OPTIMIZACIJA SISTEMA ZA PRENOS U OSNOVNOM OPSEGU UČESTANOSTI

Prethodno je razmatran uticaj dvije značajne pojave na prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti. To su intersimbolska interferencija i slučajni šum. Naredni korak podrazumijeva analizu uslova i definisanje zaključaka o tome šta treba uraditi pa da njihov, u pogledu kvaliteta prenosa, degradirajući uticaj bude što je moguće manji. Generalno, to se postiže <u>optimizacijom prijemnika, optimizacijom predajnika, odnosno njihovom združenom optimizacijom</u>. U stvari, cilj svake optimizacije je da se projektuje sistem koji je u pretpostavljenim uslovima, prema nekim usvojenim kriterijumima za kvalitet, najbolji. Medutim, čitav je niz pretpostavki koje mogu biti uzete u obzir u manjoj ili većoj mjeri, brojni su i međusobno različiti i kriterijumi o kvalitetu. Stoga i odgovori na pitanje koji je to sistem koji je optimalan, imaju smisla samo onda kada se znaju svi postavljeni uslovi i svi kriterijumi. U narednim analizama kriterijum za ocjenu kvaliteta sistema biće vjerovatnoća greške.

Kako smo pokazali, izraz za vjerovatnoću greške zavisi od odnosa U/σ, i to tako da je vjerovatnoća greške manja što je navedeni odnos veći. <u>Stoga će cilj optimizacije biti maksimiziranje odnosa U/σ.</u>

Kako bi analiza imala opštiji karakter, razmatraćemo jedan M-arni signal koji se na ulazu u sistem ili neki njegov dio opisuje izrazom:

$$u_u(t) = \sum_{-N}^{N} a_k x(t-kT)$$

dok je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom:

$$u_i(t) = \sum_{-N}^{N} a_k y(t-kT)$$

x(t) je standardni signal, koji je unaprijed poznat,
y(t) je odziv sistema na pobudu standardnim impulsom,
T je trajanje signalizacionog intervala,
koeficijent a_k u k-tom signalizacionom intervalu je jednak jednoj od M diskretnih vrijednosti s_1, s_2, . . ., s_M koju može da ima značajni parametar signala i koja opisuje prenošenu poruku.

Pretpostavimo da se diskretne vrijednosti s_i, s_{i-1} na predaji razlikuju za neku konstantu, tj. $s_i - s_{i-1} = 2a$, tako da a_k uvijek ima jednu od sledećih vrijednosti:

$$a_k = s_i = \begin{cases} 0, \ \pm 2a, \ \pm 4a, \ \pm \ \cdots \ \pm (\text{M-1})a & ;\text{M-neparno} \\ \pm a, \ \pm 3a, \ \pm 5a, \pm \ \cdots \ \pm (\text{M-1})a & ;\text{M-parno} \end{cases}$$

Emitovani signal $u_u(t)=\sum_{-N}^{N} a_k x(t-kT)$ se prenosi linijom veze, pa ako sa $y(t_m)$ označimo amplitudu odbirka odziva *y*(t) na standardni signal *x*(t), razlika dvije susjedne amplitude odbiraka M-arnog signala na mjestu prijema biće:

$$s_i y(t_m) - s_{i-1} y(t_m) = 2U = 2ay(t_m)$$

Pod uslovom da su sve vrijednosti s_i jednako vjerovatne i da je prag odlučivanja za dvije susjedne vrijednosti postavljen na sredinu između njih, za vjerovatnoću greške važi izraz:

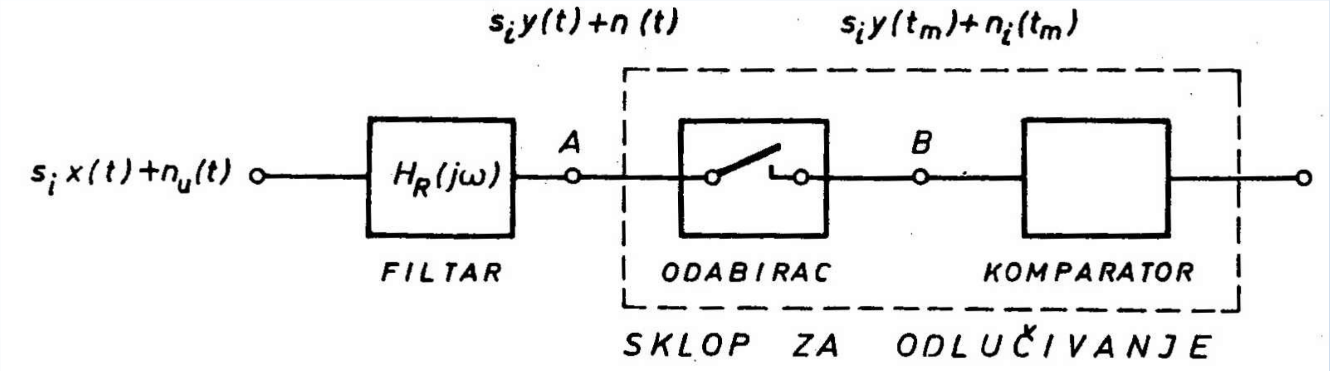
$$P_e = \frac{M-1}{M} erfc \frac{ay(t_m)}{\sqrt{2}\sigma}$$

U ovom izrazu, argument komplementarne funkcije greške koji treba maksimizirati napisan je u obliku podesnom za dalju analizu. On zavisi od toga koliko se međusobno razlikuju dvije susjedne vrijednosti značajnog parametra izabrane na predaji, zavisi od toga kakav je standardni odziv i njegov odbirak i zavisi od šuma na ulazu u sklop za odlučivanje.

U daljoj analizi, razmatraćemo dva značajna slučaja:
1. Optimizacija sistema kada u njemu ***ne postoji*** intersimbolska interferencija
2. Optimizacija sistema u kome istovremeno treba ispuniti i uslove da u njemu ne dođe do intersimbolske interferencije.

