x_3+2x_4=3$

$x_1-x_2+5x_3-3x_4=4$

$2x_1+4x_2-x_3=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-3) \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dati sistem je ekvivalentan sistemu:

$x_1+3x_2+2x_4=2$

$-2x_2-x_3-4x_4=-3$

$7x_3+3x_4=8$

$$x_3=\frac{8-3x_4}{7}$$

$$x_2=\frac{3-x_3-4x_4}{2}=\frac{3-\frac{8-3x_4}{7}-4x_4}{2}=\frac{13-25x_4}{14}$$

$$x_1=2-3x_2-2x_4=2-3\cdot\frac{13-25x_4}{14}-2x_4=\frac{-11+47x_4}{14}$$

Sistem je saglasan i neodređen. Opšte rešenje je

$\left(\frac{-11+47x_4}{14}, \frac{13-25x_4}{14}, \frac{8-3x_4}{7}, x_4\right)$ x_4-slobodna nepoznata

2. U zavisnosti od parametra a diskutovati i riješiti sistem linearnih jednačina:

a) $x+2y-az=1$
$ax+2y-z=2$
$x+z=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ a & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & -1 & 2 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & a-1 & 1 \end{array}\right) \cdot(1-a) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3 \end{array}\right)$$

Sistem je ekvivalentan sistemu:

$2y+x-az=1$
$x+z=3$
$0=4-3a$

I Ako je $a \neq \frac{4}{3}$ sistem je nesaglasan
II Ako je $a=\frac{4}{3}$ sistem je ekvivalentan siste-mu

$2y+x-\frac{4}{3}z=1$
$x+z=3$

$x=3-z$

$$y=\frac{1-x+\frac{4}{3}z}{2}=\frac{1-3+z+\frac{4}{3}z}{2}=\frac{-6+7z}{6}$$

Sistem je saglasan i neodređen $\left(3-z, \frac{-6+7z}{6}, z\right)$
z-slobodna nepoznata

b) $ax-y+3z=a-1$
$x+ay-z=1$
$4x+3y+z=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 3 & a-1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & a & a-1 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a-1 \end{array}\right) \cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & a+3 & 5 & 4 \\ 0 & -10 & a-12 & a-10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & a-12 & a-10 \\ 0 & a+3 & 5 & 4 \end{array}\right) \cdot \frac{a+3}{10} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & a-12 & a-10 \\ 0 & 0 & \frac{(a-2)(a-7)}{10} & \frac{(a-2)(a-5)}{10} \end{array}\right) \cdot 10$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & a-12 & a-10 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-7) & (a-2)(a-5) \end{array}\right)$$

$$\frac{(a-12)(a+3)}{10}+5=\frac{a^2-9a-36+50}{10}=\frac{a^2-9a+14}{10}=\frac{(a-2)(a-7)}{10}$$

$$\frac{(a-10)(a+3)}{10}+4=\frac{a^2-7a+10}{10}=\frac{(a-2)(a-5)}{10}$$

Sistem je ekvivalentan sistemu:

$z+3y+4x=3$

$-10y+(a-12)x=a-10$

$(a-2)(a-7)x=(a-2)(a-5)$

I $a\neq 2 \quad a\neq 7$

$x=\frac{(a-2)(a-5)}{(a-2)(a-7)}=\frac{a-5}{a-7}$

$y=\frac{10-a+(a-2)x}{10}=\frac{1}{7-a}$

Sistem je saglasan i određen i jedinstveno rešenje je $z=3-3y-4x=\frac{2-a}{a-7}$

$\left(\frac{a-5}{a-7},\frac{1}{7-a},\frac{2-a}{a-7}\right)$

II $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 3\\ 0 & -10 & -10 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Sistem je ekvivalentan sistemu:

$z+3y+4x=3$

$-10y-10z=-8$

$y=\frac{4-5x}{5}$

$z=3-3y-4x=\frac{3-5x}{5}$

Sistem je saglasan i neodređen

Opšte rešenje $\left(x,\frac{4-5x}{5},\frac{3-5x}{5}\right)$ x- slobodna nepoznat

III $a=7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 3\\ 0 & -10 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{array}\right)$$

