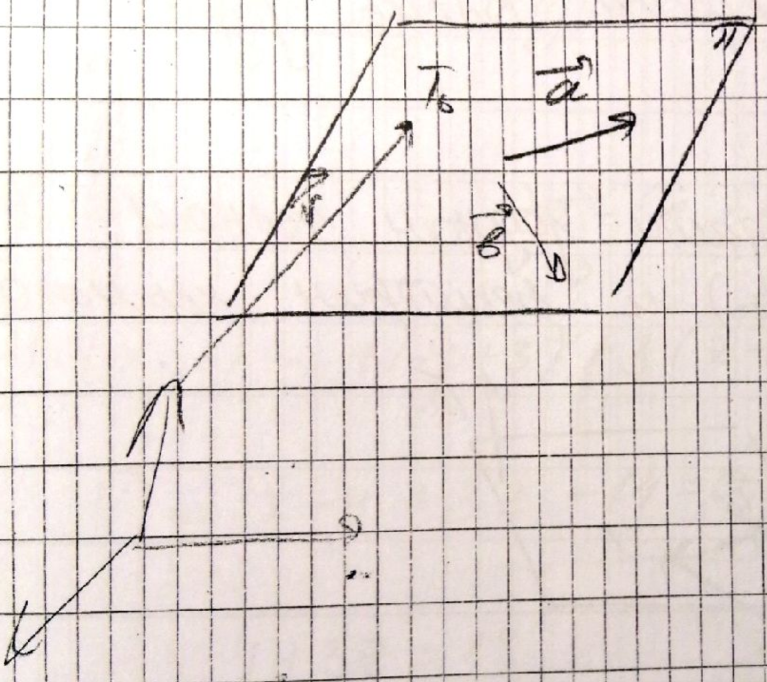
Раван

I Раван π одређена је у простору једном својом тачком T_0 и са два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ који нису колинеарни.



Тачка $T(\vec{r})$ ће припада равни π, ако су вектори $\overrightarrow{T_0T}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарни, тј. ако је

15 do 2

$$\overrightarrow{T_0T} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$$

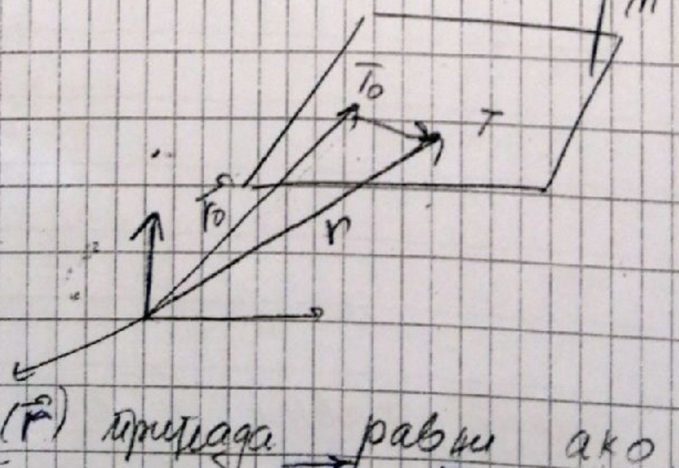
$\vec{r} = \vec{r_0} + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$ векторски параметарски облик једначине равни

$T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T(x, y, z)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$x = x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1$$
$$y = y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2$$
$$z = z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3$$

скаларни параметарски облик једначине равни

II Раван можемо задати једном њеном тачком $T_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором нормале $\vec{n} = (A, B, C)$



$T(\vec{r})$ припада равни ако је $\vec{n} \perp \overrightarrow{T_0T}$,

тј. ако је $\overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0$

$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$ - једначина равни π

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - једначина равни

$$Ax+By+Cz+\underbrace{(-Ax_0-By_0-Cz_0)}_{D}=0$$

$Ax+By+Cz+D=0$ - општи облик једначине равни

А можемо да прочитамо

III Сегментни облик једначине равни

$$\pi: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Напомена: $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ тачке у којима раван сече координатне осе.

$M(5,-3,2)$, $\vec{n}=(1,-1,3)$

$1\cdot(x-5)-1(y+3)+3(z-2)=0$

$$\pi: \boxed{x-y+3z-14=0}$$

$x-y+3z=14$

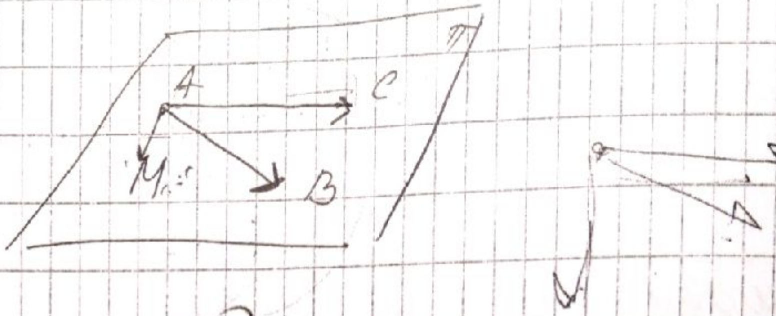
$$\frac{x}{14}+\frac{y}{-14}+\frac{z}{\frac{14}{3}}=1$$

$M_3\left(0,0,\frac{14}{3}\right)$

$M_1(14,0,0)$

$M_2(0,-14,0)$

IV Раван може бити задата и са три своје тачке.



$A(x_1, y_1, z_1)$
$B(x_2, y_2, z_2)$
$C(x_3, y_3, z_3)$
$M(x, y, z)$

Тачка M припада равни ако су вектори $\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ компланарни, тј. ако је

$$(\vec{AM} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

V Растојање тачке од равни

$M(x_0, y_0, z_0)$, $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

VI Угао између двије равни

$$\measuredangle(\pi_1, \pi_2) = \measuredangle(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

VII Однос између двије равни

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2$ (подударају се)

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$ паралелна

$(\vec{n_1} = \lambda \vec{n_2})$

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0} \Rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2$

нормални

VIII Прамен равни је скуп свих равни које садрже једну исту праву

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Једначина прамена је

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0$$

10 Наћи једначину равни која садржи тачку $M(2,2,-2)$, а паралелна је са равни

$\alpha: x - 2y - 3z = 0$

R: π – тражена раван

$\vec{n_\pi}$ – вектор нормале

$\vec{n_\alpha} = (1,-2,-3)$ – вектор нормале равни α

$$\pi \parallel \alpha \Rightarrow \boxed{\vec{n}_{\pi} = \lambda \cdot \vec{n}_{\alpha}}$$