OPTIMIZACIJA SISTEMA KADA NE POSTOJI ISI
- OPTIMALNI FILTAR -

Posmatrajmo sistem za prenos digitalnih signala čiji je prijemni dio prikazan blok šemom:



Kao što se vidi, na ulazu u prijemnik ispred sklopa za odlučivanje nalazi se prijemni filtar. Očigledno je da njegovo prisustvo utiče i na signal i na šum koji dolaze na ulaz u odabirač. Sada se postavlja pitanje da li je moguće izborom ovog filtra uticati na to da se maksimizira argument komplementarne funkcije greške U/σ (minimizira vjerovatnoća greške).
Odgovor na ovo pitanje je potvrdan. Filtar kojim se koriguje funkcija prenosa sistema kako bi se povećao navedeni odnos se naziva ***optimalni filtar***. Pri tome, treba imati u vidu da je optimizacija moguća pod određenim uslovima.
Smatraćemo da je vremenska zavisnost M-arnog digitalnog signala određena standardnim signalom *x*(t) čije je trajanje strogo ograničeno na odgovarajući signalizacioni interval čije je trajanje T. Pretpostavimo još da u sistemu, od predajnika do ulaza u prijemnik, intersimbolska interferencija ne postoji.

Uz ove dvije pretpostavke zadatak optimizacije može se formulisati na sledeći način:
Kada nema intersimbolske interferencije, a na ulazu u prijemni filtar u jednom posmatranom signalizacionom intervalu je prisutan poznati signal

$$u_{Su}(t) = s_i x(t), \qquad 1 \leq i \leq M$$

pri čemu postoji i aditivni bijeli Gaussov šum $n_u(t)$ čija je srednja vrijednost jednaka 0, kako treba izabrati funkciju prenosa prijemnog filtra $H_R(j\omega)$, pa da odnos amplitude odbirka $y(t_m)$ standardnog odziva i efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra $(y(t_m)/\sigma)$ bude maksimalan?

Može se tražiti maksimalna vrijednost izraza $y(t_m)/\sigma$, mada je nekada jednostavnije uzeti odnos kvadrata ovih veličina (u pogledu maksimiziranjanja nema razlike):

$$A_N = \frac{y^2(t_m)}{\sigma^2} = \frac{y^2(t_m)}{\overline{n_i^2(t)}}$$

Vrijednost a je konstanta, pa ona nema značaja prilikom maksimiziranja, tako da cijelu analizu možemo da sprovedemo tako što ćemo uzeti da se filtar $H_R(j\omega)$ pobuđuje signalom $x(t)$ koji na izlazu daje odziv $y(t)$. Uz pretpostavku da je $X(j\omega)$ Fourier-ova transformacija $x(t)$, odziv je:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

pa je tražena vrijednost amplitude odbirka ovog signala u trenutku $t=t_m$ jednaka:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega$$

Što se tiče efektivne vrijednosti šuma na izlazu iz filtra, nju ćemo pronaći na sledeći način. Neka je šum na ulazu u filtar specificiran spektralnom gustinom snage $S_N(\omega)$. Tada će spektralna gustina snage šuma $n_i(t)$ na izlazu iz filtra biti:

$$S_{Ni}(\omega) = \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)$$

Srednja kvadratna vrijednost šuma je jednaka kvadratu njegove efektivne vrijednosti. Zato je ona istovremeno jednaka i srednjoj snazi šuma na otporniku otpornosti 1Ω, pod uslovom da slučajna funkcija $n_i(t)$ opisuje napon šuma na njegovim krajevima. Na osnovu ovoga biće:

$$\sigma^2 = u_{Neff}^2 = \overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega$$

Obrazujmo sada odnos A_N, uz napomenu da važi:

$\overline{n_i^2(t)} = \overline{n_i^2(t_m)}$ i $y^2(t_m) = \left|y(t_m)\right|^2$, jer je $y(t)$ realna funkcija vremena.

$$A_N = \frac{\left|y(t_m)\right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega}$$

Da bi se pronašla funkcija prenosa $H_R(j\omega)$ koja čini ovaj odnos maksimalnim, potrebno je primijeniti Schwarz-ovu nejednakost. Ta nejednakost definiše da dvije kompleksne funkcije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$ uvijek zadovoljavaju sledeću relaciju:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2(j\omega)d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(j\omega)\right|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_2(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Znak jednakosti u ovom izrazu važi u slučaju kada je

$$F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$$

gdje je k proizvoljna konstanta. Ako usvojimo da je:

$$F_1(j\omega) = H_R(j\omega)S_N^{\frac{1}{2}}(\omega)$$

$$F_2(j\omega) = X(j\omega)S_N^{-\frac{1}{2}}(\omega)e^{j\omega t_m}$$

dobija se:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|H_R(j\omega)\right|^2 S_N(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 S_N^{-1}(\omega)d\omega$$

Saglasno gornjem izrazu važi da je:

$$A_N = \frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)}d\omega$$

Maksimalna vrijednost A_N se postiže u slučaju znaka jednakosti, pa je:

$$A_{N\max} = \left[\frac{|y(t_m)|^2}{\overline{n_i^2(t)}}\right]_{\max} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(j\omega)|^2}{S_N(\omega)}d\omega$$

Kako je u tom slučaju $F_1(j\omega) = kF_2^*(j\omega)$ dobija se izraz za optimalni filtar

$$H_R(j\omega) = H_{Ropt}(j\omega) = k\frac{X^*(j\omega)}{S_N(\omega)}e^{-j\omega t_m} = k\frac{X(-j\omega)}{S_N(\omega)}e^{-j\omega t_m}$$

Izvedeni izraz pokazuje da funkcija prenosa optimalnog filtra zavisi i od signala i od šuma na njegovom ulazu.

Postoji više vrsta optimalnog filtra. Navešćemo neke od njih.

