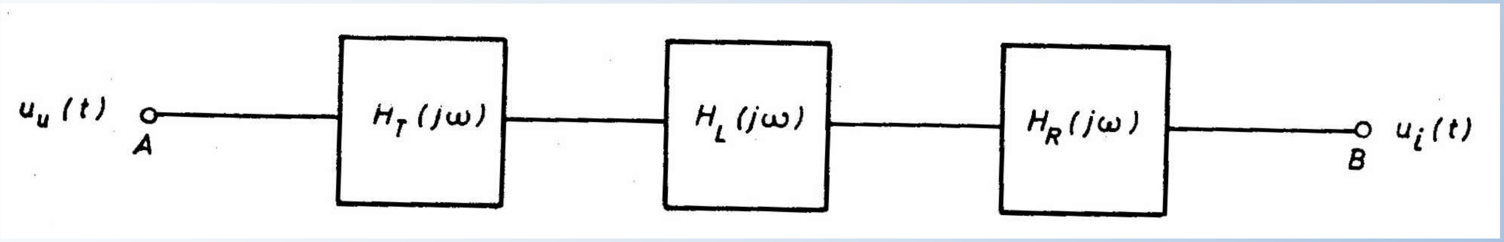
PRENOS BEZ ISI U REALNIM SISTEMIMA

Za razliku od idealnih sistema (koji fizički nije moće realizovati) u kojima se ISI jednostavno eliminiše podešavanjem signalizacionog intervala propusnom opsegu filtra, u realnim sistemima se ISI eliminiše na drugi način. U tu svrhu definisani su ***Nyquist***-ovi kriterijumi koji preciziraju uslove koje treba da ispune sistemi za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti kako bi se izbjegla pojava intersimbolske interferencije.

Sistem od tačke A do B u realnom slučaju ima tri dijela:

1. Predajni filtar (prenosna funkcija $H_T(j\omega)$)
2. Linija veze (prenosna funkcija $H_L(j\omega)$)
3. Prijemni filtar (prenosna funkcija $H_R(j\omega)$)



Pretpostavimo digitalni signal u obliku:

$$u_u(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k x(t - kT)$$

Riječ je o povorci od 2N+1 elemenata, trajanje signalizacionog intervala je $T=1/f_s$, a_k je vrijednost značajnog parametra u k-tom signalizacionom intervalu, i u slučaju M-arnog signala može da ima jednu od M mogućih vrijednosti.

x(t) se naziva ***standardni signal.*** To je standardni oblik impulsa koji predajnik šalje kada je $a_o=1$, dok su sve ostale vrijednosti $a_k=0$, tj. takav oblik signala koji opisuje impuls u jednom signalizacionom intervalu.

Ako je Fourier-ova transformacija signala $U_u(j\omega)=F\{u_u(t)\}$, i $U_i(j\omega)=F\{u_i(t)\}$,

onda je:

$$U_i(j\omega)=H_T(j\omega)\, H_L(j\omega)\, H_R(j\omega)\, U_u(j\omega)= H(j\omega)\, U_u(j\omega)$$

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) U_u(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Pošto je:

$$U_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N}^{N} a_k x(t-kT)e^{-j\omega t}dt = \sum_{k=-N}^{N} a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}$$

to je:

$$u_i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\sum_{k=-N}^{N} a_k X(j\omega)e^{-j\omega kT}e^{j\omega t}d\omega = \sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega$$

Uvedimo sledeću oznaku:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega(t-kT)}d\omega = y(t-kT)$$

kao **odziv sistema na pobudu standardnim signalom** *x(t).* Sada se izlazni signal može predstaviti kao:

$$u_i(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k y(t-kT)$$

Ovaj signal dolazi na sklop za odlučivanje. On zavisi od vremenskog oblika standardnog odziva, pa njegov oblik treba podesiti tako da u trenucima odlučivanja ne bude ISI. Pri tom, cilj je da značajni parametar digitalnog signala u_i(t) u složenoj funkciji u jednom određenom signalizacionom intervalu bude potpuno nezavisan od onoga što se dešava u ostalim signalizacionim intervalima.