$z+3y+4x=3$

$-10y-5z=-3$

$0=10\ \perp$

Sistem je nesaglasan

* Sistemi linearnih jednačina *

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Kramerovo pravilo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

D_i - det koja se dobija iz D kada se i-ta vrsta zamjeni kolonama slobodnih članova. $\left(x_i = \frac{D_i}{D}\right)$

1) $D \neq 0 \Rightarrow$ sistem saglasan i određen
2) $D = 0 \wedge D_i \neq 0$ za neko $i \in \{1 \dots n\}$ sistem je nesaglasan
3) $D = 0 \wedge D_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$ dodatno diskutujemo

③ Применом Крамеровог правила решити систем

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 9 - (8 + 3 - 12) = 13 + 1 = 14$$

$D \neq 0 \Rightarrow$ систем је сагласан и одређен

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{14} = 1$$

Јединствено рјешење је $(1, 2, 3)$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{28}{14} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{42}{14} = 3$$

(7) У зависности од параметра a дискутовати и ријешити систем линеарних једначина помоћу Крамеровог правила

$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= a - 1 \\ x + ay - z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

[redacted]

$$D = \begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ 1 & a & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 + 9 - (12a - 3a - 1) = a^2 - 9a + 14 =$$
$$= (a-7)(a-2)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 3 \\ 1 & a & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-2)(a-5)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(a-2)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & -1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -(a-2)^2$$

I $a \neq 7 \wedge a \neq 2$

$D \neq 0 \Rightarrow$ систем је сагласан и одређен

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\cancel{(a-2)}(a-5)}{(a-7)\cancel{(a-2)}} = \frac{(a-5)}{a-7}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-\cancel{(a-2)}}{(a-7)\cancel{(a-2)}} = \frac{1}{7-a}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-(a-2)^2}{(a-7)(a-2)} = \frac{-(a-2)}{a-7} = \frac{2-a}{a-7}$$

Јединствено решење је $\left(\frac{a-5}{a-7}, \frac{1}{7-a}, \frac{2-a}{a-7}\right)$

II Ако је $a=7$

$D=0 \wedge D_1 = 10 \neq 0 \Rightarrow$ систем је несагласан

III Ако је $a=2$:

$D=0 \wedge D_1=0 \wedge D_2=0 \wedge D_3=0$

- Додатно дискутујемо

Систем тачн

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \\ \\ (-4) \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Систем гласи.

$$x + 2y - z = 1$$
$$-5y + 5z = -1$$

$$y = \frac{1+5z}{5}$$

$$x = 1 - 2y + z = 1 - 2\cdot\frac{1+5z}{5} + z = \frac{3-5z}{5}$$

Систем је сагласан и неодређен

Опште решење је

$$\left(\frac{3-5z}{5}, \frac{1+5z}{5}, z\right)$$ z - слободна непозната

$\text{rank} A = 2 < \text{rank}(A|b) = 3$

Vježbe

1. Primjenom Kramerovog pravila diskutovati i riješiti sistem u zavisnosti od parametra a.

$$\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ x+ay+z&=2\\ x+y+az&=-3 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix} \begin{array}{l}\cdot(-1) \quad \cdot(-a)\end{array} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a^2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & -a^2-a+2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2)\end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & a & 1\\ -3 & 1 & a\end{vmatrix} = (a-1)(a+2)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & a\end{vmatrix} = 2(a-1)(a+2)$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix} = -3(a-1)(a+2)$$

I $a \neq 1 \wedge a \neq -2 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ sistem je saglasan i određen

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{a-1} \qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{a-1} \qquad z=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{1-a}$$

Jedinstveno rešenje $\left(\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, \frac{3}{1-a}\right)$

II $a=1 \Rightarrow D=0 \wedge D_1=0 \wedge D_2=0 \wedge D_3=0 \Rightarrow$ dodatno disk.

za $a=1$ sistem glasi:

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y+z&=2\\ x+y+z&=3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right) \cdot 4 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$0=1 \perp \Rightarrow$ sistem je nesaglasan

III $a=-2 \Rightarrow D=0 \wedge D_1=0 \wedge D_2=0 \wedge D_3=0 \Rightarrow$ dodatno disk.