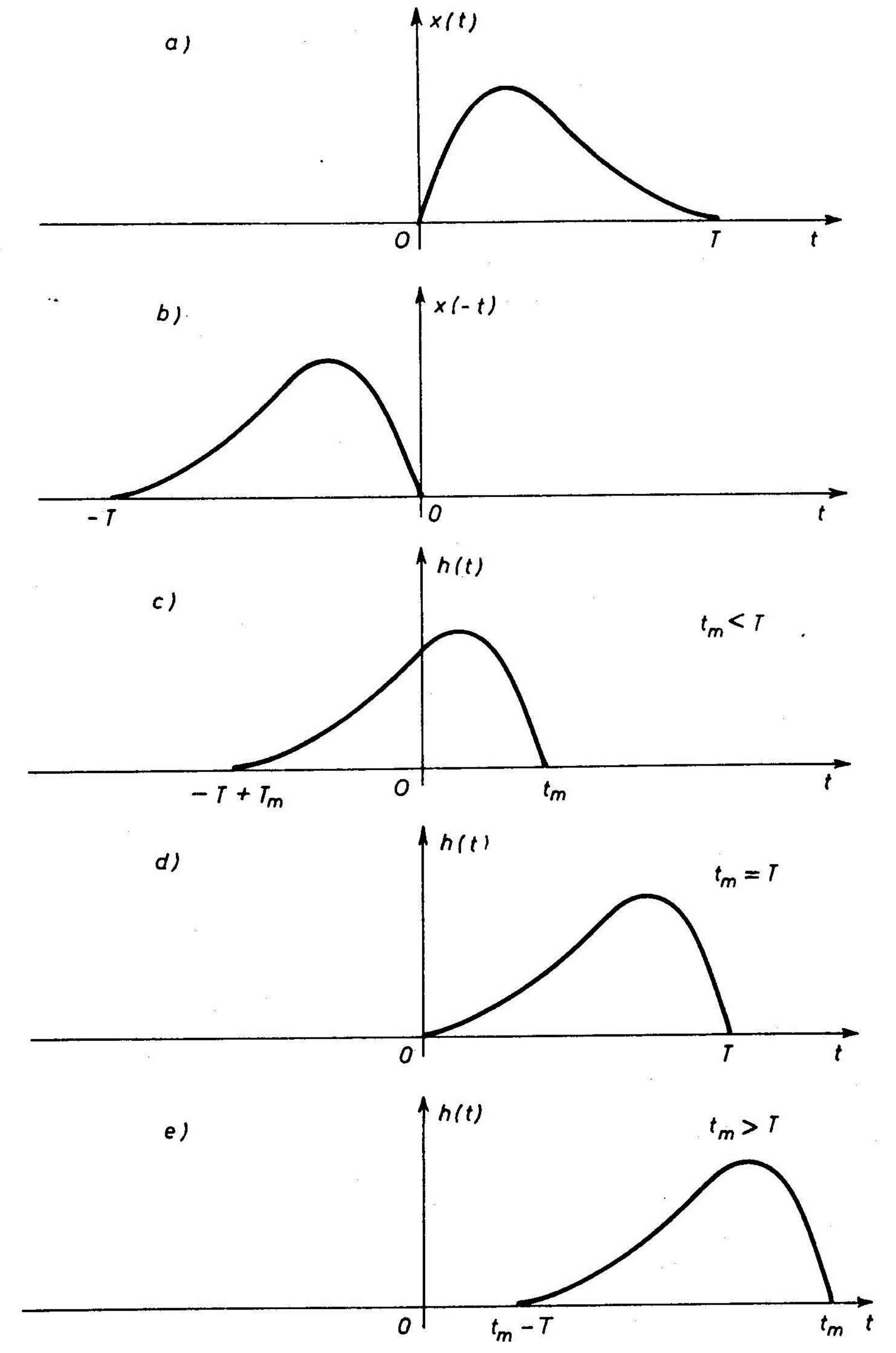
Podešeni filtar

Posmatrajmo optimalni filtar koji funkcioniše u uslovima kada na njegovom ulazu postoji bijeli šum. Tada je spektralna gustina snage ovog šuma $S_N(\omega)=S_N$ konstantna u cijelom opsegu učestanosti. Ako se ovo uvrsti u izraz za $H_{Ropt}(j\omega)$, dobiće se da impulsni odziv ovog optimalnog filtra iznosi:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{Ropt}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{k}{S_N}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)e^{j\omega(t-t_m)}d\omega$$

$$h(t)=\frac{k}{S_N}x(t_m-t)$$

Ovaj izraz pokazuje da je impulsni odziv optimalnog filtra, kad je na njegovom ulazu bijeli šum, određen signalom $x(t)$. Dakle, u pretpostavljenim uslovima, da bi se izvršila optimizacija, filtar mora biti podešen obliku signala, Zato se ovakav filtar i naziva ***podešenim filtrom***.



Na početku ove analize pretpostavljeno je da signal $x(t)$ ima konačno trajanje T. Na slici *a*) je prikazan signal $x(t)$, na slici *b*) njegov lik u ogledalu $x(-t)$, a na ostale tri slike odziv $h(t)$ za slučajeve kada je $t_m<T$, $t_m=T$ i $t_m>T$.

U prvom slučaju kada je $t_m<T$ (slika *c*), impulsni odziv postoji i za vrijeme $t<0$. Dakle, takav sistem fizički nije ostvarljiv.

U ostala dva slučaja ($t_m=T$ i $t_m>T$) impulsni odziv $h(t)=0$ za $t<0$, pa je uslov fizičke realizacije ispunjen. Po pitanju kvaliteta bolje je da se češće uzimaju odbirci, tj. poželjno je da vrijeme t_m bude što manje kako bi se odluke donosile što češće. Stoga se za podešeni filtar uzima da je $t_m=T$.
Prema tome, na izlazu iz podešenog filtra odnos odbirka $y(t_m)$ signala $y(t)$ i efektivne vrijednosti šuma, dostiže svoj maksimum kad je trenutak odabiranja t_m jednak T, a to znači u trenutku u kome je cijeli signal $x(t)$ već u prijemniku.

Sada je maksimalna vrijednost A_N na izlazu iz podešenog filtra:

$$A_{N\max} = \left[\frac{\left| y(t_m) \right|^2}{\overline{n_i^2(t)}} \right]_{\max} = \left[\frac{\left| y(t_m) \right|^2}{\sigma^2} \right]_{\max} = \frac{1}{S_N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(j\omega) \right|^2 d\omega = \frac{W_x}{S_N}$$

gdje W_x predstavlja ukupnu energiju standardnog signala $x(t)$ na ulazu u filtar, a S_N je spektralna gustina snage bijelog šuma na tom istom ulazu.

Dobijeni rezultat dovodi do sledećeg zaključka: **odnos kvadrata amplitude odbirka odziva i kvadrata efektivne vrijednosti šuma ne zavisi za podešeni filtar od oblika pobudnog signala $x(t)$, već zavisi od njegove energije.** To znači da različiti signali koji nose istu energiju mogu dati istu vjerovatnoću greške. Ovo je specifično svojstvo podešenog filtra.

Isto važi i za amplitudu odbirka $y(t_m)$, jer ona iznosi:

$$y(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{X^*(j\omega)}{S_N} e^{-j\omega t_m} X(j\omega) e^{j\omega t_m} d\omega = k \frac{W_x}{S_N}$$

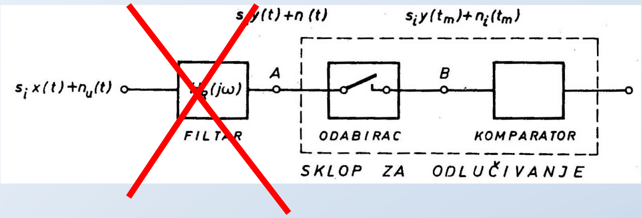
Oblik standardnog signala je u ovom slučaju odredio oblik funkcije prenosa filtra, ali ne i njegov izlaz.