Fourier-ovu transformaciju funkcije *y* (t) označimo sa Y(jω):

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

Dakle, proizvod ove četiri funkcije određuje standardni odziv *y(t).* Funkcija X(jω) vezana je za proces generisanja standardnog digitalnog signala na strani predaje i na nju se može uticati do izvjesnih granica. Funkcija prenosa linijskog dijela sistema H_L (jω) praktično je uvijek zadata i nju ne možemo da mijenjamo. Ali, možemo da projektujemo filtre, tj. da utičemo na funkciju prenosa predajnog filtra H_T (jω) i na funkciju prenosa prijemnog filtra H_R (jω) tako da se dobije funkcija Y(jω) čija će inverzna Fourier-ova transformacija *y*(t) obezbijediti odsustvo intersimbolske interferencije. **Ova dva filtra se često nazivaju *filtrima za oblikovanje impulsa*, i određuju se na osnovu Nyquist-ovih kriterijuma.**

Postoje 3 različita Nyquist-ova kriterijuma, u zavisnosti od tog šta se uzima kao značajni parametar signala:

- **Prvi Nyquist-ov kriterijum:** odnosi se na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu ***amplituda*** odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala.
- **Drugi Nyquist-ov kriterijum:** definiše uslove za sisteme u kojima je za tačan prenos potrebno da ne dođe do promjene ***trajanja*** značajnog stanja signala.
- **Treći Nyquist-ov kriterijum:** govori o mogućnosti da se izbjegne ISI u sistemima u kojima se kao značajni parametar signala odabere površina koju signal obuhvata u jednom signalizacionom intervalu. Ova situacija se rijetko koristi i ima više teorijski nego praktični značaj.

PRVI NYQUIST-OV KRITERIJUM

Prvi Nyquist-ov kriterijum se odnosi na prenos digitalnih signala kod kojih se odluka na prijemu donosi na osnovu amplituda odbiraka uzetih u sredini signalizacionih intervala. Taj kriterijum kaže da u ovakvom sistemu prenosa neće doći do ISI ako standardni odziv *y(t)* zadovoljava uslov da je $y(0)=y_0$, gdje je y_0 konstanta različita od 0, i ako su sve vrijednosti $y(mT)$ ravne nuli, gdje je *m* bilo koji pozitivan ili negativan cio broj, a T trajanje signalizacionog intervala.

Analitički izraz za prvi Nyquist-ov kriterijum bi bio:

$$y(mT) = y_0 \delta_{m0}$$, gdje je $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}$$ ***Kronecker***-ova delta

Pođimo od analitičkog oblika digitalnog signala na ulazu u sklop za odlučivanje:

$$u_i(mT) = \sum_{k=-N}^{N} a_k y[(m-k)T] = y_0 \sum_{k=-N}^{N} a_k \delta_{m-k,0}$$

Ako ovo dalje razvijemo:

$$u_i(mT) = y_0(a_{-N}\delta_{m+N,0} + \cdots + a_m\delta_{m-m,0} + \cdots + a_N\delta_{m-N,0})$$

dobijamo:

$$u_i(mT) = a_m y_0 = a_m y(0)$$

Kao što se vidi, vrijednost primljenog signala u *m*-tom trenutku odabiranja zavisi samo od onoga što je u tom signalizacionom intervalu bilo poslato od predajnika (ISI je jednaka nuli) ukoliko standardni odziv zadovoljava uslov koji definiše prvi Nyquist-ov kriterijum.

Polazeći od formulacije Nyquist-ovog kriterijuma u domenu vremena, možemo odrediti i odgovarajuću formu u domenu učestanosti kako bismo definisali uslov koji treba da zadovolji funkcija prenosa sistema kako ne bi došlo do ISI.

$$y(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega mT}d\omega$$

$$y(mT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y[j(\omega+n\omega_s)]d\omega$$

Kako bi bio ispunjen Prvi Nyquist-ov kriterijum, tj. $y(\mathrm{mT}) = y_0\delta_{m,0}$, u gornjem izrazu je potrebno da bude:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}Y[j(\omega+n\omega_s)]=\frac{2\pi}{\omega_s}y_0=Ty_0 \qquad *_2$$

Ovo je formulacija Prvog Nyquist-ovog kriterijuma u domenu učestanosti. Tada je:

$$y(mT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\frac{2\pi m}{\omega_s}\omega}\frac{2\pi}{\omega_s'}y_0d\omega=y_0\frac{\sin m\pi}{m\pi}=y_0\delta_{m0}$$

što potvrdjuje Prvi Nyquist-ov kriterijum.

Dekle, prethodni uslov nije samo dovoljan, već i potreban uslov za zadovoljenje Prvog Nyquist-ovog kriterijuma.

