# * Гранична вриједност функције *

$f: X \to Y \quad , X, Y \subseteq R$

Деф: Кажемо да је број $A$ гранична вриједност функције $f$ у тачки $x_0$ и пишемо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ако је функција $f$ дефинисана у некој околини тачке $x_0$ (са искључењем може бити саме тачке $x_0$) ако важи:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))(\forall x \in X)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Примјери

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 9)} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 2x + 3}{3x^4 + x^2 + x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^4}\left(2 + \cancel{\frac{1}{x^2}}^{0} + \cancel{\frac{2}{x^3}}^{0} + \cancel{\frac{3}{x^4}}^{0}\right)}{\cancel{x^4}\left(3 + \cancel{\frac{1}{x^2}}_{0} + \cancel{\frac{1}{x^3}}_{0} + \cancel{\frac{3}{x^4}}_{0}\right)} = \frac{\ }{3}$

0.5.0

③ $\lim_{x\to 0} \frac{x^7+x^6+3x^4}{x^6+x^5+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}(x^3+x^2+3)}{\cancel{x^4}(x^2+x+1)} = 3$

④ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x^3})}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}}{\cancel{x}}$

$= 1$

⑤ $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{5x^2-3}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(5-\frac{3}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\cdot\sqrt{5-\frac{3}{x^2}}}{x}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-\cancel{x}\cdot\sqrt{5-\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{5}$

⑥ $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

$\cdot \frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{6(4+4)} = -\frac{1}{16}$

⑦ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(8+x)}+4}{\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(8+x)}+4}$

$\lim_{x\to 0} = \frac{x(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(8+x)}+4)}{\cancel{8}+x-\cancel{8}} = 4+2\cdot 2+4 = 12$

⑧ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x}_{\mathrm{I}}+\underbrace{x-\sqrt{x^2-2x}}_{\mathrm{II}}\right)$

⑨ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot5=\left[\begin{array}{l}5x=t\\ x\to0\Rightarrow t\to0\end{array}\right]$

$=5\cdot\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=5\cdot1=5$

⑩ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)}\left[\begin{array}{l}x-2=t\\ x\to2\Rightarrow x\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

⑪ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin(\sqrt{x+1}-1)}{x}=2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-}{x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x+1}-1}}_{=1}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=$

$=2\cdot1\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x((\sqrt{x+1})}=2\cdot\frac{1}{2}=\underline{1}$

⑫ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2x}{\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot4x}=$

$=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}}=\frac{1}{2}\cdot\cancel{1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$3x^2+6x$

⑬ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1+1-e^{3x}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2\cancel{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3\cancel{x}=$

$2\cdot 1-3\cdot 1=-1$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{l}\arcsin x=t\\ \sin t=x\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}}=1$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\right)^2=$

$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

(16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{3}=t\\ x=\frac{\pi}{3}+t\\ x\to\frac{\pi}{3}\Rightarrow t\to 0\end{array}\right]=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos(\frac{\pi}{3}+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2(\frac{1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t)}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos t}{\sin t}+\sqrt{3}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{t^2}{\sin t}+\sqrt{3}}=$

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{\underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\frac{t}{\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\to 1}}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(17.) ! $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ ✓

(18.) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=$ ✓

$x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad x\to1\Rightarrow t\to1$

$x=t^6$

$t=\sqrt[6]{x}$ $\qquad x^{\frac{1}{2}}=t^3,\ x^{\frac{1}{3}}=t^2$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{3}{1-t^3}-\frac{2}{1-t^2}\right)=$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\frac{3}{(1-t)(1+t+t^2)}-\frac{2}{(1-t)(1+t)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{3(1+t)-2(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)}=\lim_{t\to1}\frac{-2t^2+t+1}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{-2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)}=\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot3}=\frac{1}{2}$$ ✓

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

054

(19) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}$$

$$= \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}-1\right)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{x-e} =$$

$$= \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}\cdot e} = \frac{1}{e}$$

(20) $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{5}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{10} \overset{(*)}{=} e^{10}$$ ✓

(*) $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = \left[\begin{array}{l}2x=t\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right] = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

(21) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+5^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+5^x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+5^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^x+5^x-2}\cdot\frac{2^x+5^x-2}{2}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{2x}}$$