Korelator

Predstavlja jednu varijantu podešenog filtra. To je prijemnik digitalnih signala koji ima iste performanse kao i prijemnik sa podešenim filtrom, ali se realizuje bez klasičnog filtra. Do njegovog dizajna dolazi se na sledeći način.

Pretpostavimo da na ulaz dolazi složeni napon:

$$u_u(t) = x(t) + n_u(t)$$



Impulsni odziv podešenog filtra je:

$$h(t) = \frac{k}{S_N} x(t_m - t)$$

Izlazni signal $u_i(t)$ se dobija kao konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sistema:

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(t_m - t + \tau) d\tau$$

Sada je cilj da se utvrdi kako se može dobiti identičan izlaz bez upotrebe podešenog filtra.

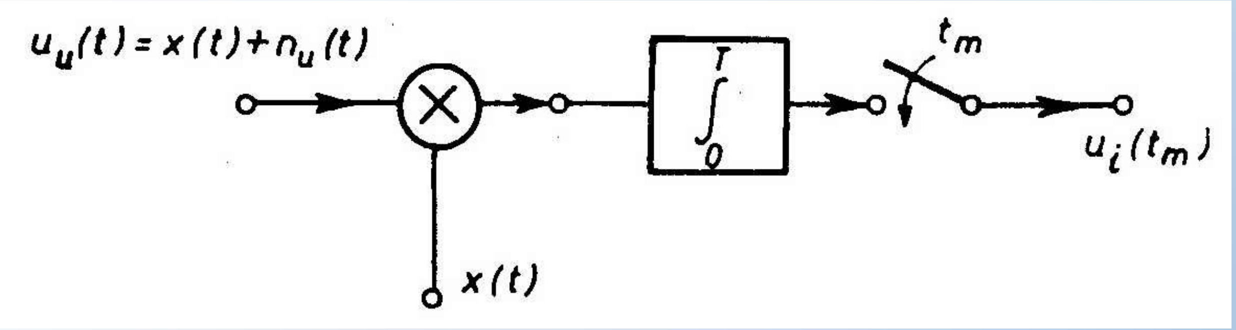
Odbirak na osnovu koga se donosi odluka u trenutku t_m ima amplitudu:

$$u_i(t_m) = \frac{k}{S_N} \int_{-\infty}^{\infty} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Kako je trajanje signala $x(t)$ ograničeno na interval od 0 do T=t_m, to se granice integrala mogu ograničiti tako da je:

$$u_i(t_m) = u_i(T) = \frac{k}{S_N} \int_{0}^{t_m = T} u_u(\tau) x(\tau) d\tau$$

Ovaj izraz pokazuje kako je moguće konstruisati prijemnik na drugi način. On je prikazan na slici. Na njegovom ulazu se nalazi produktni modulator u kome se množe ulazni signal i signal iz lokalnog oscilatora.



Nakon toga, njihov proizvod se dolazi na ulaz integratora i odbirak se uzima na njegovom izlazu u trenutku t_m=T. Naravno, po završetku jednog signalizacionog intervala, svi inertni elementi moraju da rasterete svoje električno opterećenje kako bi proces u svakom intervalu T bio potpuno nezavisan.

Kako se u ovom prijemniku obavlja koherentna ili sinhrona demodulacija i pošto se u njemu korelira dolazeći signal $x(t)$ zajedno sa aditivnim šumom $n_u(t)$ sa istim takvim poznatim signalom $x(t)$ iz lokalnog oscilatora, to mu je i dato ime ***korelator ili korelacioni prijemnik***.

Vjerovatnoća pojave greške na izlazu iz prijemnika je ista kao i kod podešenog filtra.

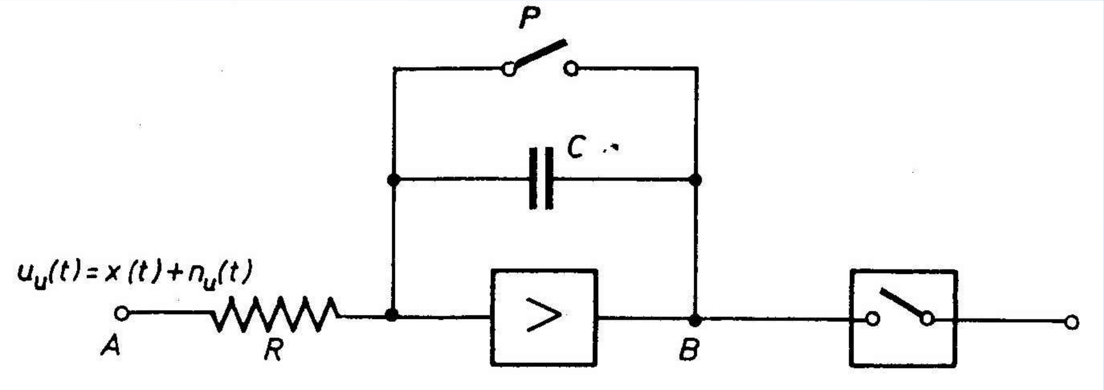
Naravno, i ovdje važi da korelator radi u uslovima bijelog šuma.

Prijemnik sa integriranjem i rasterećenjem

Ovaj prijemnik (*integrate and dump*) predstavlja još jednu varijantu prijemnika digitalnih signala čije su performanse pod određenim uslovima identične onima koje ima prijemnik sa podešenim filtrom. Ti uslovi su sledeći:

1. Prije svega, signal $x(t)$ mora da bude pravougaonog oblika konačnog trajanja T,
2. Na ulaz prijemnika dolazi bijeli šum konstantne spektralne gustine snage.

Blok šema ovakvog prijemnika prikazana je na slici.



