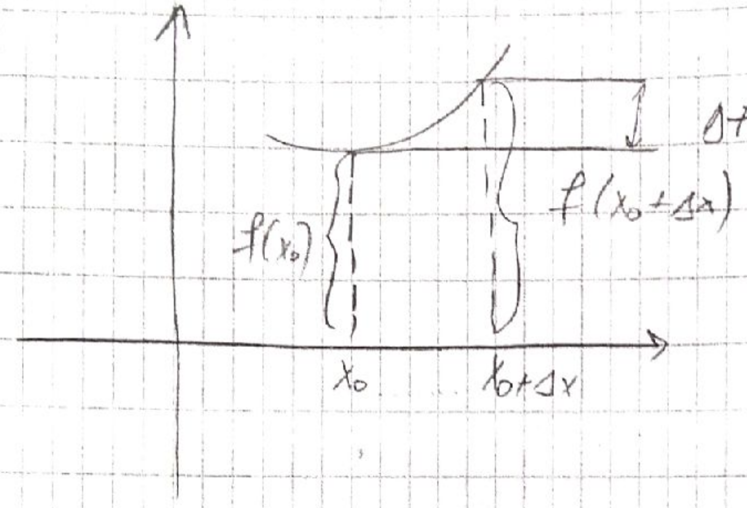
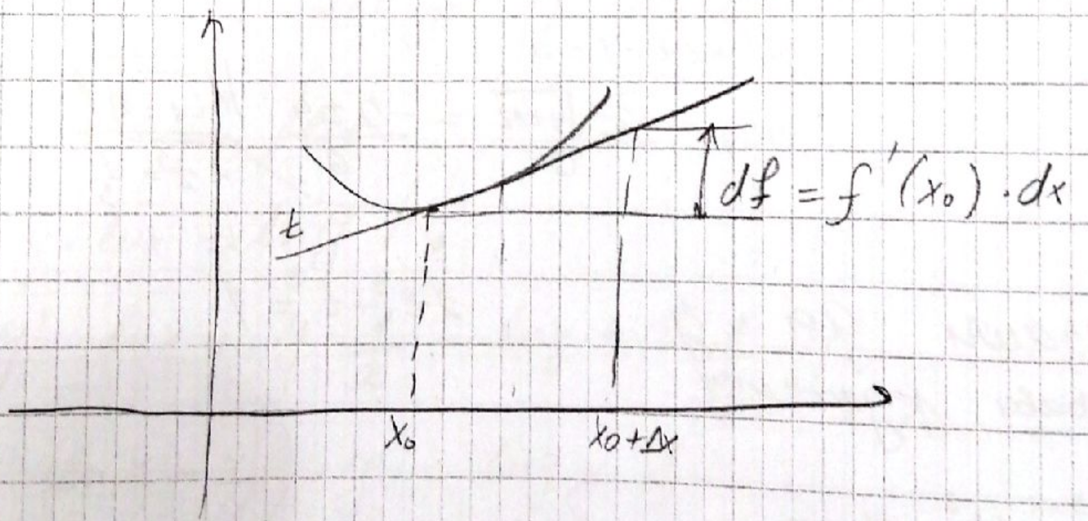
Диференцијал и његова примена





$$\Delta f \doteq df$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\cdot dx$$

1) Наћи dy ако је

$$y = 2^x + 3^{-x} - \sqrt{x}$$

$$dy = \left(2^x \cdot \ln + 3^{-x} \cdot \ln 3\,(-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot dx$$

$y = \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$

$dy = \left(\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot \left(-\sin\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot dx$

$dy = \left(tg\,\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$

$dy = \frac{1}{x^2}\left(tg\,\frac{1}{x} + 1\right) \cdot dx$

② Применом диференцијала приближно израчунати

$\sqrt{\frac{2{,}037^2 - 1}{2{,}037^2 + 1}}$

Нека је $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

Требало би да израчунамо $f(2{,}037)$

Нека је $x_0 = 2$
$\Delta x = 0{,}037$

Треба да израчунамо $f(x_0 + \Delta x)$

$\Delta f \approx df$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,dx$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx$

$f(2{,}037) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}037$

0090

$f(2) = \sqrt{\frac{2^2-1}{2^2+1}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{4}{25}$

$f(2{,}037) \approx \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{4}{25} \cdot 0{,}037$