За $\lambda = 1$, $\vec{n}_{\pi} = (1, -2, -3)$

$\pi: M(2, 2, -2)$, $\vec{n}_{\pi} = (1, -2, -3)$

I $(x-2) - 2(y-2) - 3(z+2) = 0$

$\pi: x - 2y - 3z - 4 = 0$

II начин

$\pi \parallel \alpha \Rightarrow \pi: x - 2y - 3z + D = 0$

$M(2, 2, -2) \in \pi \Rightarrow 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + D = 0$

$4 + D = 0$

$\boxed{D = -4}$

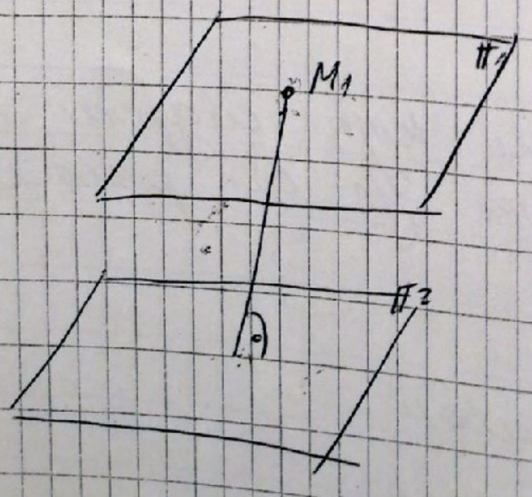
$$\boxed{\pi: x - 2y - 3z - 4 = 0}$$

2. Наћи удаљеност паралелних равни.

$\pi_1: 4x + 3y - 5z - 8 = 0$

$\pi_2: 4x + 3y - 5z + 12 = 0$

R:



Одредимо тачку која припада π_1.

Нпр. за $y=0 \wedge z=0$ добијамо $4x-8=0$

$x=2$

$M_1(2,0,0) \in \pi_1$

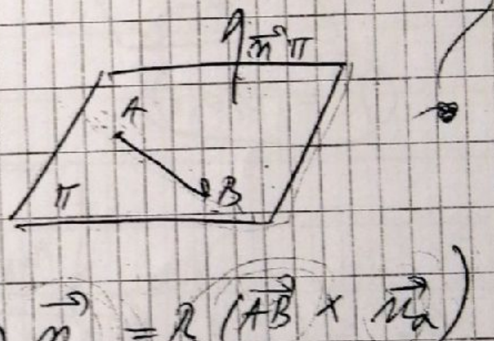
$$d(\pi_1,\pi_2) = d(M_1,\pi_2) = \frac{|4\cdot 2+3\cdot 0-5\cdot 0+12|}{\sqrt{16+9+25}} = \frac{20}{5\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

③ Написати једначину равни која пролази кроз тачке $A(2,3,-1)$, $B(1,5,3)$ и нормална је на раван $\alpha: 3x-y+3z+15=0$

Р: π − тражена раван

$\vec{n}_\pi$ − вектор нормале

$\vec{n}_\alpha = (3,-1,3)$



$$\left.\begin{array}{l} A,B\in\pi \Rightarrow \vec{AB}\in\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{AB} \\ \pi\perp\alpha \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\pi = \lambda(\vec{AB}\times\vec{n}_\alpha)$$

$\vec{AB} = (-1,2,4)$

$$\vec{AB}\times\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - (-15)\vec{j} + (-5)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{AB}\times\vec{n}_\alpha = (10,15,-5)}$$

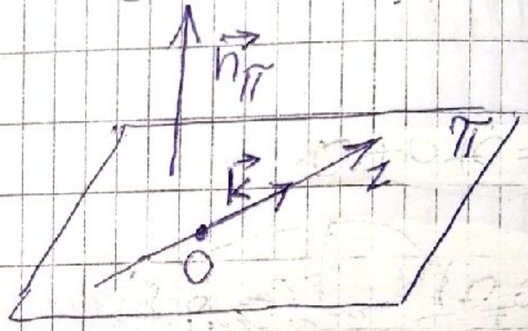
За $\lambda = \frac{1}{5}$, $\vec{n}_\pi = (2,3,-1)$

π: $A(2,3,-1)$ $\quad \vec{n}_\pi = (2,3,-1)$

$2(x-2)+3(y-3)-1(z+1)=0$

$\pi: 2x+3y-z-14=0$

⑤ Написати једначину равни која садржи осу Oz и са равни $\alpha: 2x+y-\sqrt{5}\cdot z=0$ образује угао од $60°$



π - тражена раван

$\vec{n_\pi}$ - вектор нормале

$\vec{n_\pi}=(A,B,C)$

$Oz\subset\pi \Rightarrow \vec{n_\pi}\perp \vec{k} \Rightarrow \vec{n_\pi}\cdot\vec{k}=0 \Rightarrow$

$\vec{n_\pi}=(A,B,C)$ $\Rightarrow 0+0+C=0$

$\vec{k}=(0,0,1)$ $\quad C=0$

$\vec{n_\pi}=(A,B,0)$

$\vec{n_\alpha}=(2,1,-\sqrt{5})$

$\measuredangle(\pi,\alpha)=60° \Rightarrow \measuredangle(\vec{n_\pi},\vec{n_\alpha})=60°$ $\quad n_\pi(A,B,0)$

$$\cos 60° = \frac{\vec{n_\pi}\cdot\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\pi}|\cdot|\vec{n_\alpha}|}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{4+1+5}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2A+B}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2+B^2}} \Big/ \cdot 2\sqrt{10}\cdot\underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{\neq 0}$$

$(A^2+B^2=0 \Leftrightarrow A=0, B=0)$

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{A^2+B^2} = 2 \cdot (2A+B) \quad /^2$$

$$10 \cdot (A^2+B^2) = 4 \cdot (2A+B)^2 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$5 \cdot (A^2+B^2) = 2(2A+B)^2$$

$$3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0$$

$$A_{1/2} = \frac{-8B \pm \sqrt{64B^2+36B^2}}{6}$$

$$A_{1/2} = \frac{-8B \pm 10B}{6}$$

$$A_1 = \frac{B}{3}, \quad A_2 = -3B$$

1° $A = \frac{B}{3}$

$$\vec{n_\pi} = \left(\frac{B}{3}, B, 0\right) = B\left(\frac{1}{3}, 1, 0\right)$$