Na ulazu se nalaze korisni signal $x(t)$ i aditivni bijeli Gaussov šum $n_u(t)$, tako da je ukupna pobuda:

$$u_u(t) = x(t) + n_u(t)$$

Integrator je sastavljen na uobičajen način od otpornika otpornosti R i kondenzatora kapaciteta C. Paralelno kondenzatoru je vezan pojačavač velikog pojačanja i prekidač P. Prekidač ima zadatak da osigura da u početku svakog signalizacionog intervala, $t=0^+$, kondenzator bude prazan. To se postiže njegovim rasterećenjem u vrlo kratkom intervalu u kom se prekidač P na kratko zatvori. Ovo se odigrava u vremenu $t=0^-$ i to poslije trenutka u kome je odabiračem uzet odbirak iz prethodnog signalizacionog intervala. U posmatranom signalizacionom intervalu odbirak se uzima u trenutku t=T. Saglasno opisanim operacijama, ovaj prijemnik je i dobio svoje ime.

Ako sa T_i=CR označimo vremensku konstantu integratora, onda će na izlazu iz integratora biti signal čiji odbirak na kraju posmatranog signalizacionog intervala ima vrijednost:

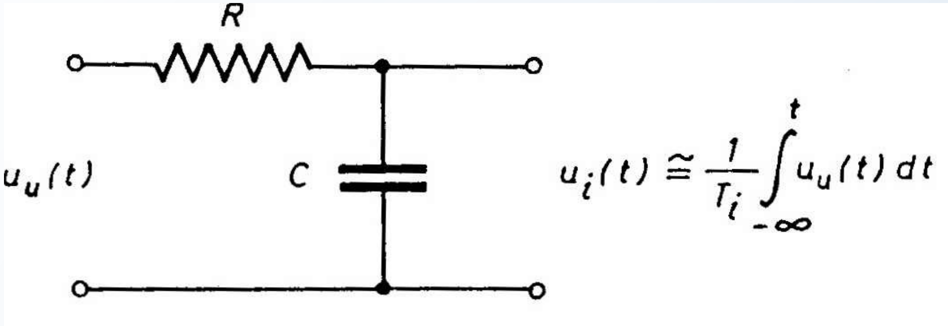
$$u_i(T)=\frac{1}{T_i}\int_0^T u_u(t)dt=\frac{1}{T_i}\int_0^T x(t)dt+\frac{1}{T_i}\int_0^T n_u(t)dt=y(T)+n_i(T)$$

Vidimo da ima dvije komponente. Jedna je posledica poslatog signala, a druga prisutnog šuma.
Kako je standardni signal pravougaonog oblika i ograničen na jedan signalizacioni interval, to je:

$$x(t)=\begin{cases} U, & 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{T} \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}$$ => $$y(T)=\frac{1}{T_i}\int_0^T U dt=\frac{1}{T_i}UT$$

Pronađimo sada srednju kvadratnu vrijednost odbiraka šuma. Da bi se to uradilo potrebno je najpre odrediti funkciju prenosa prijemnika.

U tu svrhu, polazi se najprije od standardnog integratora:



$$u_i(T) = \frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t} u_u(t)dt = \frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_u(j\omega)\frac{1}{T_i}\int_{-\infty}^{t} e^{j\omega t}dt d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{j\omega T_i}U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_i(j\omega)U_u(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Odakle se dobija da je funkcija prenosa standardnog integratora data sa:

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i}$$

Za razliku od ovog standardnog integratora koji vrši svoju funkciju kontinualno u intervalu (-∞, t), sklop integratora u prijemniku sa integriranjem i rasterećenjem obavljva integraljenje ulaznog signala u intervalu trajanja T, tj. od nekog trenutka *t*-T do trenutka *t* (zbog prisustva prekidača P i njegove uloge).
Funkciju prenosa ovakvog sklopa možemo pronaći na sledeći način:

- signal na izlazu integratora u trenutku *t* je:

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- signal na izlazu u trenutku *t*-T je:

$$u_i(t - T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{-j\omega T} e^{j\omega t} d\omega$$

To su dvije krajnje vrijednosti izlaznog signala iz integratora. Prema tome, u intervalu od *t*-T do *t* integral ulaznog signala biće jednak razlici ovih krajnjih vrijednosti :

$$u_i(t) - u_i(t - T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T_i} U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Lako se zaključuje da je funkcija prenosa integratora sa rasterećenjem:

$$H_i(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T_i} = \frac{T}{T_i} \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

Sada je lako pronaći srednju kvadratnu vrijednost šuma na ulazu u sklop za odlučivanje. Ako je na ulazu u prijemnik prisutan bijeli šum čija spektralna gustina snage iznosi S_N, onda će spektralna gustina snage šuma na izlazu iz integratora biti:

$$S_{Ni}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_N = \left(\frac{T}{T_i}\right)^2 \left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 S_N$$

odakle slijedi da će srednja kvadratna vrijednost šuma na izlazu biti:

$$\overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{T}{T_i}\right)^2 S_N \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 d\omega$$

Kada se obavi integracija, nalazi se da je

$$\overline{n_i^2(t)} = \frac{1}{T_i^2} S_N T$$

Konačno, odnos koji predstavlja karakteristiku funkcije greške A_N je:

$$A_N = \frac{y^2(t)}{\overline{n_i^2(t)}} = \frac{U^2 T}{S_N} = \frac{W_x}{S_N} = A_{N\max}$$

Kao što se vidi, dolazi se do istog rezultata kao i u prijemniku s podešenim filtrom. Prema tome, prijemnik sa integriranjem i rasterećenjem faktički predstavlja jednu varijantu prijemnika s podešenim filtrom, pod uslovom da *x*(*t*) ima oblik pravougaonog impulsa.

VJEROVATNOĆA GREŠKE U PRIJEMNIKU SA PODEŠENIM FILTROM

Prethodna analiza je pokazala da su performanse prijemnika s podešenim filtrom i korelacionog prijemnika međusobno jednake. Drugim riječima, ova dva rješenja predstavljaju dvije različite tehnike realizacije optimalnog filtra. Prema tome, izrazi za izračunavanje vjerovatnoće greške su identični.

Minimalna vrijednost vjerovatnoće greške u opštem slučaju M-arnih digitalnih signala, pod uslovom da su sve vrijednosti značajnog parametra jednako vjerovatne je data izrazom:

$$P_{e\min} = \frac{M-1}{M} erfc \frac{ay(t_m)}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{M-1}{M} erfc \sqrt{\frac{a^2 W_x}{2S_N}}$$

Vidi se da ona zavisi od energije standardnog signala W_x koja se razvija u jednom signalizacionom intervalu na ulazu u prijemnik. Mnogo je podesnije da se u taj izraz umjesto energije uvede srednja snaga M-arnog digitalnog signala na ulazu u prijemnik P_s, tj. njegova srednja energija u jednom signalizacionom intervalu $W_s = P_s T$.