③ Приближно израчунати $\sqrt[3]{2{,}97}$

Р: Нека је $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Требало би израчунати $f(2{,}97)$

Нека је $x_0 = 3$

$\Delta x = -0{,}03$

Требало би израчунати $f(x_0 + \Delta x)$

$f(x_0 + x\Delta) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx$

$f(2{,}97) \approx f(3) + f'(3) \cdot (-0{,}03)$

$f(3) = \sqrt[3]{3}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. $f'(3) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$f(2{,}97) \approx \sqrt[3]{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot (-0{,}03)$

$\sqrt[3]{2{,}97} \approx \sqrt[3]{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9}} (-0{,}03$

– Изводи виших реда – вјежбе

① Наћи y'', y''', y^{IV} за $y = x \cdot \ln x$

Р/ $y = x \cdot \ln x$

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$

$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$y^{IV} = (y''')' = \frac{2}{x^3}$

② Наћи n-ти извод

а) $y = x^n$

$y' = n \cdot x^{n-1}$

$y'' = n(n-1)\, x^{n-2}$

$$y''' = n(n-1)(n-2)\cdot x^{n-3}$$

$\vdots$

$$y^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-(k-1)\,x^{n-k}$$

$$y^{(n)} = n(n-1)\ldots(n-(n-1))\cdot x^{0}$$

$$y^{(n)} = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

$$y^{(k)} = 0, \quad \forall k > n$$

б) $y = \frac{1}{1+x}$

$$y' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y'' = \frac{-6}{(1+x)}$$

$\vdots$

Уочимо да је

$$y^{n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Доказује се математичком индукцијом!

③ Дате су функције:
а) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$
б) $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \neq 1$
Одредити $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$

Р: а) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$
$\underline{\underline{f(0) = 1}}$

$f'(x) = 24x^3 + 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'(0) = 5$
$f''(x) = 72x^2 + 12x - 6 \qquad f''(0) = -6$
$f'''(x) = 144x + 12 \qquad f'''(0) = 12$

б) $f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2}{(1-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{-6}{(1-x)^4} \cdot (-1) = \frac{6}{(1-x)^4}, \qquad f'''(0) = 6$

④ ~~Наћи~~ Одредити први и други извод за функцију $x^3 - y^3 = 2$, гдје је $y = f(x)$, у задато имплицитном једначином. Наћи y' у тачки 1 и y'' у тачки 1.

$x^3 - y^3 = 2 \, /'$
$3x^2 - 3y^2 \cdot y' = 0$

10.9.4

$x^2 - y^2 \cdot y' = 0$

$y' = \frac{x^2}{y^2}$ $\qquad y'(x_0) = \frac{x_0^2}{y^2}$, $y_0 = f(x_0)$

$y'(1) = \frac{1^2}{(-1)^2} = 1$ $\qquad x = 1 \Rightarrow 1^3 - y^3 = 2$

$y^3 = -1$

$y = -1$

$y' = \frac{x^2}{y^2}$

$y'' = \frac{2x \cdot y^2 - x^2 \cdot 2yy'}{y^4}$

$y'' = \frac{2xy - 2x^2y'}{y^3}$

$= 2 \cdot \frac{xy - x^2 \cdot \frac{x^2}{y^2}}{y^3} = 2 \cdot \frac{xy^3 - x^4}{y^5}$

$y''(1) = \frac{2 \cdot 1(-1)^3 - 1^4}{(-1)^5} = 2 \cdot \frac{-1-1}{-1} = 4$

(5.) Naći $\frac{d^2y}{dx^2}$ za $y = f(x)$ ako je $e^y = x + y$

R

$dy = y' \cdot dx$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n$

$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y''x$

$e^y = x+y \ /'$

$e^y \cdot y' = 1 + y'$

$y' = \frac{1}{e^y - 1}$

$$\boxed{y'' = -\frac{1}{(e^y-1)^2} \cdot e^y}$$

(67) Наћи $\frac{d^2y}{dx^2}$ за следеће функције:

а) $\operatorname{arctg} y = y - x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$\operatorname{arctg} y = y - x \ /'$

$\frac{1}{1+y^2} \cdot y' = y' - 1$

$y' = (1+y^2)y' - 1 - y^2$

$y^2 \cdot y' - 1 - y^2 = 0$

$y' = \frac{1+y^2}{y^2}$

$y' = 1 + \frac{1}{y^2}$

$y'' = \frac{-2}{y^3} \cdot y' = \frac{-2}{y^3} \cdot \frac{1+y^2}{y^2} = -2 \cdot \frac{1+y^2}{y^5}$

б) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ $\quad \underline{M(0,-2)}$

Р: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

$y'_x = \dfrac{3-3t^2}{2-2t} = \dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \dfrac{3}{2}(1+t)$, $t=2$

$y'_x(1) = \frac{3}{2}(1+2) = \frac{9}{2}$

$y''_x = (y'_x)'_x = \left(\dfrac{3}{2}(1+t)\right)'_x = \left(\dfrac{3}{2}(1+t)\right)'_t \cdot \underline{\underline{t'_x}} =$

$= \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{\underline{x'_t}} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2-2t} = \dfrac{3}{4(1-t)}$

4) Ако је $x = x(y)$ инверзна функција функције $y = y(x)$, доказати да је

$$\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{d^3x}{dy^3} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

Р: $\dfrac{dy}{dx} = y'_x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = y''_x$

$\dfrac{d^3y}{dx^3} = y'''_x$

$\dfrac{dx}{dy} = x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

$\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right) = (x'_y)' =$

$= \left(\dfrac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\dfrac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y =$

$= (-1 \cdot y'^{-2} \, y'') \cdot \dfrac{1}{y'_x} = -\dfrac{y''}{y'^3}$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = x'''_y = (x''_y)'_y = \left(\frac{-y''}{y'^3}\right)'_y = \left(-\frac{y''}{y'^3}\right)'_x \cdot x'_y =$$

$$= -\frac{y'''\cdot y'^3 - y''\cdot 3y'^2\cdot y''}{y'^6}\cdot\frac{1}{y'} =$$

$$= \frac{y'^2\cdot(3y''^2 - y'\cdot y''')}{y'^7} = \frac{3y''^2 - y'\cdot y'''}{y'^5} =$$

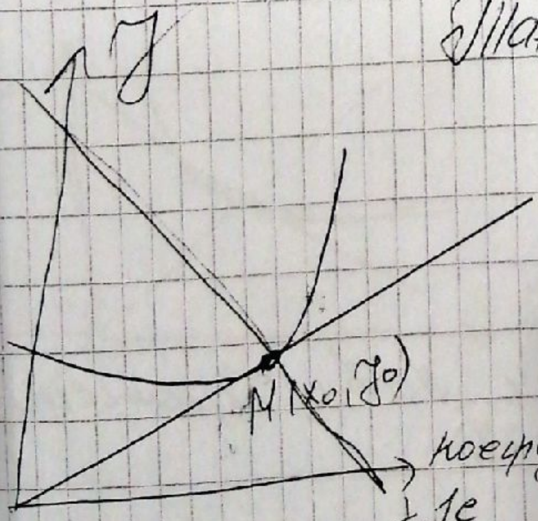
$$= 3\frac{y''^2}{y'^5} - \frac{y'''}{y'^4}$$

$$y'''\cdot\frac{1}{y'^2} + 3\cdot\frac{y''^2}{y'^5} - \frac{y'''}{y'^4}\cdot y'^2 + 3\cdot y''\cdot\left(-\frac{y''}{y'^3}\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{y'''}{y'^2}} + \cancel{3\cdot\frac{y''^2}{y'^3}} - \cancel{\frac{y'''}{y'^2}} - \cancel{\frac{3\cdot y''^2}{y'^3}} = 0$$

$$\underline{\underline{0=0}}\ ✓$$

Тангенте и нормале



$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y_0 = f(x_0)$

коефицијент правца тангенте је $k_t = f'(x_0)$

$tg\alpha = k_t$

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Коефицијент правца нормале је $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$

① Пример

Нека је $y = x^2$ Одредити једначину тангенте и нормале у тачки $M(2,4)$

$$t: y - 4 = f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(2) = 4$$

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$t: y = 4x - 4$$

$$n: y - 4 = \frac{1}{f'(2)}(x - 2)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$n: y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

② На кривој $y = x^2 + 3x - 4$ наћи тангенту паралелну правој $y = 3x - 3$

Нека је тангента постављена у тачки $M(x_0, y_0)$, $(y_0 = f(x_0))$

Коефицијент правца тангенте је $k_t = f'(x_0)$.
Коефицијент правца дате праве је $k_\ell = 3$