$B = 3$

$$\vec{n_\pi} = (1, 3, 0)$$

$$\pi : O(0,0,0), \quad \vec{n_\pi} = (1,3,0)$$

$$\pi : x + 3y = 0$$

2° $A = -3B$

$$\vec{n_\pi} = (-3B, B, 0) = B(-3, 1, 0)$$

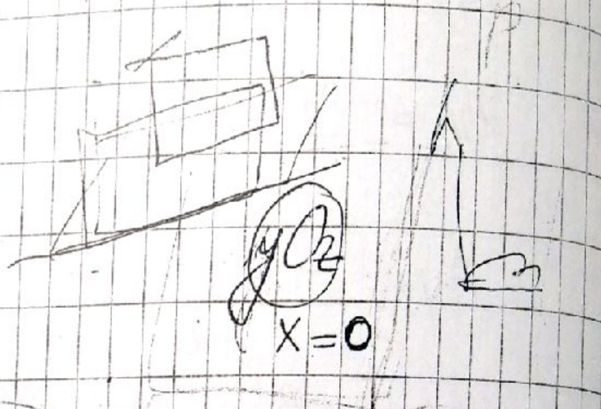
$3a$ $B = 1$, $\vec{n_\pi} = (-3, 1, 0)$

$$\pi : O(0,0,0), \quad \vec{n_\pi} = (-3, 1, 0)$$

$$-3x + y = 0$$

$$\boxed{\pi : 3x - y = 0}$$

(5) Написати једначину равни која је нормална на раван $\alpha: 3x+5y-z=0$ и која је сече по праву која лежи у yOz равни.



R: π − тражена раван

β − yOz раван

$\beta: x=0$

$\pi \cap \alpha = p \ \land \ \pi \perp \alpha$

$\left.\begin{array}{l} p\subset\alpha \\ p\subset\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = p$

$\Rightarrow$ α и β одређују прамен равни. У том прамену припада и тражена раван π. Једначина прамена је:

$3x+5y-z+\lambda x=0$

$(3+\lambda)x+5y-z=0$ − ј-на прамена, тата

$\vec{n}_\pi=(3+\lambda,5,-1)$

$\vec{n}_\alpha=(3,5,-1)$

$\pi\perp\alpha \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\alpha=0$

$3\cdot(3+\lambda)+5\cdot5+(-1)\cdot(-1)=0$

$3\lambda+35=0$

$\boxed{\lambda=-\frac{35}{3}}$

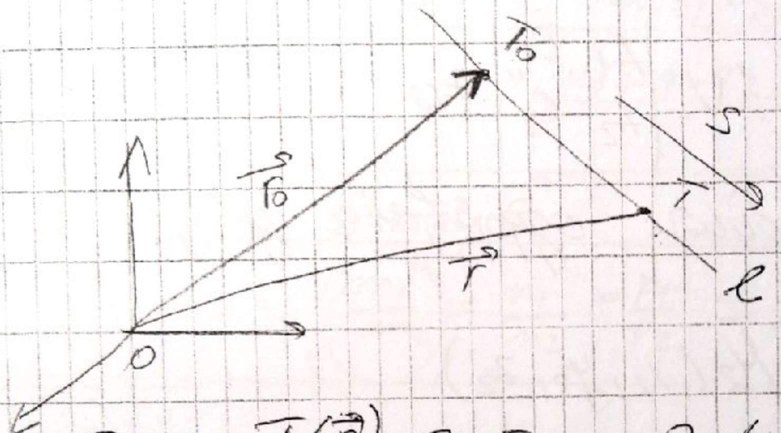
$\pi: \left(3-\frac{35}{3}\right)\cdot x+5y-z=0$

$-\frac{26}{3}x+5y-z=0 \quad /\cdot 3$

$\pi: -26x+15y-3z=0$

Права

I Права је одређена једном својом тачком $T_0(\vec{r_0})$ и вектором правца $\vec{s}$.



тачка $T(\vec{r})$ припада правој ℓ ако су вектори $\overrightarrow{T_0T}$ и $\vec{s}$ колинеарни тј. ако је:

$$\overrightarrow{T_0T} = k \cdot \vec{s}$$

$$\vec{r} - \vec{r_0} = k \cdot \vec{s}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + k \cdot \vec{s}$$ – векторска параметарска једначина праве.

$T_0 \ (x_0, y_0, z_0)$

$T \ (x, y, z)$

$\vec{s} = (m, n, p)$

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot m \\ y = y_0 + k \cdot n \\ z = z_0 + k \cdot p \end{cases}$$ скаларне параметарске једначине праве ℓ

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$ – канонска једначина праве

004

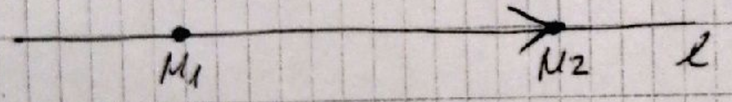
II Права може бити дата и као пресек двију равни.

$$l: \begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \vee \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \vee \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

III Права може бити одређена двијема тачкама

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$



$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

IV Угао између двије праве

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_2}$$

$$l_2: \frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

$$\measuredangle(l_1, l_2) = \measuredangle(\vec{s_1}, \vec{s_2})$$

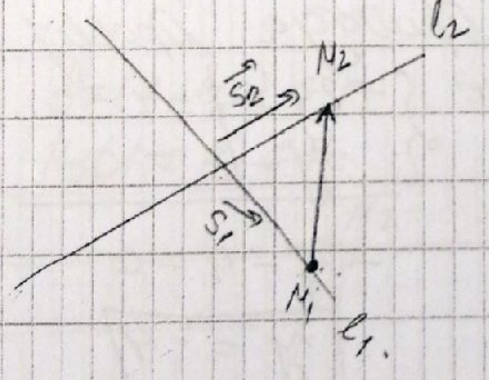
$\vec{s_1}(m_1, n_1, p_1)$
$\vec{s_2}(m_2, n_2, p_2)$

V Однос између правих

$$l_1 \perp l_2 : \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Rightarrow \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$$
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 : \vec{s_1} = \lambda \cdot \vec{s_2}$$
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} = \lambda$$

VI Услов да се двије праве сијеку.



$$1^\circ \ (\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2° нису паралелне

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \vee \ \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \vee \ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{i} - (-3)\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = (1,3,5)$$

За $n = 1$ $\quad \vec{s_p} = (1,3,5)$

$$l \parallel p \Rightarrow \vec{s_p} \cdot k = \vec{s_l}$$

За $k = 1$, $\vec{s_l} = (1,3,5)$

$l: M(-4,3,0) \qquad \vec{s_l} = (1,3,5)$

$$\boxed{l: \frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}}$$

Напомена!