(*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+5^x-2}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1+5^x-1}{x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\left(1+\frac{2^x+5^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^x+5^x-2}}}_{e}\right)^{\frac{2^x+5^x-2}{2x}}$$

$\frac{1}{2}\ln 10$

$= \frac{1}{2}(\ln 2+\ln 5) = \frac{1}{2}\ln 10 = \underline{\ln\sqrt{10}}$ R: $\sqrt{10}$

22! Не користећи Лопиталово правило израчунати граничну вриједност

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\ln(\sin x+e^x)+\ln(\cos x)}{x^2+tg^2x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot\ln(\sin x+e^x)+\ln(\cos x)}{x^2}}{\frac{x^2+tg^2x}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(\sin x+e^x)}{x}+\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}{1+\frac{tg^2x}{x^2}} = \frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$1^\circ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin(x+e^x)}{x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x+e^x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin x+e^x-1)}{\sin x+e^x-1}\cdot(\sin x+e^x-1)}{x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x+e^x-1)}{\sin x+e^x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^x-1}{x} =$$

$1.\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{e^{x}-1}{x}\right)=1+1=2$

$2^\circ\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\left(-\lim\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=$

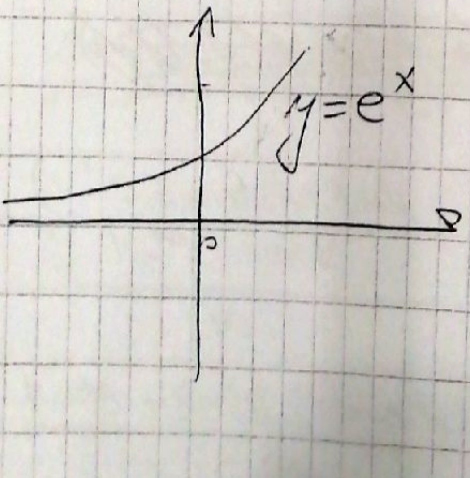
$=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

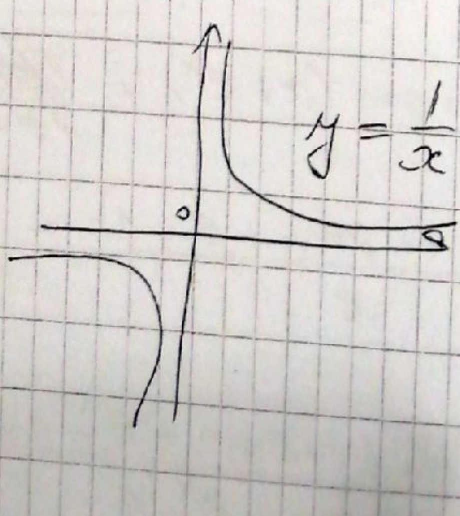
$3^\circ\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2x}=1$

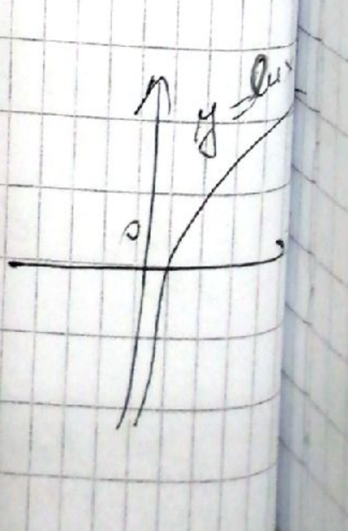
## * Непрекидност функције *

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$



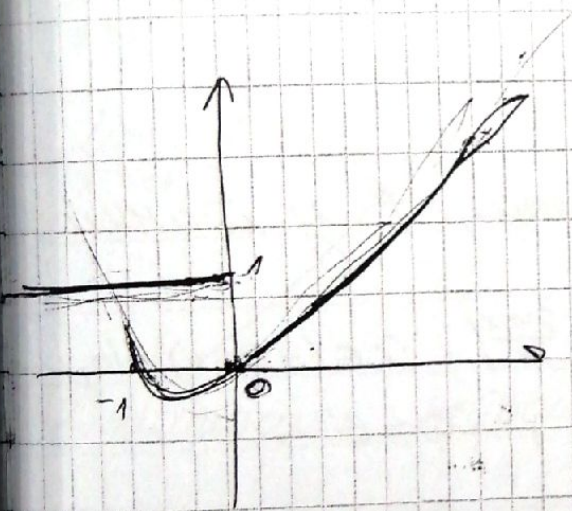



$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \left[\begin{array}{l} x-3=t \\ x\to 3^+ \Rightarrow t \to 0^+ \end{array}\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

11) Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0] \\ x^2+x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$




На интервалу $(-\infty, 0)$ функција је непрекидна јер се поклапа са константом, а на интервалу $(0, +\infty)$ је непрекидна јер је еквивалентна полиному.

Испитајмо непрекидност у граничној тачки интервала дефинисаности.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$f(0)=1$ $\Longrightarrow$ $\lim f(x) \neq \lim f(x)$ у тачки $x=0$ функција има непотклоњив прекид прве врсте

(1°) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$, прекид прве врсте који је отклоњив

(2°) $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, и $x = x_0$ $f$ има неотклоњив прекид прве врсте

(3°) не постоји $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ или не постоји $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ $\Big\}$ и $x = x_0$ $f$ има прекид II врсте.

(1) Испитати непрекидност функције $f$ у тачки $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Напомена: На интервалу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ функција је непрекидна као композиција у области дефинисаности.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\sin x|}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow$ функција $f$ је непрекидна у тачки $x=0$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = +1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow$ функција $f$ у тачки $x_0=0$ има неотклоњив прекид I врсте

(2) Испитати непрекидност функције

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\ 0, & x=0 \vee x=1 \end{cases} =$

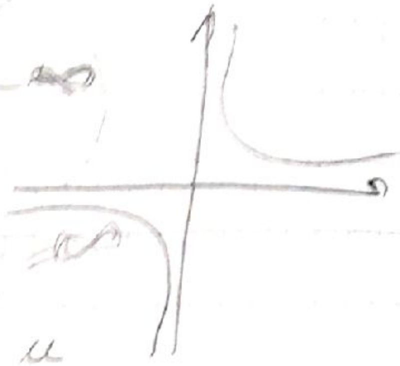
$\begin{cases} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x=0 \vee x=1 \end{cases}$

Функција $f$ је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1+$ као композиција непрекидних у области дефинисања.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = -\infty$

$\frac{x}{1-x} \to 0^+$, $1-e^{\frac{x}{1-x}} \to 0^-$

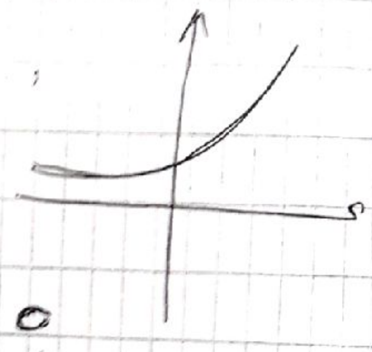
$\dfrac{1}{1-1}$ $\quad \dfrac{1}{0^-} = -\infty$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ funkcija u tački $x=0$ ima prekid druge vrste

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = 1$

$\frac{x}{1-x} \to -\infty$, $e^{\frac{x}{1-x}} \to 0^+$, $1-e^{\frac{x}{1-x}} \to 1$



$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = 0$

$\frac{x}{1-x} \to +\infty$, $e^{\frac{x}{1-x}} \to +\infty$, $1-e^{\frac{x}{1-x}} \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$ функција $f$ у тачки $x=1$ има неотклоњиви прекид прве врсте

3.) Додефинисати функцију $f(x) = \dfrac{3x-3}{\sqrt{2x+7}-3}$ тако да буде непрекидна у тачки $x_0=1$.