$t \parallel \ell \Rightarrow k_t = k_\ell$

$f'(x_0) = 3$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(x_0) = 3 \Rightarrow 2x_0 + 3 = 3$

$2x_0 = 0$

$\boxed{x_0 = 0}$

$y_0 = f(x_0) = f(0) = -4$

$M(0,-4)$

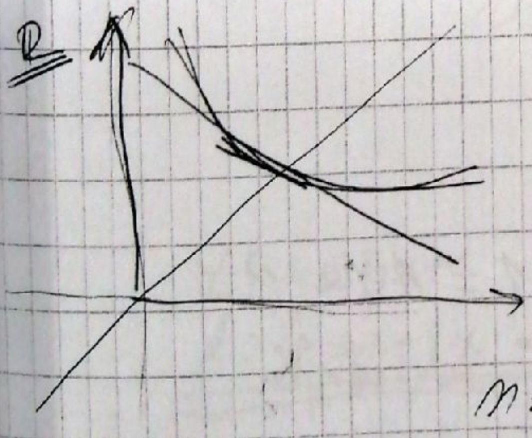
Једначина тангенте у $M(0,-4)$

$y - (-4) = 3 \cdot (x - 0)$

$t: y = 3x - 4$

③ Написати једначину нормале графика функције $y = \frac{2}{x^2+1}$ која пролази кроз координатни почетак.

R



Ако је нормала постављена у тачки $M(x_0, y_0)$ $(y_0 = f(x_0))$
Једначина нормале је

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

13:31

$$f'(x) = \frac{-2}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{-4x_0}{(x_0^2+1)^2}$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{2}{x_0^2+1}$$

$$n: y - \frac{2}{x_0^2+1} = \frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$O(0,0) \Longrightarrow -\frac{2}{x_0^2+1} = -\frac{(x_0^2+1)^2}{4}$$

$$(x_0^2+1)^3 = 8$$

$$x_0^2 + 1 = 2$$

$$x_0^2 = 1$$

$$x_0 = \pm\sqrt{1}$$

$$\boxed{x_0 = \pm 1}$$

1° $x_0 = 1$

$y_0 = 1$: $M(1,1)$ $\quad y - 1 = 1 \cdot (x-1)$

$n: \underline{\underline{y = x}}$ u

2° $x_0 = -1$

$y_0 = 1$ $\quad \underline{\underline{M(-1,1)}}$

$y - 1 = (-1) \cdot (x+1)$

$\underline{\underline{y = -x}}$ u

4) Одредити параметар k тако да права $y = kx+1$ буде тангента криве $y^2 = 4x$ и наћи тачку додира

Р: Нека је $M(x_0, y_0)$ тачка додира
Коефицијент правца тангенте је $f'(x_0)$ па је $k = f'(x_0)$

$2yy' = 4$

$y' = \frac{4}{}$

$y^2 = 4x \;/'$

$2yy' = 4$

$y' = \frac{2}{y}$

$y'(x_0) = \frac{2}{y_0}$

$t: y = \frac{2}{y_0} x + 1$

$M(x_0, y_0) \in t \rightarrow y_0 = \frac{2}{y_0} x_0 + 1 \quad (1)$

$M(x_0, y_0) \in$ парабола $\Rightarrow y_0^2 = 4x_0$

$x_0 = \frac{y_0^2}{4} \quad (2)$

Из (1) и (2) $\Rightarrow y_0 = \frac{2}{y_0} \cdot \frac{y_0^2}{4} + 1$

$y_0 = \frac{1}{2} y_0 + 1$

$\frac{1}{2} y_0 = 1$

$y_0 = 2$

$x_0 = \frac{4}{4} \; 1$

$M(1,2)$

$t: y = \frac{2}{2} x + 1$

$t: y = x + 1$

⑤ Дата је крива $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$ Тангента те криве сијече координатне осе у тачкама A и B. Док. да је ~~OA~~ + OB = const, O - корд. поч.