Одредимо канонску једначину праве p.

Одредимо тачку која припада правој p.

Нпр. за $x = 0$ добијамо $\begin{cases} -2y + z - 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$$-y - 4 = 0$$

$$\boxed{y = -4}$$

$$\boxed{z = -4}$$

$$A(0,-4,-4) \in p$$

$p: A(0,-4,-4)$, $\vec{s_p} = (1,3,5)$

$$p: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+4}{5}$$

(2) Одредити параметар a тако да праве $p_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ и $p_2 : \frac{x-1}{2a} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{4a}$, буду паралелне, а затим наћи удаљеност између правих.

$\vec{s_1} : (1, 1, 2)$

$\vec{s_2} : (2a, -4, 4a)$

$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow \vec{s_2} = \lambda \cdot \vec{s_1}$

$$\frac{2a}{1} = \frac{-4}{1} = \frac{4a}{2}$$

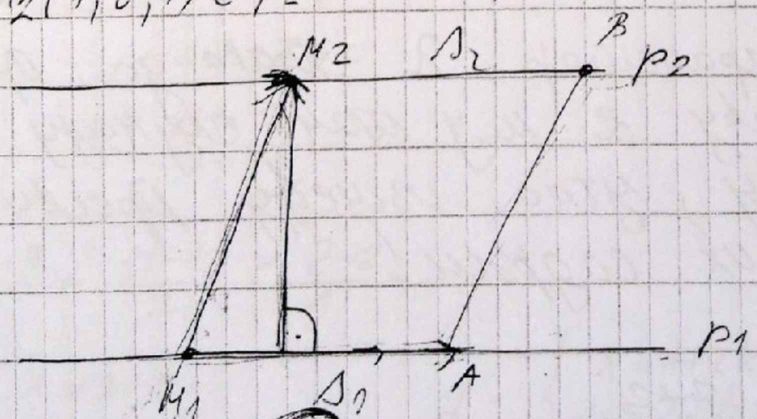
$$\boxed{a = -2}$$

$p_2 : \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-8}$

$p_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$

$M_1(0, 1, 0) \in p_1$?

$M_2(1, 0, 1) \in p_2$ →



$P = $

$A \in p_1$, $\vec{M_1A} = \vec{s_1}$

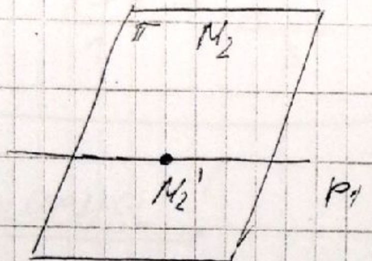
$d(p_1, p_2) = d(M_2, p_1) = h$, h – висина паралелограма M_1ABM_2 из темена M_2 на основу M_1A

Површина паралелограма

$$\left.\begin{aligned} P &= |\overrightarrow{M_1A} \times \overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{s_1} \times \overrightarrow{M_1M_2}| \\ P &= |\overrightarrow{M_1A}| \cdot h \quad = |\vec{s_1}| \cdot h \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = \frac{|\vec{s_1} \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s_1}|}.$$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\vec{s_1} \times \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s_1}|}$$

II начин да нађем $d(M_2, p_1)$



π – раван која садржи M_2 и ⊥ на p_1 $(\vec{n_\pi} = \lambda \cdot \vec{s_1})$

$p_1 \cap \pi = \{M_2'\}$, M_2' – ортогонална пројекција тачке M на p_1

$d(M_2, p_1) = d(M_2, M_2') = |\overrightarrow{M_2M_2'}|$, $q\ (M_2M_2')$ нормала из M_2 на p_1

3. Одредити параметар λ тако да права p сече праву q и у том случају наћи пресечну тачку, угао између правих и раван која их садржи!

$$p: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z+2}{1}$$

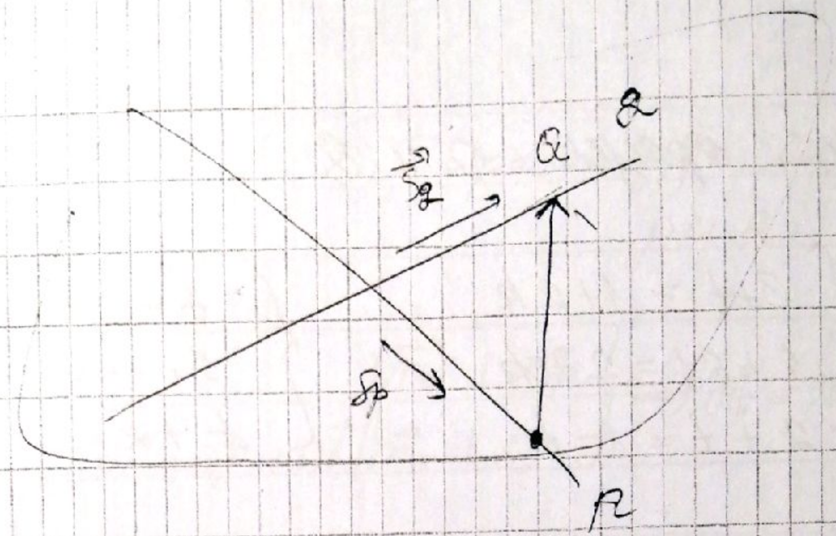
$$q: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

$\vec{s_p} = (1, \lambda, 1)$

$\vec{s_q} = (2, 1, -1)$

$P(3,1,2) \in p$

$Q(1,2,1) \in q$



Праве p и q се сијеку па су вектори $\vec{s_p}$, $\vec{s_q}$, $\vec{PQ}$ компланарни, тј. $(\vec{s_p} \times \vec{s_q}) \cdot \vec{PQ} = 0$ (*)

$\vec{PQ} = (-2, 1, 3)$

Из (*) слиједи:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3 + 2\lambda + 2 - (-2 - 1 + 6\lambda) = 0$$

$$-4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$p: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$

$p: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $\qquad q: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 1 - k \end{cases}$

