Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet
Matematika
Matematika i računarske nauke

Prvi kolokvijum iz predmeta
Algebra 1

27.11.2018. godine

Student, indeks i smjer: ______________________________

zadatak	1	2	3	4
br. poena	6.5+6	6+6.5	6.5+6	6+6.5

1. a) Ako je $(S, *)$ slobodna polugrupa generisana skupom X, tada postoji izomorfizam h polugrupe $(S, *)$ na polugrupu riječi $W(X)$ pri čemu je $h(x) = x$, $\forall x \in X$.

b) Neka su a, b proizvoljni različiti realni brojevi. Ispitati da li je $X = R \backslash \{a\}$ Abelova grupa u odnosu na operaciju $\circ$ koja je definisana sa

$$(\forall x, y \in X) \qquad x \circ y = a + \frac{(x-a)(y-a)}{b-a}.$$

2. a) Definisati pojam kongruencije u grupoidu. Ako je grupoid $(G, *)$ komutativan, asocijativan, ima neutralni element, i $\forall x \in G$ postoji inverzni element $x^{-1} \in G$, tada odgovarajuće svojstvo ima i faktor grupoid $(G|_\rho, \overline{*})$. Dokazati.

b) Ispitati da li je na $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ sa ρ data relacija ekvivalencije

$$(\forall n, m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}) \qquad n \rho m \Leftrightarrow n \cdot m > 0.$$

Odrediti klase ekvivalencije i ispitati da li je relacija ρ saglasna sa operacijom množenja u $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

3. a) Formulisati i dokazati osnovnu teorema o homomorfizmu grupoida. Homomorfna slika grupoida koji nije grupa, ne može biti grupa. Dokazati ili dati kontraprimjer.

b) Neka je m fiksiran prirodan broj. Dokazati da je tada $n^2 + m^2 = n \cdot m + n \cdot m \Leftrightarrow n = m$. Detaljno obrazložiti.

4. a) Definicija mreže. Dokazati da u mreži $(A, \leq)$ važi $a \cdot (a + b) = a$. Dati primjer mreže koja nema najmanji i najveći element.

b) Ispitati da li je $(\mathbb{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ mreža. Da li je $(\mathbb{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ lanac? Dokazati da se $(\mathbb{R}, \leq)$ može izomorfno uroniti u mrežu $(\mathbb{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$.