Р/ Нека је $M(x_0, y_0)$ произвољна тачка графика, једначина тангенте је

$$t:\ y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(x)=2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x_0)=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}$$

$$y_0=f(x_0)$$
$$y_0=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$$

$$t:\ y-(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

Пресјек тангенте и Ox - осе $(y=0)$

$$-(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}\cdot(x-x_0)$$

$$-(\sqrt{x_0}-\sqrt{a})^2=\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

$$-(\sqrt{x_0}-\sqrt{a})=\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

$$x-x_0=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}-x_0$$

$$\boxed{x=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}}\qquad A(\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0},\ 0)$$

Пресек тангенте и Oy-осе $(x=0)$

$$y-(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2=(\sqrt{x_0}-\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{x_0})$$

$$y=(\sqrt{a}-\sqrt{x_0})^2-x_0+\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}$$

$$y=a-\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}$$

$$B(0,\ a-\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0})$$

$$\underline{OA+OB=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}+a-\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}=a}$$

(6.) Наћи угао под којим права $y=\frac{1}{2}x$ сијече параболу $y=x^2-2x$

R: Пресек параболе и праве $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ y=x^2-2x \end{array}\right\} =$

$$2x^2-4x-x=0$$
$$2x^2-5x=0$$
$$x(2x-5)=0$$
$$2x=5$$
$$x=\frac{5}{2} \lor x=0$$

$M_1(0,0)$

$M_2(\frac{5}{2},\frac{5}{4})$

I једначина тангенте

$M_1(0,0)$

$$y-0=y'(0)(x-0)$$
$$y(x)=x^2-2x$$
$$y'(x)=2x-2$$
$$y'(0)=-2$$

$t_1:\ y=-2\cdot x$

$$\underline{y=-2x}$$

$$k=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2}x$$

$$k_1=-2$$

уочимо да је $k_p \cdot k_1 = -1$ па је права ортогонална на t_1

Права и парабола секу се под правим углом

II једначина тангенте у $M_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$

$$t_2: \; y - \frac{5}{4} = y'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$y'\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 3$$

$$t_2: \; y - \frac{5}{4} = 3\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$y = 3x - \frac{25}{4}$$

$$k_2 = 3$$

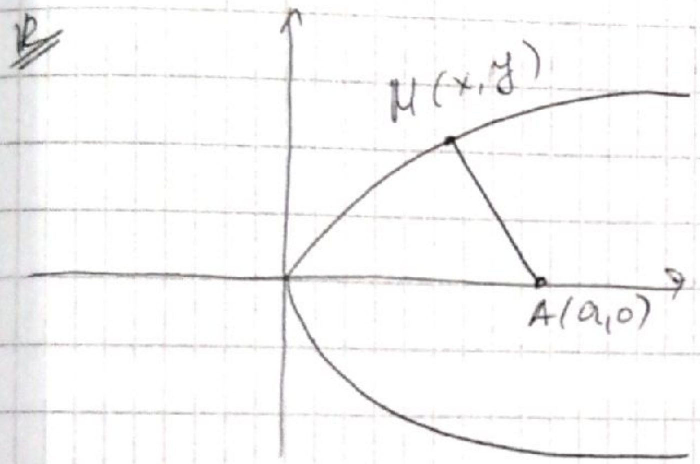
$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_p}{1 + k_2 \cdot k_p} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Угао $\underline{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

Екстремне вредности

На параболи $y^2 = 2px$ наћи тачку најближу тачки $A(a,0)$

Р:



$M(x,y)$ – тачка са параболе

$$d(A,M) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$y^2 = 2px$$

$$d(A,M) = \sqrt{(x-a)^2 + 2px}$$

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + 2px}$$

Тражимо минимум функције $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{(x-a)^2+2px}} \cdot \left(2(x-a)+2p\right) = \frac{x-a+p}{\sqrt{(x-a)^2+2px}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - a + p = 0$$

$\underline{\mathrm{I}}$

$$\Leftrightarrow x = a - p$$

y' $\quad - \searrow \quad x_0 \quad \nearrow +$

у x_0 достиже min

$$y_{min} = f(x_0)$$

y' $\nearrow$ $+$ x_0 $\searrow$ $-$

У x_0 достиже макс

$y_{max} = f(x_0)$

II $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ min

$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ max

$f'(x)>0$ (акк) $\iff x-a+p>0$

$\iff x>a-p$

$f'(x)<0 \iff x-a+p<0$

$x<a-p$

$-$ $\searrow$ $a-p$ $\nearrow$ $+$

У тачки $x=a-p$

функција достиже (минимум)