Налично пресек p и q

$$\begin{cases} 3+t = 1+2k \\ 1+2t = 2+k \\ -2+t = 1-k \end{cases} \qquad \begin{cases} t-2t=-2 \\ 2t-k=1 \\ t+k=3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 3t &= 4 \\ t &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$k = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y = 1 + 2\cdot\frac{4}{3} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$z = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$x = 1 + 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

$$z = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$p \cap q = \{A\}$$

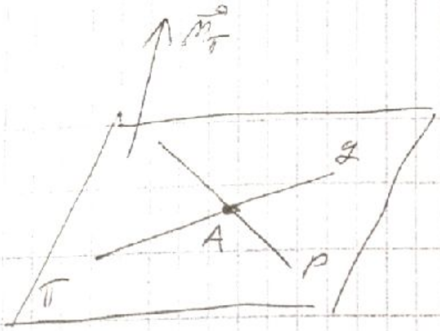
$$A\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

угао између

$$\alpha = \sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(\vec{s_p}, \vec{s_q})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{s_p}\cdot\vec{s_q}}{|\vec{s_p}|\,|\vec{s_q}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{2+2-1}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$



π – раван која садржи праве p и q

$$\vec{s_p} \times \vec{s_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\vec{i} - (-3)\vec{j} + (-3)\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n_\pi} \perp \vec{s_p} \\ \vec{n_\pi} \perp \vec{s_q} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{n_\pi} = \lambda(\vec{s_p} \times \vec{s_q})$$

$\vec{s_p} \times \vec{s_q} = (-3, 3, -3)$

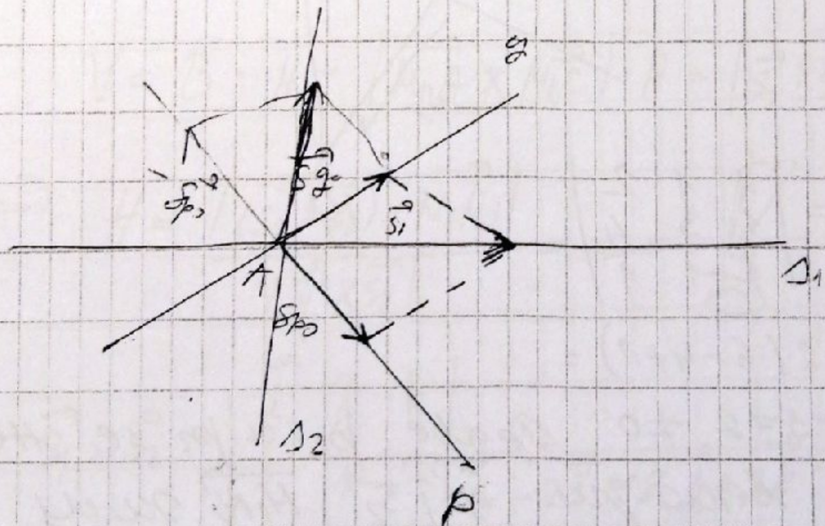
За $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$

$\boxed{\pi : P(3, 1, -2)}$, $\vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$

$\pi : 1(x-3) - 1\cdot(y-1) + 1\cdot(z+2) = 0$

$\pi : x - y + z = 0$

Напомена!



$$\vec{s_{p_0}} = \frac{1}{|\vec{s_p}|} \cdot \vec{s_p}$$

$$\vec{s_{q_0}} = \frac{1}{|\vec{s_q}|} \cdot \vec{s_q}$$

$$s_1 = \vec{s_{p_0}} + \vec{s_{q_0}}$$

$$s_2 = -\vec{s_{p_0}} + \vec{s_{q_0}}$$

4. Наћи најкраће растојање између правих

$p_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $p_2 = \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

Р.

$\vec{s_1} = (1,1,2)$

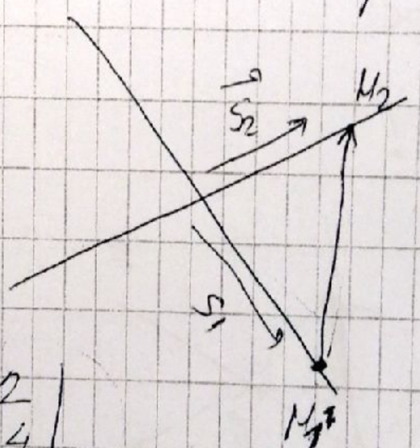
$\vec{s_2} = (1,3,4)$

$M_1(-1,0,1) \in p_1$

$M_2(0,-1,2) \in p_2$

1° $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{4}$ $\quad \vec{s_1} \neq \lambda \cdot \vec{s_2}$ $\quad \vec{s_1}$ и s_2 нису колинеарни па праве p_1 и p_2 нису паралелне.

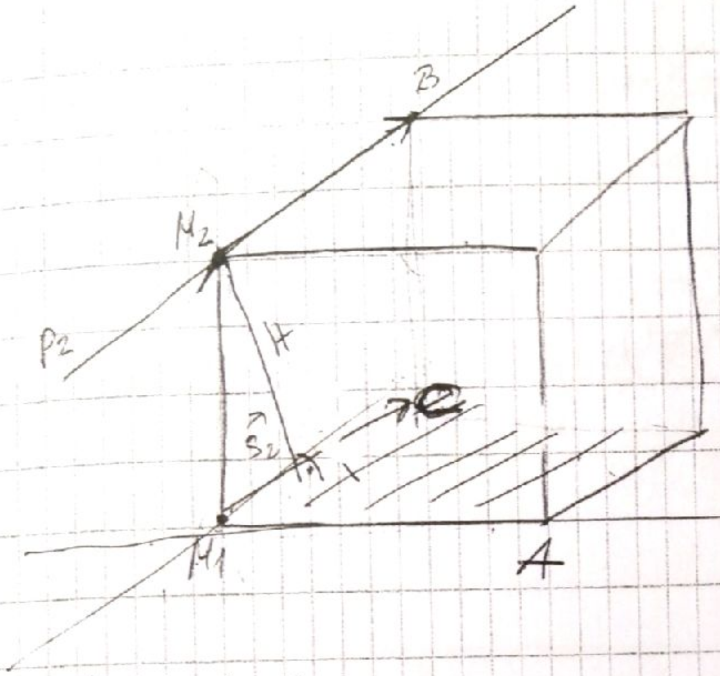
2°



$(\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3 + 4 - 2(6 - 4 + 1) =$

$= 5 - 3 = 2 \neq 0$ праве p_1 и p_2 се не секу јер вектори $\vec{s_1}, \vec{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ нису компленеарни.