Srednja snaga M-arnog signala P_s u razmatranom slučaju, kada je standardni signal *x*(*t*) ograničen na jedan signalizacioni interval i kada su sve vrijednosti značajnog parametra podjednako vjerovatne, može da se predstavi kao:

$$P_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{T}\int_0^T s_i^2 x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt\,\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}s_i^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = W_x$$ - energija standardnog signala.

Ako pretpostavimo da s_i uzima vrijednosti:

$$s_i = \begin{cases} 0,\ \pm 2a,\ \pm 4a,\ \pm\ \cdots\ \pm(\text{M-1})a & ;\text{M-neparno} \\ \pm a,\ \pm 3a,\ \pm 5a, \pm\ \cdots\ \pm(\text{M-1})a & ;\text{M-arno} \end{cases}$$

Tada gore navedena suma postaje:

$$\sum_{i=1}^{M}s_i^2 = \frac{(M^2-1)}{3}Ma^2$$

Dakle, snaga signala se dobija kao:

$$P_S = \frac{M^2-1}{3}\frac{a^2W_x}{T}$$

Ako u izrazu za vjerovatnoću greške a^2W_x prikažemo na osnovu gornje relacije, dobijamo:

$$P_{e\min} = \frac{M-1}{M} erfc\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{P_s T}{2S_N}}$$

U literaturi je uobičajeno da se ovaj izraz javlja u još dva oblika. Do njih se dolazi na sledeći način:

Umjesto spektralne gustine snage šuma $S_N(\omega)= S_N$ koja je definisana za pozitivne i negativne učestanosti, moguće je uvesti spektralnu gustinu snage šuma na ulazu u prijemnik definisanu samo za pozitivne učestanosti, tako da je $N_0=2S_N$; veličina $1/T=B_T$ predstavlja brzinu signaliziranja; proizvod $P_sT=W_s$ je srednja energija koju M-arni signal razvija na ulazu u prijemnik u jednom signalizacionom intervalu. Sada je:

$$P_{e\min} = \frac{M-1}{M} erfc\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{W_s}{N_0}} = \frac{M-1}{M} erfc\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\frac{P_s}{B_T N_0}}$$

Za prenos poruka polarnim binarnim signalom je M=2, pa je:

$$P_{e\min} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{P_s T}{2S_N}} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{W_s}{N_0}} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{P_s}{B_T N_0}}$$

A ako se u prenošenju poruka koristi unipolarni binarni signal, njegova srednja snaga na ulazu u prijemnik, pri uslovu da se obje binarne brojke šalju sa podjednakom vjerovatnoćom, iznosi:

$$P_s = \frac{1}{2T}\left[\int_0^T s_i^2 x^2(t)dt + 0\right] = \frac{1}{2T}\int_0^T (2a)^2 x^2(t)dt = \frac{2a^2}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{2a^2 W_x}{T}$$

Pa je minimalna vjerovatnoća greške u prenosu unipolarnim signalom:

$$P_{e\min} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{P_s T}{4S_N}} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{W_s}{2N_0}} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{P_s}{2B_T N_0}}$$

PRENOS DIGITALNIH SIGNALA NA DALJINU

Digitalni signali u osnovnom opsegu učestanosti prenose se na daljinu odgovarajućim prenosnim putevima (linkovima). Tokom prenosa ovi signali su izloženi linearnom izobličenju. Slabljenje i dodatna faza koje prenosni put unosi u komponente prenošenih signala zavise od učestanosti i čine signal poslije izvjesne dužine prenosa praktično neupotrebljivim. Radi toga, na određenim mjestima duž linka, dok signal još nije suviše izobličen, vrši se njegovo obnavljanje. Tako obnovljen može da se prenosi dalje.
U principu postoje dvije osnovne metode prenosa digitalnih signala na daljinu:

1. Pomoću pojačavačkih stanica

2. Pomoću obnavljačkih (regenerativnih) stanica

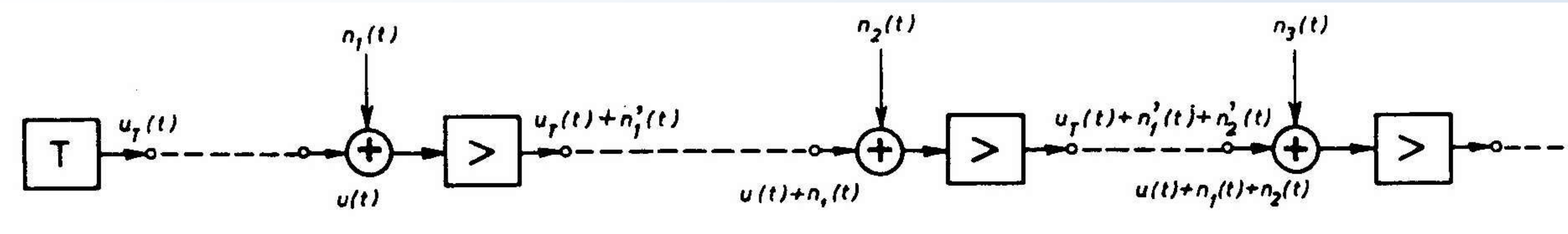
Prema prvom, ukupno rastojanje se podijeli na određeni broj dionica i na određena mjesta duž linka se postavljaju ***pojačavačke stanice****.* U njima se pojačavaju oslabljeni signali i vrši se korekcija linearnog izobličenja pomoću odgovarajućih korektora. Što se tiče slučajnog šuma, on se sa jedne dionice prenosi na drugu, dodaje se šumu te dionice i tako redom duž ostalih dionica. Njegov uticaj u vezi ima ***kumulativan*** karakter i kvalitet prenosa se pogoršava kako broj dionica raste.Ovaj metod se češće koristi u prenosu analognih signala. U načelu može da se primijeni i za prenos digitalnih signala, međutim, za to postoji bolje rješenje.

Ono se sastoji u posebnoj obradi digitalnih signala kroz koju se oni na određenim mjestima duž linka obnavljaju. Skup sklopova u kojima se obavljaju te operacije, nazvaćemo ***obnavljačkom stanicom*** za razliku od pojačavačke stanice koja pojačava signal, ali i šum koji dolazi sa njim. U svakoj obnavljačkoj stanici donosi se odluka o tome koji je signal bio poslat i na osnovu te odluke regenerator generiše nov digitalni signal koji se prenosi dalje duž linka.