Za $a=-2$ sistem glasi:

$$-2x+y+z=1$$
$$x-2y+z=2$$
$$x+y-2z=-3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \cdot(-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x-2y+z=2$$
$$-3y+3z=5$$

$$y=\frac{3z-5}{3}$$

Sistem je saglasan i neodređen

$$x=2y+2-z=2\cdot\frac{3z-5}{3}+2-z=\frac{3z-4}{3}$$

Opšte rešenje sistema je:

$$\left(\frac{3z-4}{3}, \frac{3z-5}{3}, z\right)$$ z - slobodna nepoznata

$5y + 5z = 1 \qquad y = -\frac{1}{3}$

$5y + 8z = 9 \qquad (x, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ x - slobodna

3. Primjenom Kroneker-Kapelijeve teor. nepoznata diskutovati i riješiti sistem u zavisnosti od parametra m.

$$\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + (3-m)y + z &= m \\ mx + (m+1)y + z &= 1-m \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-m & 1 & m \\ m & m+1 & 1 & 1-m \end{array}\right)$$

- proširena matrica
kolona sl. članova se ne može mijenjati
kolonama se mogu samo mijenjati mjesta

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 3-m & 1 & m \\ 1 & m+1 & m & 1-m \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 2-m & 1-m & m-1 \\ 0 & m & 0 & -m \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 2-m & m-1 \\ 0 & 0 & m & -m \end{array}\right)$$

I $m \neq 1 \quad m \neq 0$

$\text{rang}A = 3 \quad M = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & 2-m \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = (1-m)m \neq 0$

$\text{rang}B = 3$

rang A = rang B = 3 - broj nepoznatih ⇒ na ons. teor. Kron.-Kapeli sistem je saglasan i određen:

$$z + mx + y = 1$$
$$(1-m)x + (2-m)y = m-1$$
$$my = -m$$

$$y = -1$$
$$x = \frac{m-1-(2-m)\cdot(-1)}{1-m} = \frac{1}{1-m}$$
$$z = 1 - mx - y = 1 - \frac{m}{1-m} + 1 = 2 - \frac{m}{1-m} = \frac{2-3m}{1-m}$$

Jedinstveno rešenje je $\left(\frac{1}{1-m}, -1, \frac{2-3m}{1-m}\right)$

II $m=1$

$$B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

rang A = 2 $\quad M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

rang B = 3 $\quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

rang A ≠ rang B ⇒ nesaglasan

III $m=0$

$$B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang A = 2
$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

rang B = 2 - isti minor
rang A = rang B = 2 < 3 br. nepoznatih ⇒ sagl. i neod.

$$z + y = 1 \qquad x = -1 - 2y$$
$$x + 2y = -1 \qquad z = 1 - y$$

Opšte rešenje je $(-1-2y, y, 1-y)$ y - slobodna nepoznata

4. U zavisnosti od parametra t diskutovati i riješiti sistem primjenom Kronek.-Kapeli.-teor.

$$tx + y + z = -t$$
$$x + ty + z = -1$$
$$x + y + tz = t+1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & -t \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 1 & 1 & t & t+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & t+1 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ t & 1 & 1 & -t \end{array}\right) \cdot(-1) \cdot(-t)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & t+1 \\ 0 & t-1 & 1-t & -t-2 \\ 0 & 1-t & 1-t^2 & -t^2-2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & t+1 \\ 0 & t-1 & 1-t & -t-2 \\ 0 & 0 & -t^2-t+2 & -t^2-3t-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & t+1 \\ 0 & t-1 & 1-t & -t-2 \\ 0 & 0 & -(t+2)(t-1) & -(t+2)(t+1) \end{array}\right)$$

I $t \neq 1 \wedge t \neq -2$

rang A = 3 $\quad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & -(t+2)(t-1) \end{vmatrix} = -(t+2)(t-1)^2 \neq 0$

rang A = rang B = 3 - br. nepoznatih ⇒ sagl. i odred.

$x + y + t \cdot z = t + 1$

$(t-1)y + (1-t)z = -t-2$

$-(t+2)(t-1)z = -(t+2)(t+1)$

$z = \frac{t+1}{t-1}$

$y = \frac{-t-2-(1-t)\cdot\frac{t+1}{t-1}}{t-1} = \frac{1}{1-t}$

$x = t+1-y-t\cdot z$

$= t+1-\frac{1}{1-t} - t\cdot\frac{t+1}{t-1} = \frac{t}{1-t}$

Jedinstveno rešenje je

$\left(\frac{t}{1-t}, \frac{1}{1-t}, \frac{t+1}{t-1}\right)$

II $t = 1$

$B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rang $A = 1$

rang $B = 2$

rang $A \neq$ rang $B \Rightarrow$ nesagl.