$V = /$

$V = /\ AB \times$

$A \in p_1,\ \overrightarrow{M_1A} = \vec{s_1}$

$B \in p_2,\ \overrightarrow{M_1B} = \vec{s_2}$

$\overrightarrow{M_1C} = \vec{s_2}$

$d(p_1, p_2) = H$

H - дужина висине из тјемена M_2 на основицу M_1ADC.

$$\left.\begin{aligned} V &= \left|(\overrightarrow{M_1A} \times \overrightarrow{M_1C}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|(\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right| \\ V &= B \cdot H = \left|\overrightarrow{M_1A} \times \overrightarrow{M_1C}\right| \cdot H = \left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right| \cdot H \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\left|(\vec{s_1} \times \vec{s_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right|}$$

!

$$\vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2\vec{k}$$

$\vec{s_1} \times \vec{s_2} = (-2, -2, 2)$

$$H = \frac{|2|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

016

$\pi_1 : (M_1, \vec{s_1}, \vec{s_2})$

$\pi_2 : (M_2, \vec{s_1}, \vec{s_2})$

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1} \perp \vec{s_1} \\ \vec{n_1} \perp \vec{s_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n_1} = \lambda(\vec{s_1} \times \vec{s_2})$$

$$d(p_1, p_2) = d(M_2, \pi_1)$$

(5) Испитати узајамни положај праве и равни

$$p: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

$$\alpha: x+y+3z-7=0$$

$M(0,1,2 \in p)$

$\vec{s_p} = (-2,-1,1)$

$\vec{n_\alpha} = (1,1,3)$

1° $M \in \alpha$

$0+1+3\cdot 2-7=0$

$0=0$ ✓

$M \in \alpha$

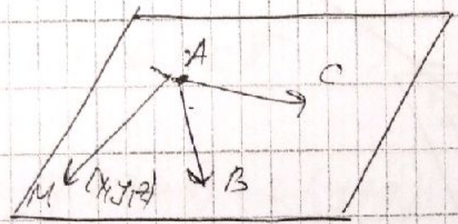
2° $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{s_p} = -2-1+3=0 \Rightarrow \vec{n_\alpha} \perp \vec{s_p}$

Из 1° и 2° слиједи да p лежи у равни α

6) Одредити (Испитати) међусобни положај праве p: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4}$ и равни α одређене тачкама

$A(0,0,1)$, $B(3,1,0)$, $C(3,2,2)$

одредити угао између праве и равни.
Наћи ортогоналну пројекцију праве p на раван α



$M(x,y,z)$ – произвољна тачка равни α
$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ су компланарни па је $(\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (*)
Из (*)

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x - 6y + 3(z-1) = 0 \quad \cdot \frac{1}{3}$$

$\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$
$P(1,-2,3) \in p$

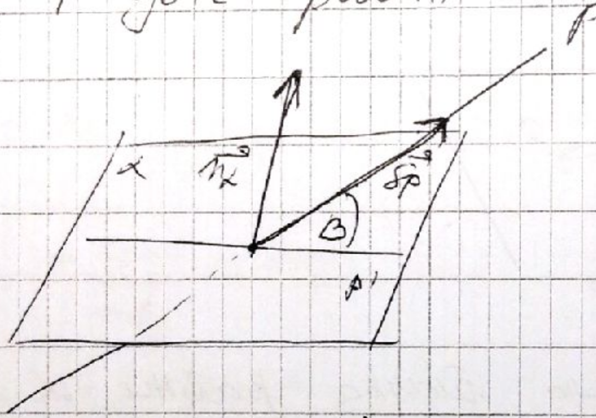
? $P \in \alpha$ $\quad 1 - 2\cdot(-2) + 3 - 1 = 0$
$1 + 4 + 3 - 1 = 7 \neq 0$

$P \notin$ равни α

p не лежи у равни α

$$\vec{s_p} = (2,-1,4)$$
$$\vec{n_\alpha} = (1,-2,1)$$
$$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{s_p} = 2+2+4 = 8 \neq 0 \Rightarrow \vec{n_\alpha} \text{ није ортогоналан на } \vec{s_p} \text{ па } p \text{ није } \parallel \text{ са } \alpha$$

Права p сече раван α.



$$\beta = \measuredangle(p, \alpha)$$
$$\beta = \measuredangle(p, p')$$

$$\sin\beta = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{s_p}}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{s_p}|}$$

$$\sin\beta = \frac{8}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+16}} = \frac{8}{\sqrt{6 \cdot 21}} = \frac{8}{3 \cdot \sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{3 \cdot 14}$$
$$= \frac{4\sqrt{14}}{21}$$

Π - раван која садржи праву p и $\perp$ на α

$\Pi \cap \alpha = p'$, p' - ортогонална пројекција праве p на раван α

$p \subset \pi \Rightarrow \vec{n_\pi} \perp \vec{s_p}$
$\pi \perp \alpha \Rightarrow \vec{n_\pi} \perp \vec{n_\alpha}$ $\Big\} \Rightarrow \vec{n_\pi} = \lambda(\vec{s_p} \times \vec{n_\alpha})$

$$\vec{s_p} \times \vec{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - (-2)\vec{j} + (-3)\vec{k}$$

$\vec{s_p} \times \vec{n_\alpha} = (7, 2, -3)$

За $\lambda = 1$, $\vec{n_\pi} = (7, 2, -3)$

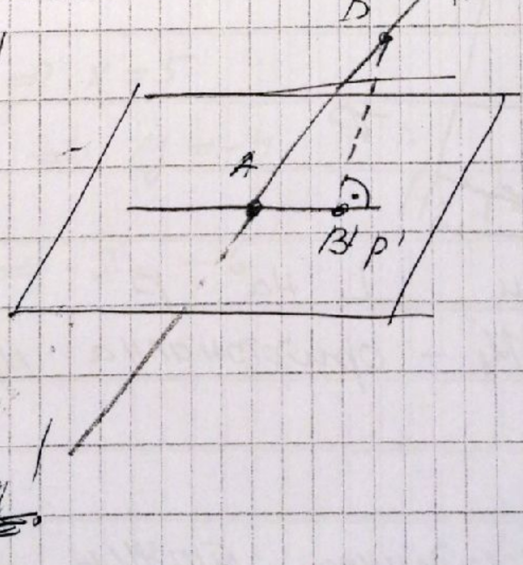
$P(1, -2, 3) \in p \subset \pi$

$\pi : 7(x-1) + 2(y+2) - 3(z-3) = 0$

$\pi : 7x + 2y - 3z + 6 = 0$

$p' : \begin{cases} \alpha : x - 2y + z - 1 = 0 \\ \pi : 7x + 2y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$ (Наћи канонску једначину)

Напомена!