Osnovna prednost u prenošenju digitalnih signala na daljinu u odnosu na analogne signale, leži baš u procesu regeneracije. Jer, svaki put u toku toga procesa, generiše se nov signal koji je “očišćen” od šuma sa prethodne dionice. Dakle, signal se zaista obnovi i kumulativni efekat šuma ne postoji.

VJEROVATNOĆA GREŠKE ZA PRENOSNI PUT SA POJAČAVAČKIM STANICAMA

Na slici je prikazan dio jedne veze sa pojačavačkim stanicama:



Pretpostavimo da predajnik **T** šalje polarni binarni signal $u_T(t)$. Neka u trenucima odabiranja njegova amplituda iznosi $\pm U_T$. Pošto se prenese linkom, neka vremenska funkcija $u(t)$ opisuje ovaj signal na kraju dionice, na ulazu u pojačavačku stanicu i neka odbirci ovog signala u trenucima odabiranja imaju amplitude $\pm U$. Kako su pojačanja svih pojačavačkih stanica međusobno jednaka i jednaka slabljenju jedne dionice, to će na ulazu u svaku dionicu signal biti jednak $u_T(t)$, a na njenom kraju $u(t)$.

Pretpostavimo, dalje, da je šum sa prve dionice i šum prve pojačavačke stanice, posmatran izolovano od ostalih dionica i pojačavačkih stanica, ravan $n_1(t)$. Taj šum će se pojačati, na ulazu u drugu dionicu biće $n_1'(t)$ i na kraju te dionice opet će iznositi $n_1(t)$. Ovdje se, sada, ovom šumu dodaje šum druge dionice i druge pojačavačke stanice $n_2(t)$. Na taj način, pobuda na ulazu u drugu pojačavačku stanicu biće:

$$u(t)+n_1(t)+n_2(t)$$

Ako se trasa sastoji od ukupno m dionica, na kraju poslednje (m-te) dionice, na ulazu u prijemnik, postojaće oslabljeni signal $u(t)$ i šum koji je suma šumova iz svih dionoica, tj. stanje će biti opisano izrazom:

$$u_R(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{m} n_i(t) = u(t) + n(t)$$

Odabiračem se u sklopu za odlučivanje uzimaju odbirci ovog signala i na osnovu njih se donosi odluka.

Ukupan šum se sastoji od m međusobno nezavisnih komponenti $n_1(t)$, $n_2(t)$, ..., $n_m(t)$ i svaki od njih predstavlja Gaussov slučajni proces, pa će i njhova suma predstavljati Gaussov slučajni proces. Uz uslov da je srednja vrijednost svakog od šumova jednaka 0, to će i srednja vrijednost ukupnog šuma $n(t)$ biti jednaka 0. Isto tako, ako su varijanse raspodjele međusobno jednake:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2 = \sigma^2$$

varijansa ukupnog šuma je jednaka:

$$\sigma_e^2 = \overline{n^2(t)} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_m^2 = m\sigma^2$$

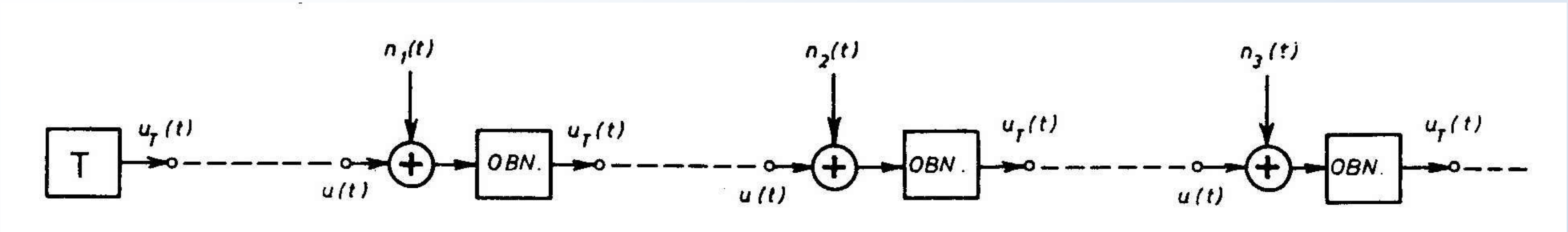
Sada možemo da izračunamo vjerovatnoću greške na kraju veze prema ranije izvedenom izrazu:

$$P_{em} = \frac{1}{2} erfc \frac{U}{\sqrt{2}\sigma_e} = \frac{1}{2} erfc \frac{U}{\sqrt{2m}\sigma}$$

Iz dobijene relacije se vidi kako sa porastom broja dionica m vjerovatnoća greške na kraju te veze raste.

VJEROVATNOĆA GREŠKE ZA PRENOSNI PUT SA OBNAVLJAČKIM STANICAMA

Na slici je prikazan dio veze sa obnavljačkim stanicama:



I ovdje pretpostavimo da se šalje polarni binarni signal $u_T(t)$ čiji odbirci imaju amplitude $\pm U_T$. Na kraju dionice signal će biti $u(t)$, a amplitude njegovih odbiraka $\pm U$. Samo, kako je riječ o regeneraciji signala, to je pobuda na ulazu prvog obnavljača:

$$u(t)+n_1(t)$$

na ulazu drugog je:

$$u(t)+n_2(t)$$

i tako redom sve do kraja veze, pa na ulazu u prijemnik iznosi:

$$u(t)+n_m(t)$$

Pošto se na kraju svake dionice vrši ***regeneracija*** signala, ne postoji kumulativni efekat šuma (može doći do greške, ali ukupan šum je jednak šumu iz poslednje dionice).

Ako se smatra da šumovi $n_1(t)$, $n_2(t)$, ..., $n_m(t)$ predstavljaju Gaussove slučajne procese čija je srednja vrijednost nula, varijanse σ^2 su jednake i međusobno nezavisne, tada će vjerovatnoće greške na pojedinim dionicama biti međusobno jednake:

$$P_{e1} = P_{e2} = ... = P_{em} = P_e = \frac{1}{2} erfc \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Ako napravimo grešku u jednoj obnavljačkoj stanici, ta greška se prosleđuje do kraja. Međutim, treba uočiti sledeće. Ako se u nekoj obnavljačkoj stanici učini greška u odlučivanju, onda se o tom pogrešnom digitu i na nekim od sledećih stanica mogu donositi opet pogrešne odluke. Kako je riječ o prenosu binarnih signala, digit koji je prošao kroz paran broj pogrešnih odluka, na kraj veze će da stigne kao tačan, a ukoliko je taj broj neparan, donesena odluka će biti pogrešna.