Ukoliko kompleksni spektar standardnog odziva zadovoljava uslov $*_2$, ISI u trenucima odabiranja (na sredini signalizacionog intervala) biće jednaka nuli. Dobijeni izraz u kompleksnom domenu možemo da iskoristimo za projektovanje sistema za prenos, saglasno relaciji:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=H_T(j\omega)H_L(j\omega)H_R(j\omega)X(j\omega)$$

Ako pretpostavimo da je standardni signal koji predstavlja digitalni signal u jednom signalizacionom intervalu delta impuls ($x(t)=\delta(t)$), tada je $Y(j\omega)=H(j\omega)$

Uzimajući u obzir uslov $*_2$:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)=A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

odnosno:

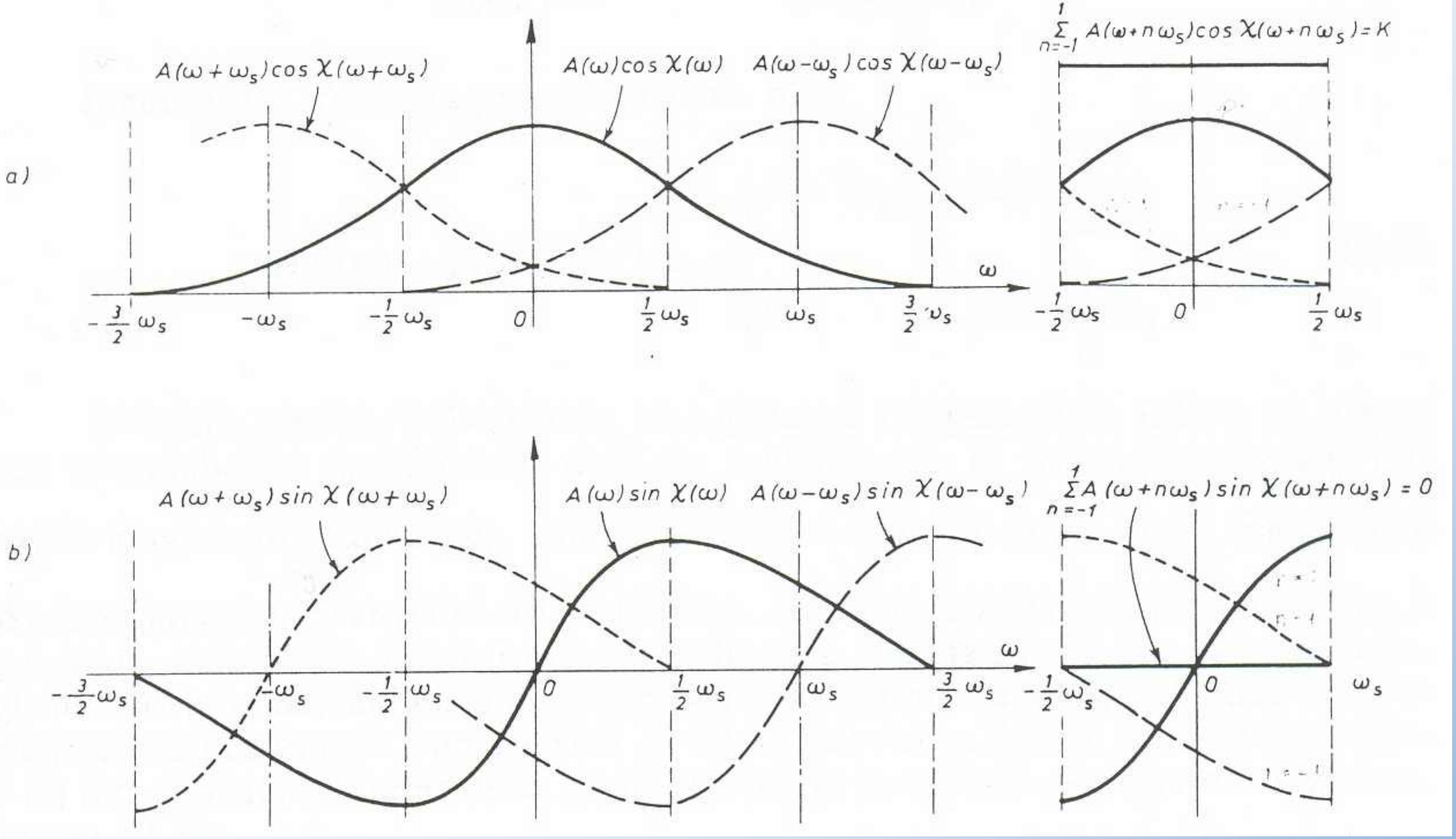
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega+n\omega_s)]=\sum_{-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)e^{j\chi(\omega+n\omega_s)}=\frac{2\pi}{\omega_s}y_0=Ty_0=K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Ako razdvojimo realni i imaginarni dio gornje relacije, dolazi se do uslova:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)\cos\chi(\omega+n\omega_s)=K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega+n\omega_s)\sin\chi(\omega+n\omega_s)=0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Ovaj set uslova mora da zadovoljavaju amplitudska i fazna karakteristika sistema za prenos da ne dođe do intersimbolske interferencije. Na slici *a*) je ilustrovan realni dio, a na *b*) imaginarni dio funkcije prenosa sistema koji zadovoljava prvi Nyquist-ov kriterijum.