R: Функција $f$ ће бити непрекидна у $x_0=1$ ако важи.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{\sqrt{2x+7}-3} \cdot \frac{\sqrt{2x+7}+3}{\sqrt{2x+7}+3} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{2(x-1)} = \frac{3\cdot 6}{2} = 9$$

Функцију додефинишемо тако што ће бити $f(1)=9$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-3}{\sqrt{2x+7}-3}, & x \neq 1 \\ 9, & x = 1 \end{cases}$$

4) Одредити параметре $a$ и $b$ тако да функција буде непрекидна на $\mathbb{R}$:

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\arcsin x}, & x > 0 \\ b\cdot\dfrac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$(0,\infty)$

$(0,\infty)$

На интервалима од $(0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$ функција је непрекидна као композиција непрекидних у области дефинисаности. Да би функција $f$ била непрекидна у $x_0=0$ потребно је довољно да важи:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x) = f(0) \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}-1}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot \sin x}{\frac{\arcsin x}{x}\cdot x}$$

$$= \frac{\lim \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} = b\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot \cancel{x^2}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot \cancel{x^2}}$$

$$= b\cdot \frac{1}{2}$$

$f(0)=a$

Из (*) следи $1 = b\cdot\frac{1}{2} = a$

$a = 1$

$b = 2$

б) (додефинисати ~~и одредити~~) функцију и одредити параметар $a$ тако да функ- буде непрекидна.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cdot \ln(1+3x)}{2^{\operatorname{tg} x}-1}, & x>0 \quad (+\infty, 0) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-1}{x\left(\sqrt{1+2\sin x}-1\right)}, & x<0 \quad (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \qquad \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{x}{1}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \cdot \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad a \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{2^{tg x}-1} =$$

$$= a \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3x}{\frac{2^{tg x}-1}{tg x} \cdot tg x} = \frac{a \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{tg x}-1}{tg x}}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{tg x} =$$

$$= 3a \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{3a}{\ln 2} \checkmark$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+tg^2 x}-1}{x(\sqrt{1+2\sin x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{1+tg^2 x}+1}{\sqrt{1+tg^2 x}+1} \cdot \frac{\sqrt{1+2\sin x}+1}{\sqrt{1+2\sin x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{tg^2 x\,(\sqrt{1+2\sin x}+1)}{x\,(2\sin x)\cdot(\sqrt{1+tg^2 x}+1)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\sin x}^{1}\,(\sqrt{1+2\sin x}+1)}{x \cos^2 x \cdot (\sqrt{1+tg^2 x}+1)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

# Изводи

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta k) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ , десни извод функције f у тачки $x_0$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ лијеви извод функције f у тачки $x_0$

Функција $f$ је диференцијабилна у тачки $x = x_0$ акко $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

**Примјери**

Наћи по дефиницији извод функције

$y = \sqrt{1+2x}$

$x_0$ - произвољно $x_0 \in R$ произвољно

$f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} - \sqrt{1+2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} - \sqrt{1+2x_0}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} + \sqrt{1+2x_0}}{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} + \sqrt{1+2x_0}} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+2x_0+2\Delta x - 1 - 2x_0}{\Delta x\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} + \sqrt{1+2x_0}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)} + \sqrt{1+2x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}},$$ $1+2x_0 > 0$, $x_0 > -\frac{1}{2}$

Дакле $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x > -\frac{1}{2}$

(2) Испитати диференцијабилност функције

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x-2)^2}$ у тачки $x=2$

$f(x) = \frac{1}{2}\, |x-2|$

$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}|2+\Delta x-2| - 0}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}$

$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}|\Delta x|}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(-\Delta x)}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$

$f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow$ функција није диференцијабилна у тачки $x=2$

(3) Одредити параметре $a$ и $b$ тако да функција $f$ буде диференцијабилна на $R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ ax+b, & x < 1 \end{cases}$$

Напомена!

диференцијабилност $\Rightarrow$ непрекидност

непрекидност $\not\Rightarrow$ диференцијабилност

На интервалима $(1,+\infty)$ и $(-\infty,1)$ функција се поклапа са полиномима, а они диференцијабилне функције на R. Да би функција била диференцијабилна у тачки $x=1$, потребно је (али не и довољно) да у $x=1$ функција буде непрекидна тј. важи:

а) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ (*)

б) потребно је и довољно да важи

$$f'_+(1) = f'_-(1) \qquad (**)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Из (*) следи $a+b=1$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x\,(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x}$$

078

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{a + a\cdot\Delta x + b - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{a\cdot\Delta x}{\Delta x} = a$$

Из $(**)$ слиједи $a = 2$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=-1 \\ a=2 \end{matrix}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$$