$y_{min} = f(a-p) =$

$= \sqrt{(a-p-a)^2 + 2p(a-p)}$

$y_{min} = \sqrt{p^2+2pa-2p^2}$

$y_{min} = \sqrt{2pa-p^2}$

↗ минимално растојање неке тачке параболе од тачке A

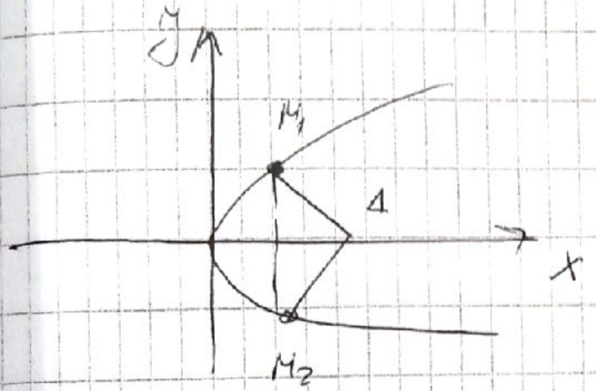
$y^2 = 2px$

$y^2 = 2p(a-p)$

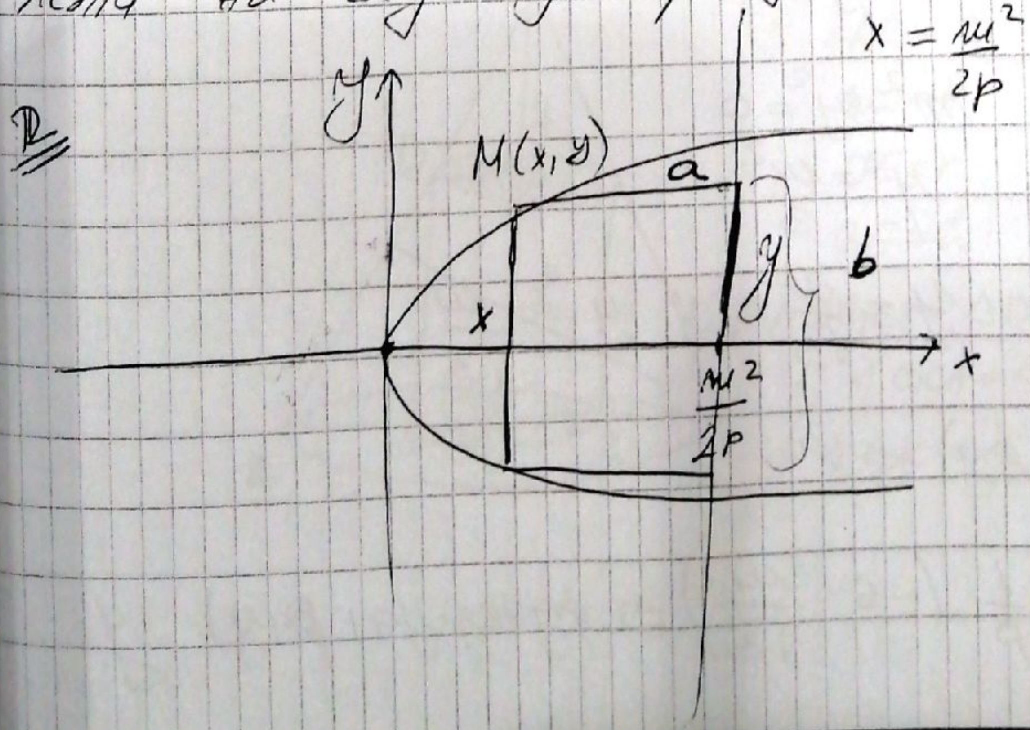
$y = \pm\sqrt{2p(a-p)}$

$M_1(a-p, \sqrt{2p(a-p)})$

$M_2(a-p, -\sqrt{2p(a-p)})$



② Наћи правоугаоник максималне површине ограничен параболом $y^2=2px$ и правом $x=\frac{m^2}{2p}$, ако једна страница тог правоугаон лежи на задатој правој.