SISTEMI KOJI ZADOVOLJAVAJU PRVI NYQUIST-OV KRITERIJUM

SLUČAJ IDEALNOG SISTEMA

Pretpostavimo da imamo sistem prenosa kome su amplitudska i fazna karakteristika date sa:

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} = \omega_c \\ 0, \quad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases} \qquad \chi(\omega)=\begin{cases} \chi(\omega), |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} = \omega_c \\ 0, \quad |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Pošto je ovako definisana funkcija prenosa različita od 0 samo u intervalu $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$, jasno je da će sume:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\cos\chi(\omega + n\omega_s) = K, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega + n\omega_s)\sin\chi(\omega + n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

imati samo po jedan član, pa se navedeni uslovi svode na:

$$A(\omega)\cos\chi(\omega) = K, \text{ i } A(\omega)\sin\chi(\omega) = 0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

tj.

$$A(\omega) = K = y_0, \text{ i } \chi(\omega) = 0, \qquad |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Na osnovu toga je jasno da je funkcija prenosa sistema u opsegu učestanosti $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$ koja zadovoljava Prvi Nyquist-ov kriterijum oblika:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} K = Ty_0, & |\omega| \le \frac{1}{2}\omega_s \\ 0, & |\omega| \ge \frac{1}{2}\omega_s \end{cases}$$

Uočava se da je sistem prenosa koji ima minimalni propusni opseg, i u kome nema intersimbolske interferencije, ustvari idealni sistem prenosa. Stoga on ima više teorijski nego praktični značaj, jer uslov idealnosti mora biti strogo zadovoljen.

Sistemi koji zadovoljavaju Nyquist-ov kriterijum i mogu se fizički realizovati (što se postiže na račun proširenja propusnog opsega do najviše dva puta) nazivaju se ***Nyquist-ovi slučajevi.*** Takvih sistema je beskonačno mnogo.

Nyquist-ovi slučajevi

Riječ je o sistemima propusnicima niskih učestanosti kod kojih je propusni opseg proširen u odnosu na idealni sistem. Kod takvih sistema je:

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega|\le \omega_g \\ 0, & |\omega|> \omega_g \end{cases} \qquad , \frac{1}{2}\omega_s \le \omega_g \le \omega_s$$