Uzimajući ovo u obzir, izraz za vjerovatnoću greške na kraju veze možemo da izvedemo na sledeći način:

- Početna pretpostavka je da se greška pravi u jednoj obnavljačkoj stanici, a na ostalima ne. Tada je vjerovatnoća greške:

$$P_e \left(1 - P_e\right)^{m-1}$$

- Pretpostavimo sada da se u svakoj od ***k*** specificiranih obnavljačkih stanica pravi greška sa vjerovatnoćom P_e, a u ostalim ***m-k*** se donosi tačna odluka sa vjerovatnoćom 1- P_e, vjerovatnoća greške je:

$$P_e^k \left(1 - P_e\right)^{m-k}$$

Međutim, ima više ovakvih mogućnosti u kojima se griješi na ***k*** stanica, a na ***m-k*** ne. Njihov broj je jednak broju načina na koje je moguće napraviti grupe od po ***k*** elemenata iz skupa od ***m*** različitih elemenata (broj kombinacija bez ponavljanja k-te klase od m elemenata):

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Svaka od ovih mogućnosti je nezavisna od ostalih, pa je vjerovatnoća da se bilo koja od njih desi jednaka sumi vjerovatnoća da se desi svaka pojedinačno, tj.

$$P_e(k) = \binom{m}{k} P_e^k (1-P_e)^{m-k}$$

Ovo je poznata ***binomna rospodjela***. Ona predstavlja vjerovatnoću da se od dva različita moguća ishoda jednog događaja, *k* istih desi u ukupno *m* nezavisnih pokušaja.

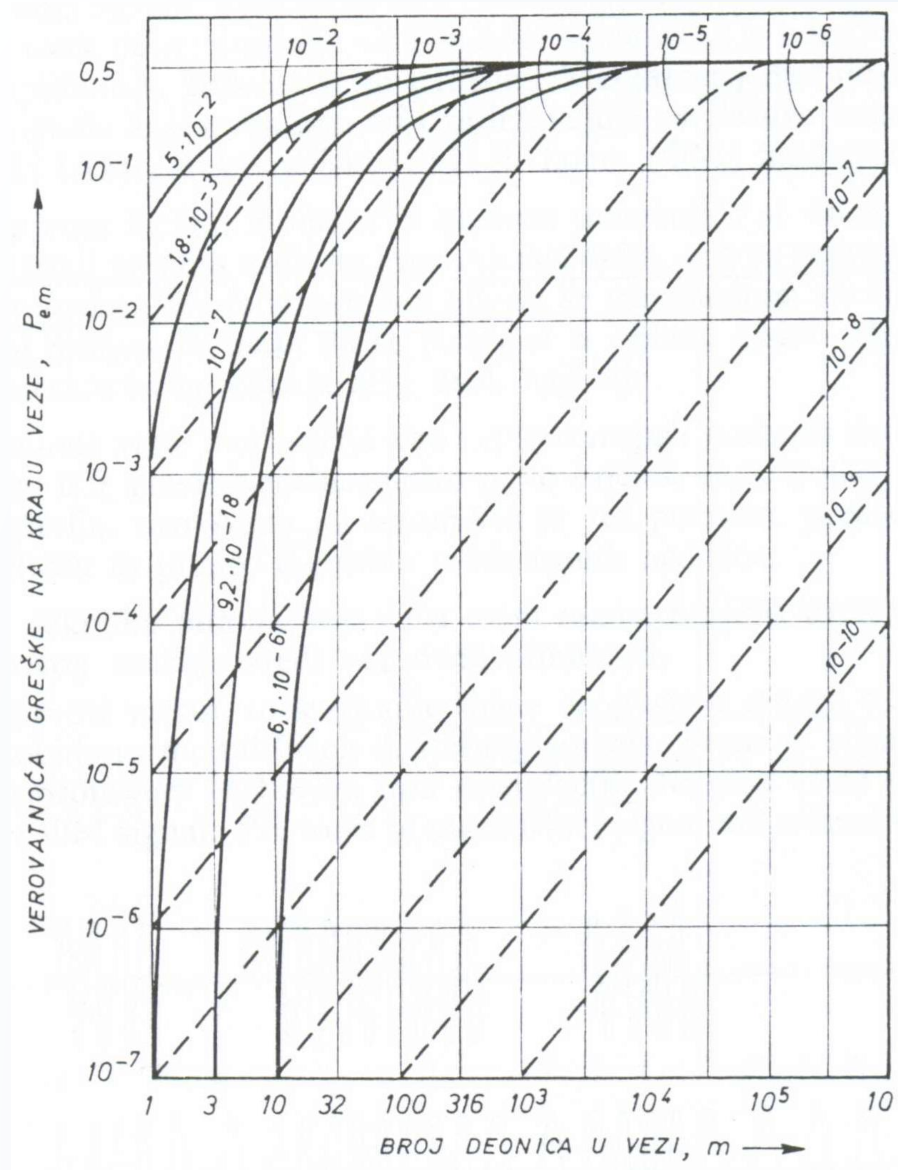
Sada je vjerovatnoća greške P_{em} na kraju veze sa *m* obnavljačkih stanica jednaka zbiru vjerovatnoća $P_e(k)$ za slučaj da je k=1, 3, 5, ..., $k_m \leq m$ dakle, za sve neparne vrijednosti k od 1 do m. Sada je, konačno, tražena vjerovatnoća greške:

$$P_{em} = mP_e(1-P_e)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} P_e^3 (1-P_e)^{m-3} + \ldots + =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ (k-neparno)}}^{m} \binom{m}{k} P_e^k (1-P_e)^{m-k}$$

U slučaju kada je $mP_e << 1$, ovaj obrazac približno glasi $P_{em} \cong mP_e$, odnosno:

$$P_{em} \cong mP_e = \frac{m}{2} erfc \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$



Ako uporedimo izraze za vjerovatnoću greške u slučaju pojačavačkih i obnavljačkih stanica, vjerovatnoća greške znatno sporije raste sa porastom broja dionica *m* za vezu sa obnavljačkim stanicama. Stoga je prenos signala na daljinu sa obnavljačkim stanicama znatno povoljniji od prenosa sa pojačavačkim stanicama.

Na slici je prikazan primjer vrijednosti vjerovatnoće greške P_{em} na kraju veze od *m* dionica. Puno izvučene linije važe za vezu sa pojačavačkim stanicama, a isprekidane za vezu sa obnavljačkim stanicama. Parametar familije krivih je verovatnoća greške na jednoj dionici.