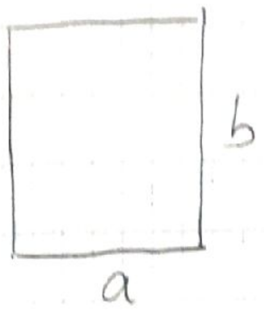


M припада првом квадранту

$x>0$

$y>0$

108



$$a = \frac{m^2}{2p} - x$$

$$b = 2y$$

$$P = a \cdot b$$

$$P = \frac{m^2}{2p} - x \cdot 2y$$

$$y^2 = 2px$$

$$x = \frac{y^2}{2p} \Longrightarrow$$

$$P(y) = \frac{m^2}{2p} - \frac{y^2}{2p} \cdot 2y$$

$$P(y) = \frac{1}{p}\left(m^2 y - y^3\right)$$

$$P'(y) = \frac{1}{p} \cdot (m^2 - 3y^2)$$

$$P'(y) = 0 \iff m^2 - 3y^2 = 0$$

$$\iff y^2 = \frac{m^2}{3}$$

$$y = \frac{m}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad \cancel{y = -\frac{m}{\sqrt{3}}}$$

$$P''(y) = \frac{1}{p}(-6y)$$

$P''\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{p}\left(-6 \cdot \frac{m}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$ функција $P(y)$ у тачки $y = \frac{m\cdot\sqrt{3}}{3}$ постиже екстремум

$$P_{max} = P\left(\frac{m\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$P_{max} = \frac{1}{p}\left(m^2\cdot\frac{m\sqrt{3}}{3} - m^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$P_{max} = \frac{1}{p}\cdot m^3\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

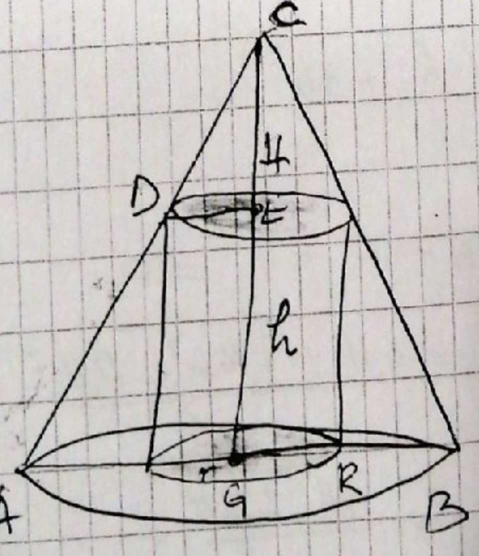
$$x = \frac{y^2}{2p}$$

$$x = \frac{\left(\frac{m\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2p} = \frac{m^2}{6p}$$

$$M\left(\frac{m^2}{6p}, \frac{m\sqrt{3}}{3}\right)$$

3) У дати прави конус полупречника R и висине H уписати цилиндар максималне запремине.

Р/



$AG = R$

$GC = H$

$DE = r$

$GE = h$

$\Delta AGC \sim \Delta DEC$

$1^\circ\ \measuredangle GCA = \measuredangle ECD$

$2^\circ\ \measuredangle GAC = \measuredangle EDC$ (паралелне краци)

$AG : DE = GC : EC$

$R : r = H : (H-h)$

$r = \frac{R(H-h)}{H}$

V= запремина цилиндра

$V = B \cdot H = h$

$B = r^2 \pi \cdot h$

$V = \frac{R^2 \cdot (H-h)^2}{H^2} \cdot \pi \cdot h$

$V(h) = \frac{R^2 \pi}{H^2} (H-h)^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{R^2 \cdot \pi}{H^2} (H \cdot h - 2Hh^2 + h^3)$

$V'(h) = \frac{R^2 \pi}{H2} (H^2 - 4H \cdot h + 3h^2)$

$V'(h) = 0 \iff 3h^2 - 4H \cdot h + H^2 = 0$

$h_1/h_2 = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6}$

$h_1/h_2 = \frac{4H \pm 2H}{6}$

$h_1 = \frac{H}{3}$ $\cancel{h_2 = H}$

$$V''(h) = \frac{R^2\pi}{H^2}(-4H + 6h)$$

$$V''\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{R^2\pi}{H^2}\cdot(-4H + 2H)$$

$$V''\left(\frac{H}{3}\right) = -\frac{2\cdot R^2\pi}{H} < 0 \Rightarrow$$ функција $V(h)$ у

тачки $h = \frac{H}{3}$ достиже максимум

$$V_{max} = V\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{R^2\pi}{H^2}\cdot\frac{4H^2}{9}\cdot\frac{H}{3} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{27}R^2\pi\cdot H}}$$

$$r = \frac{R\cdot\left(\frac{2H}{3}\right)}{H} = \underline{\underline{\frac{2}{3}R}}$$