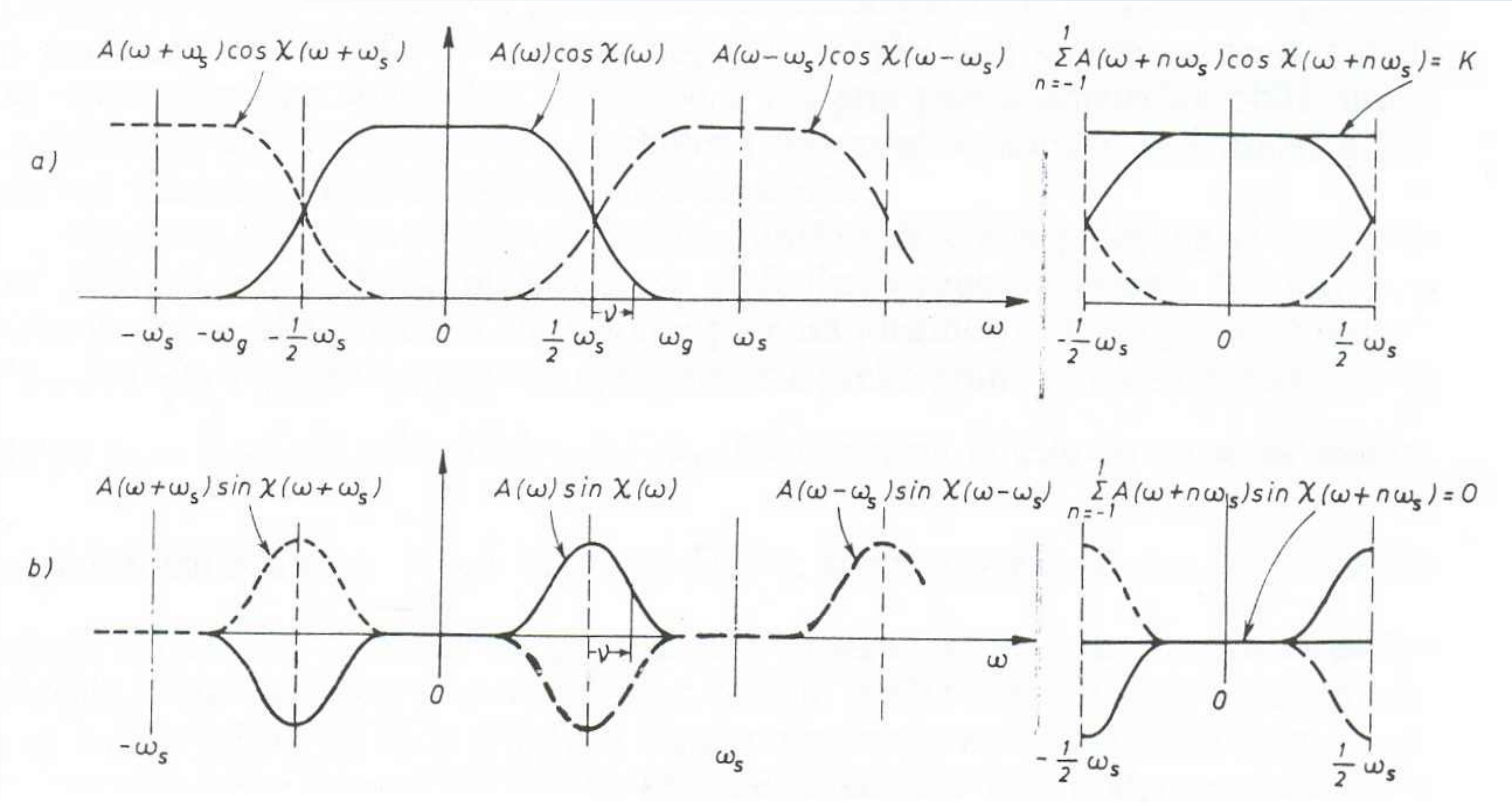
Ograničenje u realizaciji ovakvih sistema se ogleda u tome da se minimalni propusni opseg (slučaj idealnog sistema) može proširiti najviše 100%.

Amplitudska i fazna karakteristika ovakvog realnog sistema zadovoljavaju uslove:

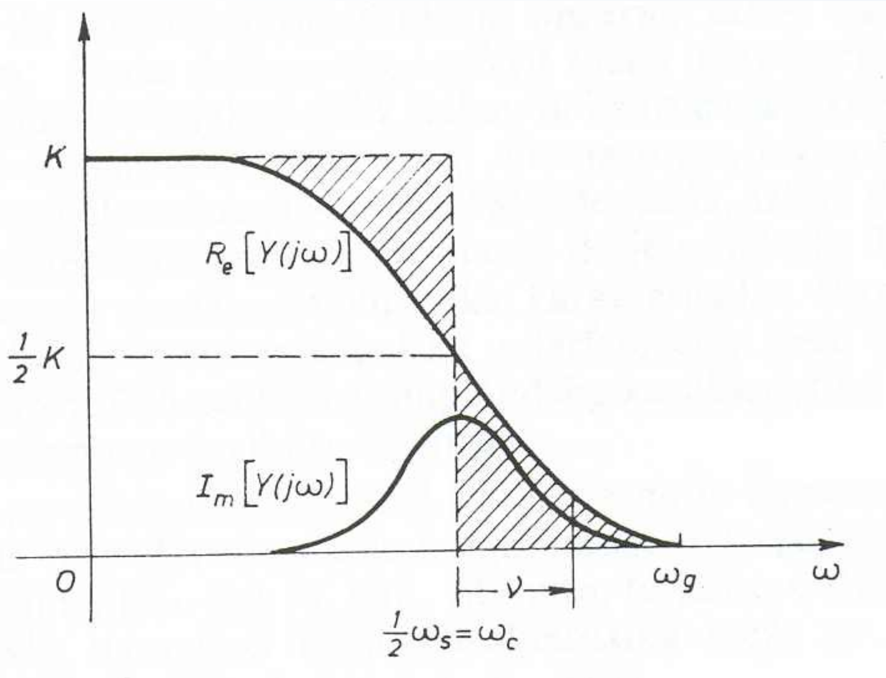
$$A(\omega)\cos\chi(\omega)+A(\omega-\omega_s)\cos\chi(\omega-\omega_s)=K, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)\sin\chi(\omega)+A(\omega-\omega_s)\sin\chi(\omega-\omega_s)=0, \qquad 0\le\omega\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Odnosno, realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju oblik kao na slici:



Izdvojimo samo jedan detalj sa prethodne slike:



Kao što se vidi sa ove slike i datih izraza, realni i imaginarni dio funkcije prenosa imaju određenu simetriju. Naime, realni dio može da se shvati kao da je sastavljen iz dva dijela: iz pravougaonog oblika, prikazanog isprekidanom linijom, i zaobljenog oblika, koji je neparno simetričan u odnosu na tačku ($\omega_s/2$, $K/2$). Pri tome, zaobljena kriva linija definiše osjenčenu površinu koja se oduzima od pravougaonog oblika i dodaje iznad učestanosti $\omega_c = \omega_s/2$ kako bi se dobio realni dio funkcije prenosa. Što se tiče imaginarnog dijela funkcije prenosa, on je parno simetričan u odnosu na pravu $\omega=\omega_c= \omega_s/2$.

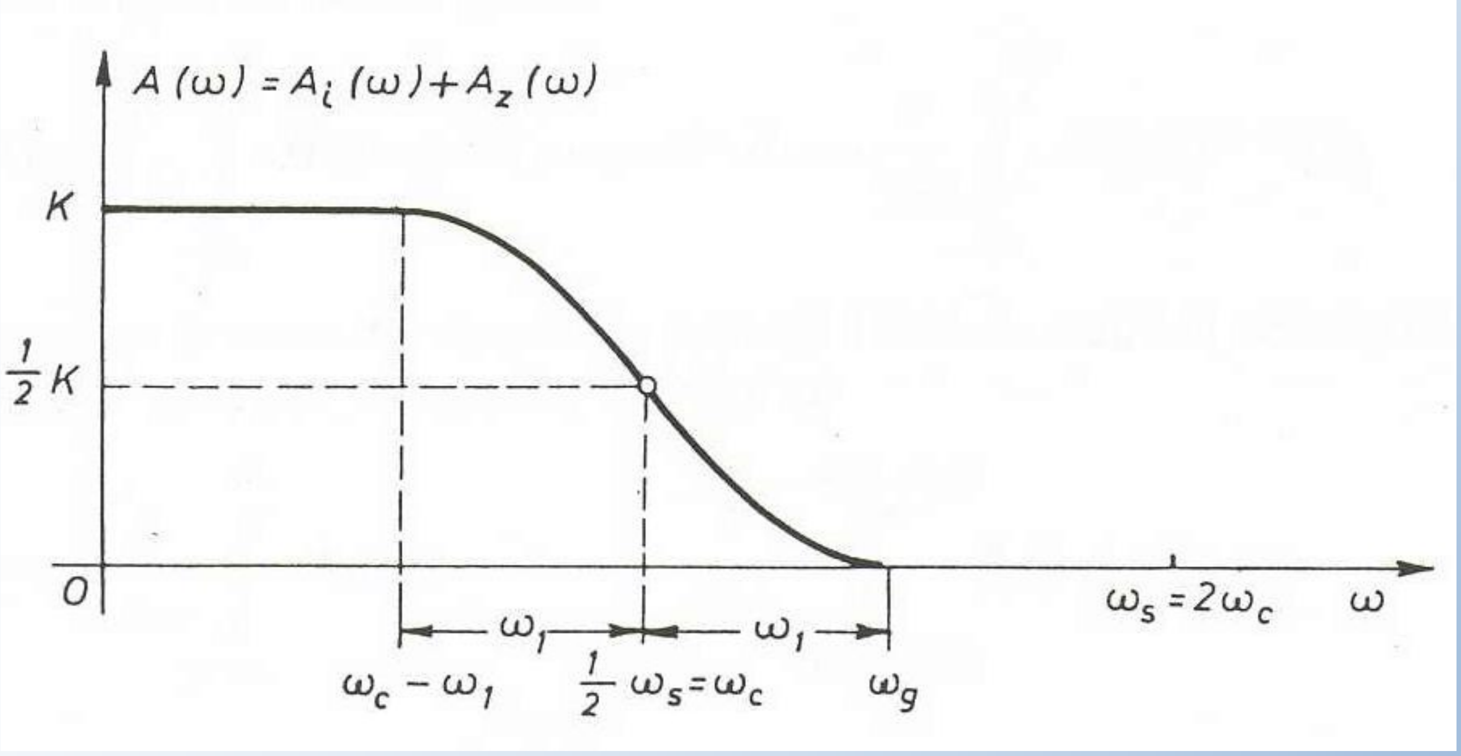
Kako je $\omega_s/2 = \omega_c \leq \omega_g \leq \omega_s = 2\,\omega_c$, Nyquist je zaključio da je moguće napraviti bezbroj funkcija prenosa koje obezbjeđuju prenos bez intersimbolske interferencije. Pri tome je definisao tzv. ***Nyquist-ove uslove simetrije*** koje te funkcije prenosa moraju zadovoljavati. Oni glase:

- Ako se pođe od idealnog sistema prenosa za koji je realni dio $Re[H(j\omega)]$ dat pravougaonim oblikom, a imaginarni dio $Im[H(j\omega)]$ je 0, i doda li se prvom neparno simetrično zaobljenje u odnosu na tačku $(\omega_s/2,\ K/2)$, a drugom parno simetričan oblik u odnosu na pravu $\omega=\omega_c= \omega_s/2$, uslovi za prenos bez interferencije među simbolima (Prvi Nyquist-ov kriterijum) biće uvijek ispunjeni.

PRIMJERI NYQUIST-OVIH SISTEMA ZA PRENOS

Funkcije prenosa sa kosinusoidalnim zaobljenjem

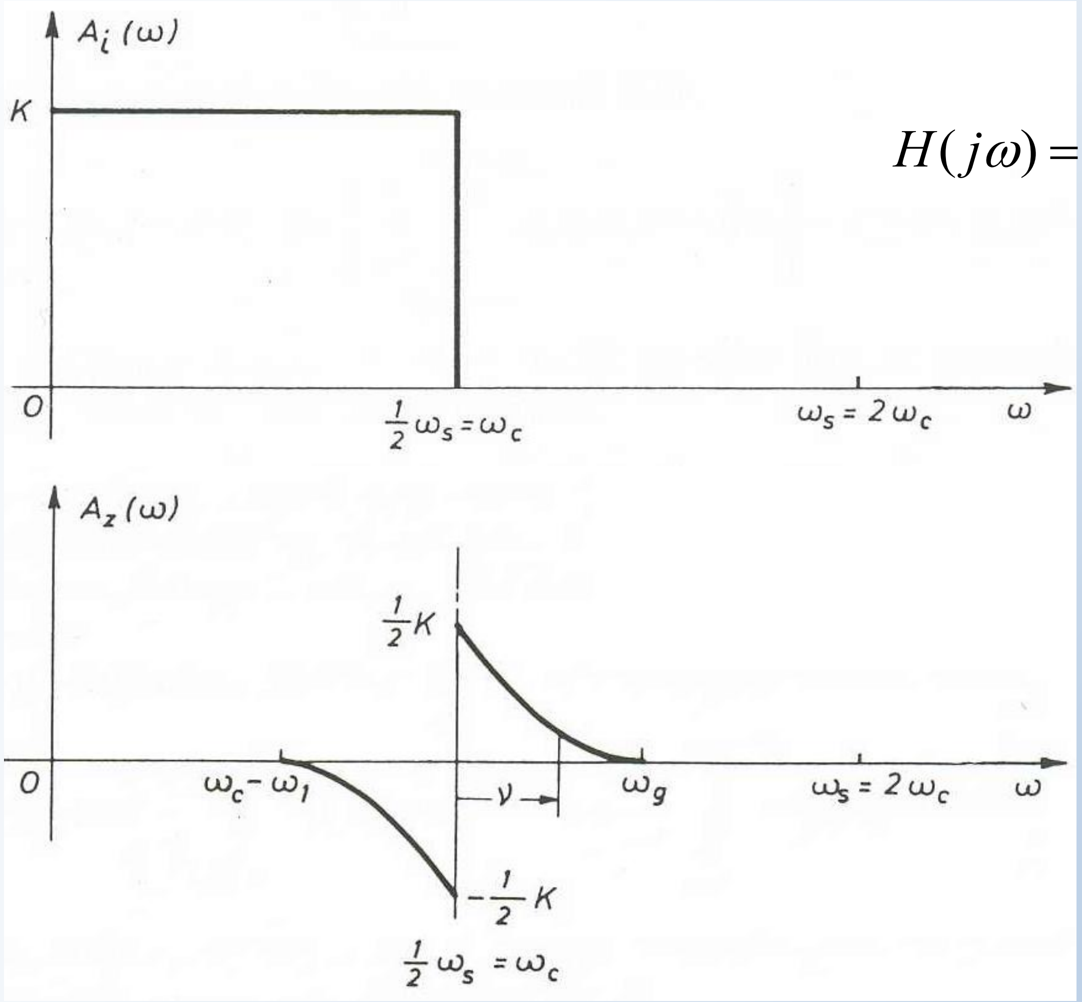
Razmotrimo jednu klasu funkcija prenosa koje zadovoljavaju Prvi Nyquist-ov kriterijum. Pretpostavimo da je kod njih fazna funkcija ravna nuli ($\chi(\omega)=0$, tj. nema kašnjenja), a da amplitudska karakteristika ima opšti oblik kao na slici. Idealnom sistemu prenosa je dodato ***neparno*** zaobljenje i to po zakonu kosinusa.