III $t = -2$

$B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rang $A = 2$ $\quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$

rang B = rang $A = 2 < 3 \Rightarrow$ sagl. i neodr.

$x + y - 2z = -1$

$-3y + 3z = 0$

$x = -1 - y + 2z = -1 + z$ $\quad$ z - slobodna nepo

$y = z$ $\quad$ Opšte reš. $(-1+z, z, z)$ znata

(*) $(a-1)x + y + (1-a)z = 0$
$-x + y + z = 1$
$(1+a)x + y + (a+1)z = 2$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 1-a & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & a+1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1+a & 1 & a+1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \cdot(-1) \;\; \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -a & -1 \\ 0 & a+2 & a & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & a & -1 \\ 0 & a & a+2 & 1 \end{array}\right) \end{array} +$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2(a+1) & 0 \end{array}\right)$$

I $a \neq 0 \wedge a \neq -1$:

$\text{rang} A = 3$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 2(a+1) \end{vmatrix} = -2a \cdot (a+1) \neq 0$

$\text{rang} B = 3$, — // — // —

$\text{rang} A = \text{rang} B = 3$ (broj nepoznatih) $\Rightarrow$
sistem saglasan i određen

$$\begin{cases} y+z-x=1 \\ -az+ax=-1 \\ 2(a+1)x=0 \end{cases} \uparrow$$

$x=0$

$-az=-1$

$z=\frac{1}{a}$

$y=1-z+x$

$y=1-\frac{1}{a}$

$y=\frac{a-1}{a}$

Jedinstveno rješenje je $(0, \frac{a-1}{a}, \frac{1}{a})$

$\underline{II}$ $\underbrace{a=0:}$

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\text{rang}A=2, \quad M_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$

$\text{rang}B=3, \quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

$\text{rang}A\neq\text{rang}B \Rightarrow$ sistem je nesaglasan.

$\underline{III}$ $\underbrace{a=-1}$:

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}A=2, \quad M=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

$\text{rang}B=2, \quad$ -II — II —

$\text{rang}A=\text{rang}B<3 \Rightarrow$ sistem saglasan i neodređen

$$\begin{array}{r} y+z-x=1 \\ z-x=-1 \\ \hline \end{array} \uparrow$$

$z=x-1$

$y=1-z+x=1-x+1+x=2$

Opšte rješenje je: $(x, 2, x-1)$, x-slobodna nepoznata

6. U zavisnosti od parametra a ispitati kada sistem ima netrivijalna rešenja i riješiti sistem:

$$x+y+z=0$$
$$ax+4y+z=0$$
$$6x+(a+2)y+2z=0$$

Homogeni sistem ⇒ slobodni čl. = 0

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 6 & (a+2) & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & a \\ 2 & a+2 & 6 \end{pmatrix} \cdot(-1) \cdot(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a-1 \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{a}{3}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & -\frac{(a-4)(a+3)}{3} \end{pmatrix} \cdot(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & (a-4)(a+3) \end{pmatrix}$$

I $a \neq 4 \wedge a \neq -3$ rang $A = 3$ (br. nepoznatih) ⇒ samo trivijalno rešenje

II $a=4$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 2 < 3 \Rightarrow$ ima netriv. rešenja

$z + x + y = 0 \qquad y = -x$

$3y + 3x = 0 \uparrow \qquad z = 0$

Opšte rešenje je:

$(x, -x, 0)$ x- slobodna nepoznata

III $a=-3$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 2 < 3 \Rightarrow$ ima netriv. rešenja.

$z + y + x = 0 \qquad y = \frac{4}{3}x$

$3y - 4x = 0 \uparrow \qquad z = -y - x = -\frac{4}{3}x - x = -\frac{7}{3}x$

Opšte rešenje $(x, \frac{4}{3}x, -\frac{7}{3}x)$ x-slobodna nepoznata