4) Одредити параметре $a$ и $b \in R$ такве да функција $f(x) = \begin{cases} x + a^2; & x < 0 \\ a\cdot\cos x + b\sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ буде диференцијабилна у тачки $x=0$

Р:

1° Функција у тачки $x=0$ мора бити непрекидна

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

2° $f'_+(0) = f'_-(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a\cos x + b\sin x) = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + a^2) = a^2$$

$$f(0)\ a\cdot\cos 0 + b\sin 0 = a$$

Из $1^\circ$ следи $\quad a^2 = a$

$$a^2 - a = 0$$
$$a(a-1) = 0$$
$$a = 0 \ \vee \ a = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{a \cdot \cos\Delta x + b\sin\Delta x - a}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} -a \cdot \frac{1-\cos\cancel{\Delta x}}{\frac{1}{2}\cancel{\Delta x}^2} \cdot \underset{\downarrow\, 0^+}{\Delta x} + b \cdot \lim_{\Delta x \to 0^+} \underset{\to 1}{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}} = b$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x + \overset{0}{(a^2 - a)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x + a^2 - a}{\Delta x} = 1$$

Из $2^\circ$ следи да мора бити $b = 1$

$\underline{I}$ $\quad a = 0$, $\quad b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ b\sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$\underline{II}$ $\quad a = 1$, $\quad b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \cos x + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

080

# ТАБЛИЦА ИЗВОДА

1°) $(c)' = 0$

2°) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

3°) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

5°) $(e^x)' = e^x$

5°) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

6°) $(\sin x)' = \cos x$

7°) $(\cos x)' = -\sin x$

8°) $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9°) $(ctg x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

10°) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

11°) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

12°) $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13°) $(arcctg x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

14°) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Особине

1°) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

2°) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$

$y = f(u), \quad u = g(x)$

$y'_x = f'_u \cdot u'_x$ – извод сложене функције

Пример: $f(x) = (x^2+3x)^2 = 2(x^2+3x) \cdot (x^2+3x)' =$
$= 2(x^2+3x) \cdot (2x+3)$

1) Наћи први извод функције

а) $y = 4 \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$$y = 4 \cdot x^{3+\frac{3}{2}} = 4 \cdot x^{\frac{9}{2}}$$

$$y' = \cancel{4} \cdot \frac{9}{\cancel{2}} x^{\frac{9}{2}-1} = 18 \cdot x^{\frac{7}{2}}$$

$$\boxed{y' = 18\sqrt{x^7}}$$

б) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

?

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{x})^2}$$

в) $y = \cos(3 \cdot 2^{x^2})$

$$y' = -\sin(3 \cdot 2^{x^2}) \cdot (3 \cdot 2^{x^2})' = -\sin(3 \cdot 2^{x^2}) \cdot 3 \cdot 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x$$

г) $y = \sqrt[3]{5+7x^2}$

$$y = (5+7x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(5+7x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (14x)$$

$$\boxed{y' = \frac{14x}{3\sqrt[3]{(5+7x^2)^2}}}$$

082

д) $y = \sqrt{ctg x}$

$$y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{ctg x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}$$

е) $y = \ln^2(3-4x^5)$

$y = (\ln(3-4x^5))^2$

$$y' = 2\cdot\ln(3-4x^5)\cdot\frac{1}{3-4x^5}\cdot(-20x^4)$$

ж) $y = e^{\sin x^3}$

$$y' = e^{\sin x^3}\cdot\cos x^3\cdot 3x^2$$

з) $y = \sin^4(3^{5x})$

$y = (\sin(3^{5x}))^4$

$$y' = 4\cdot\sin(3^{5x})^3\cdot\cos(3^{5x})\cdot 3^{5x}\cdot\ln 3\cdot 5$$

и) $y = e^{x\cdot\ln(x+2)}$

$$y' = e^{x\cdot\ln(x+2)}\cdot\left(\ln(x+2) + x\cdot\frac{1}{x+2}\cdot 1\right)$$

й) $y = arctg\, e^{2x}$

$$y' = \frac{1}{1+(e^{2x})^2}\cdot e^{2x}\cdot 2$$

к) $y = \sin^5 \ln \sqrt[3]{a^{5x}}$

$$y' = 5\left(\sin^4\left(\ln\left(\sqrt[3]{a^{5x}}\right)\right)\right) \cdot \cos\left(\ln \sqrt[3]{a^{5x}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^{5x}}} \cdot \frac{1}{3}\left(a^{5x}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\cdot\ a^{5x} \cdot \ln a \cdot 5$$

л) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

$$y' = a^a \cdot x^{a^a - 1} + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a \cdot x^{a-1} + a^{a^x} \cdot \ln a \cdot a^x \cdot \ln a$$

② Нађи $y'$

а)

$y = x^x$ - логаритамски извод

$y = x^x$ $/\ln$

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$ $/'$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 + \ln x$

$y' = y(1 + \ln x)$

$$\boxed{y' = x^x(1 + \ln x)}$$

б)

$y = \sin x^{\cos x}$ $/\ln$

$\ln y = \ln \sin x^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x)$ $/'$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

084

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

$$y' = \sin x^{\cos x}\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\cdot\ln(\sin x)\right)$$

③ Наћи $y'$ ако је функција задата имплицитном једначином са:

а) $3x^2\cdot y^3 - 5xy^2 = y$

$$6x\cdot y^3 + 3x^2\cdot 3y^2\cdot y' - 5y^2 - 5x\cdot 2yy' = y'$$

$$y'(9x^2y^2 - 10xy - 1) = 5y^2 - 6xy^3$$

$$\boxed{y' = \frac{5y^2 - 6xy^3}{9x^2y^2 - 10xy - 1}}$$

б) $x\cdot y + y^3 = 1$

$y'(0) = ?$

$x\cdot y + y^3 = 1 \quad /'$

$y + xy' + 3y^2\cdot y' = 0$

$y'(x + 3y^2) = -y$

$$y' = \frac{-y}{x + 3y^2}$$

$$\boxed{y'(x_0) = \frac{-y_0}{x_0 + 3y_0^2},\ y_0 = f(x_0)}$$

$x_0 = 0$

$y_0 = f(0)$

$0 \cdot y + y_0^3 = 1$

$y^3 = 1$

$\boxed{y_0 = 1}$

$y'(0) = \frac{-1}{0+3\cdot 1^2} = -\frac{1}{3}$

6) $xy - \sqrt{xy^2+6} = 0$ и наћи $y'(3)$ за $y_0 > 0$

$$y' = \frac{y(y - 2\sqrt{xy^2+6})}{2x\cdot(\sqrt{xy^2+6} - y)}$$

Из једначине за $x_0 = 3$ добијамо

$3y_0 - \sqrt{3y_0^2+6} = 0 /^2$

$9y_0^2 - 3y_0^2 + 6 = 0$

$9y_0^2 = 3y_0^2 + 6$

$6y_0^2 = 6$

$y_0^2 = 1$

$y_0 = 1 (> 0)$

$$y'(3) = \frac{1\cdot(1-2\cdot\sqrt{3\cdot 1^2+6})}{2\cdot 3(\sqrt{3\cdot 1^2+6} - 1)}$$

$y'(3) = -\frac{5}{12}$

7) Функција $y$ је дефинисана са

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

Доказати да је функција задовољава једначину $y'\cdot(x-y) = x+y$

086

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\ /'$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy')$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'\cdot x-y\cdot 1}{x^2}=\frac{x+y'\cdot y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y'\cdot x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+y'\cdot y}{x^2+y^2}$$

$$y'\cdot x-y=x+y'\cdot y$$

$$(x-y)\cdot y'=x+y$$

а) Наћи $y'$ за $y$ која је задата параметарским једначинама,

$y(x)$

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

Ако је $x = f(t)$

$y = g(t)$

$$y'_x = \frac{g'_t}{f'_t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_x = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t}$$

$$y'_x = \frac{2t(1+3t)}{2(1+3t)}$$

$$y'_x = t$$

Напомена!

Наћи $y'(1)$

$$1 = 2t + 3t^2$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \quad \boxed{t_1 = -1} \quad t_2 = \frac{1}{3}$$

$$2t^3 + t^2 = 1$$

б) Показати да $y$ задовољава једначину

$$2y'^3 + y'^2 - y = 0$$

$$2 \cdot t^3 + t^2 - t^2 - 2t^3 = 0$$

$$0 = 0$$

17.09.2019