$p'(A, B')$

Напомена!

$p \cap \alpha = \{A\}$

020

$$p: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \\ z = 3+4t \end{cases} \quad \alpha = 0$$

$$1+2t-2(-2-t)+3+4t-1=0$$

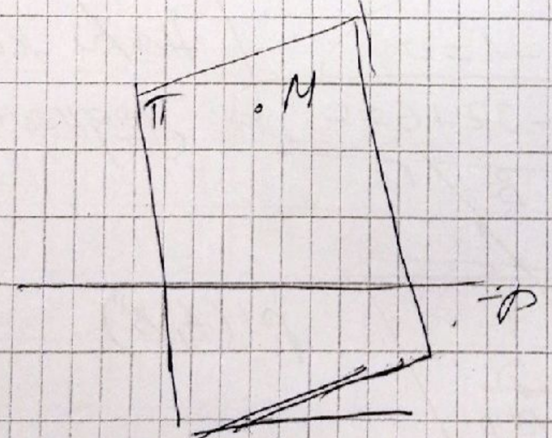
$$8t+7=0$$

$$t=-\frac{7}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \ldots \\ y &= \ldots \\ z &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{израчунај!}$$

(7) Наћи тачку симетричну тачки $M(4,2,8)$ у односу на праву $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

R:



π - садржи M и $\perp$ на p

$p \cap \pi = \{M_1\}$, M_1 - ортогонална пројекција M на p

M_2 - тачка симетрична тачки M_1 у односу на p M_1 је средина дужи MM_2

$p \perp \pi \Rightarrow \vec{n_\pi} = \lambda \cdot \vec{s_p}$, $\vec{s_p} = (2,-1,1)$

За $\lambda = 1$, $\vec{n_\pi} = (2,-1,1)$

$\pi: M(1,2,8)$, $\vec{n_\pi} = (2,-1,1)$

$2(x-1) - 1\cdot(y-2) + 1(z-8) = 0$

$\pi: 2x - y + z - 8 = 0$

Тражимо $p \cap \pi$

$$p: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$2(1+2t) - (-t) + t - 8 = 0$

$6t - 6 = 0$

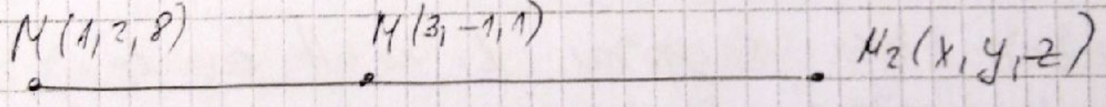
$\boxed{t = 1}$

$x = 1+2 = 3$

$y = -1$

$z = 1$

$M_1(3,-1,1)$



$3 = \frac{1+x}{2} \Rightarrow x = 5$

$-1 = \frac{2+y}{2} \Rightarrow y = -4$

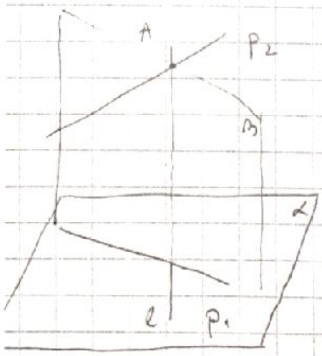
$1 = \frac{8+z}{2} \Rightarrow z = -6$

$M_2(5,-4,-6)$

5. Naći rastojanje i zajedničku normalu pravih $p_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$;

$p_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

I – način



α - ravan koja sadrži pravu p_1 i paralelna je pravoj p_2

β - ravan koja sadrži p_1 i ortogonalna je na ravan α

$p_2 \cap \beta = \{A\}$. $A \in$ normali l

$\vec{s}$ - vektor pravca prave l

$$\left.\begin{array}{l} l \perp p_1 \Rightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s} \\ l \perp p_2 \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{s}_2 \end{array}\right\} \vec{s} = \lambda(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)$$

$\vec{s}_1 = (1, 1, 2)$

$\vec{s}_2 = (1, 3, 4)$

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-2, -2, 2)$$

Za $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\vec{s} = (1, 1, -1)$

leži u ravni

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{s}_1 \\ p_2 \parallel \alpha \Rightarrow n_\alpha \perp s_2 \end{array}\right\} \vec{n}_\alpha = \lambda(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)$$

Uočimo da su $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{s}$ kolinearni. Za $\lambda = -\frac{1}{2}$ $n_\alpha = (1, 1, -1)$

Tačka $M_1(-1, 0, 1) \in p_1 \subset \alpha$

$\alpha: 1\cdot(x+1) + 1\cdot y - 1\cdot(z-1) = 0$

$\alpha: x + y - z + 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{s}_1 \\ \beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\beta = \lambda(\vec{s}_1 \times \vec{n}_\alpha)$$

$$\vec{s}_1 \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - (-3)\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (-3, 3, 0)$$

Za $\lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{n}_\beta = (1, -1, 0)$

$\beta: 1\cdot(x+1) - 1\cdot(y-0) + 0\cdot(z-1) = 0$

$\beta: x - y + 1 = 0$

Nađimo $p_2 \cap \beta$

$p_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1+3t \\ z = 2+4t \end{cases}$

$t - (-1+3t) + 1 = 0$

$-2t + 2 = 0$

$t = 1$

$x = 1$
$y = 2$
$z = 6$

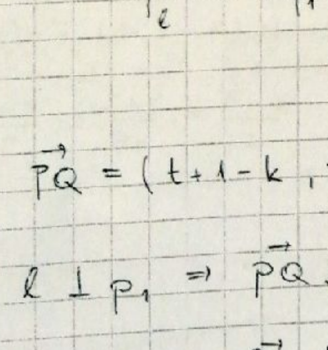
$A(1,2,6) \in \ell$

$\ell: A(1,2,6), \quad s = (1,1,-1)$

$\ell: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{-1}$

Udaljenost između pravih $\quad d(p_1, p_2) = d(A, \alpha) = \dfrac{|1+2-6+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

II način



$\vec{s} = \lambda(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)$

$\ell \cap p_1 = \{P\}$

$\ell \cap p_2 = \{Q\}$

$p_1: \begin{cases} x = -1+k \\ y = k \\ z = 1+2k \end{cases}$

$P(-1+k, k, 1+2k)$

$Q(t, -1+3t, 2+4t)$

$\vec{PQ} = (t+1-k, -1+3t-k, 1+4t-2k)$

$\ell \perp p_1 \Rightarrow \vec{PQ} \perp \vec{s}_1 \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{s}_1 = 0$

$\ell \perp p_2 \Rightarrow \vec{PQ} \perp \vec{s}_2 \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{s}_2 = 0$

$12t - 6k$

$1 \cdot (t+1-k) + 1 \cdot (-1+3t-k) + 2(1+4t-2k) = 0$

$1 \cdot (t+1-k) + 3 \cdot (-1+3t-k) + 4(1+4t-2k) = 0$

. . .

$t = 1 \quad , k = \frac{7}{3}$

$P\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$

$Q(1, 2, 6)$

$l: \dfrac{x-1}{\frac{4}{3}-1} = \dfrac{y-2}{\frac{7}{3}-2} = \dfrac{z-6}{\frac{17}{3}-6}$

$l: \dfrac{x-1}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y-2}{\frac{1}{3}} = \dfrac{z-6}{-\frac{1}{3}}$

$l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-6}{-1}$

1) Нађи једначину праве која садржи тачку $M(3,-2,-4)$, паралелна је са равни $\alpha: 3x-2y-3z-7=0$, а сече праву $l: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$

Р: a – тражена права

$\vec{S_a}$ – њен вектор правца

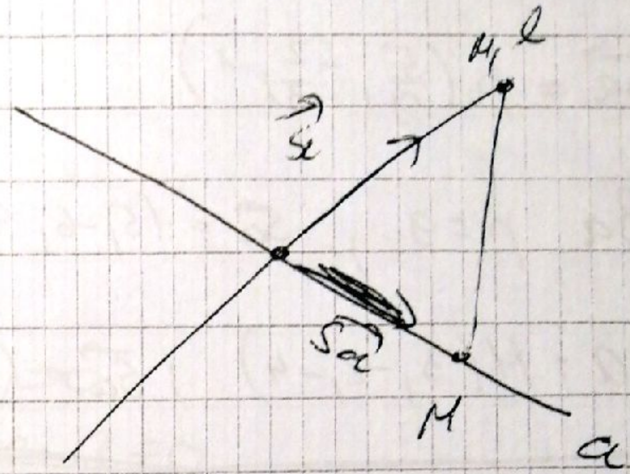
$\vec{S_a}\,(m, n, p)$

$\vec{n_\alpha}\,(3,-2,-3)$

$\vec{S_l}=(3,-2,2)$

$M_1(2,-4,1)\in l$

$a \parallel \alpha \Rightarrow \vec{s_a} \perp \vec{n_\alpha} \rightarrow \vec{s_a} \cdot n_\alpha = 0$



$3m - 2n - 3p = 0$

праве l и a се сијеку па су вектори $\vec{s_a}, \vec{s_l}$ и MM_1 компланарни. Одавде слиједи да је

$(\vec{s_a} \times \vec{s_l}) \cdot \vec{MM_1} = 0 \quad (*)$

$\vec{MM_1} = (-1, -2, 5)$

Из $(*)$ слиједи

$$\rightarrow \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$-6m - 17n - 8p = 0$

Добили смо систем

$$\begin{aligned} 3m - 2n - 3p &= 0 \\ -6m - 17n - 8p &= 0 \end{aligned} \Big\} \cdot 2$$

$$\begin{aligned} 3m - 2n - 3p &= 0 \\ -21n - 14p &= 0 \end{aligned}$$

$n = -\frac{2}{3}p \qquad m = \frac{2n + 3p}{3} = \frac{-\frac{4}{3}p + 3p}{3} = \frac{5}{9}p$

032

$\vec{s_a} = \left(\frac{5}{9}p, -\frac{2}{3}p, p\right)$

$\vec{s_a} = p\left(\frac{5}{9}, -\frac{2}{3}, 1\right)$

За $p=9$, $\vec{s_a} = (5, -6, 9)$

$a: M(3, -2, -4)$; $\vec{s_a} = (5, -6, 9)$

$$\boxed{a: \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}}$$

2 Наћи једначину равни која садржи праву $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$, а тачка $A(1, 2, -1)$ је од те равни удаљена $\frac{4}{3}$

$p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Раван π која садржи праву p припада прамену одређеном овом правом. Нађимо двије равни тог прамена и поставимо једначину прамена

$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1}$

$-x = 2y - 2$

$\alpha: \boxed{x + 2y - 2 = 0}$

$$\frac{x}{2} = \frac{z+1}{2}$$

$$2x = 2z + 2$$

$$\boxed{\beta : x - z - 1 = 0}$$

Єднанчинка праміна $\mathcal{J}e$

$$x + 2y - 2 + \lambda(x - z - 1) = 0$$

$$(1+\lambda)\cdot x + 2y - \lambda z - 2 - \lambda = 0$$

$$\vec{s_p} = (2, -1, 2) \qquad p \subset \pi \Rightarrow \vec{n_\pi} \perp \vec{s_p} \Rightarrow \vec{n_\pi} \cdot \vec{s_p} = 0$$

$$\vec{n_\pi} = (1+\lambda, 2, -\lambda)$$

$$2(1+\lambda) - 2 - 2\lambda = 0$$

$$\underline{\underline{0 = 0}}$$

$$d(A, \pi) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(1+\lambda)\cdot 1 + 2\cdot 2 - \lambda\cdot(-1) - 2 - \lambda}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 4 + \lambda^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 4 + \lambda^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2\lambda^2 + 2\lambda + 5}} = \frac{4}{3}$$

$$3|\lambda + 3| = 4\cdot\sqrt{2\lambda^2 + 2\lambda + 5} \quad /^2$$

$$9(\lambda + 3)^2 = 16(2\lambda^2 + 2\lambda + 5)$$

084

$23\lambda^2 - 22\lambda - 1 = 0$

$$\lambda_1/\lambda_2 = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 92}}{46}$$

$$\lambda_1/\lambda_2 = \frac{22 \pm 24}{46}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{23}$$

$\underline{\text{I} = \lambda = 1}$

$$\boxed{2x + 2y - z - 2 - 1 = 0}$$

$\underline{\text{II}}$ $\lambda = -\frac{1}{23}$

$$\left(1 - \frac{1}{23}\right)x + 2y + \frac{1}{23}z - 2 + \frac{1}{23} = 0 \ /23$$

$$\boxed{22x + 46y + z - 45 = 0}$$