Provjerimo da li u trenucima odabiranja ima ISI. Potrebno je pronaći odziv takvog sistema na pobudu u vidu delta impulsa (x(t)=δ(t)).

Pretpostavljena amplitudska karakteristika A(ω) može da se razloži na dvije karakteristike:

1. Idealni dio sistema označen sa $A_i(\omega)$
2. Izobličenje u odnosu na idealnu karakteristiku označeno sa $A_z(\omega)$



$$H(j\omega) = A(\omega) = A_i(\omega) + A_z(\omega)$$

Odziv ovakvog sistema je:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-(\omega_c+\omega_1)}^{-(\omega_c-\omega_1)}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Poslednja dva integrala su u smislu vrijednosti jednaka, pa se dobija:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}A_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c+\omega_1}A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]=y_i(t)+y_z(t)$$

Dobijeni odziv se sastoji od dvije komponente. Jedna je posljedica idealnog dijela karakteristike prenosa, a druga je od zaobljenja.

Kako je $A_i(\omega)=K$, to je odziv na idealni dio prenosne karakteristike sistema:

$$y_i(t)=K\frac{2\omega_s}{2\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}=\frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}=y_0\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

Komponenta odziva koja potiče od zaobljenja karakteristike je:

$$y_z(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_1}^{\omega_c} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\omega_c}^{\omega_c+\omega_1} A_z(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$$

Uvedimo pomjeraje u odnosu na centralnu učestanost:

$$y_z(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c-\nu)e^{j\omega_c t}e^{-j\nu t}d\nu + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c+\nu)e^{j\omega_c t}e^{j\nu t}d\nu\right]$$

Posmatrana funkcija zadovoljava Nyquist-ov kriterijum simetrije, tj. zaobljenje je neparno simetrično, pa važi da je:

$$A_z(\omega_c-\nu) = -A_z(\omega_c+\nu)$$

Odavde se dobija da je:

$$y_z(t) = \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c-\nu)\sin\nu t\, d\nu$$

Ukupan odziv sistema je:

$$y(t) = y_i(t) + y_z(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} A_z(\omega_c - \nu)\sin\nu t\, d\nu$$

Ako pretpostavimo kosinusoidalno zaobljenje tako da je:

$$A_z(\omega) = K\begin{cases} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \le |\omega| \le \omega_c \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c \le |\omega| \le \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

ukupna prenosna funkcija postaje:

$$A(\omega) = K\begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c - \omega_1 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\dfrac{|\omega| - \omega_c}{\omega_1}, & \omega_c - \omega_1 \le |\omega| \le \omega_c + \omega_1 \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c + \omega_1 \end{cases}$$

Uobičajeno je da se za ovakve zaobljene karakteristike definiše ***faktor zaobljenja*** ("roll off") kao odnos ω_1 i ω_c.

$$\xi = \frac{\omega_1}{\omega_c}$$

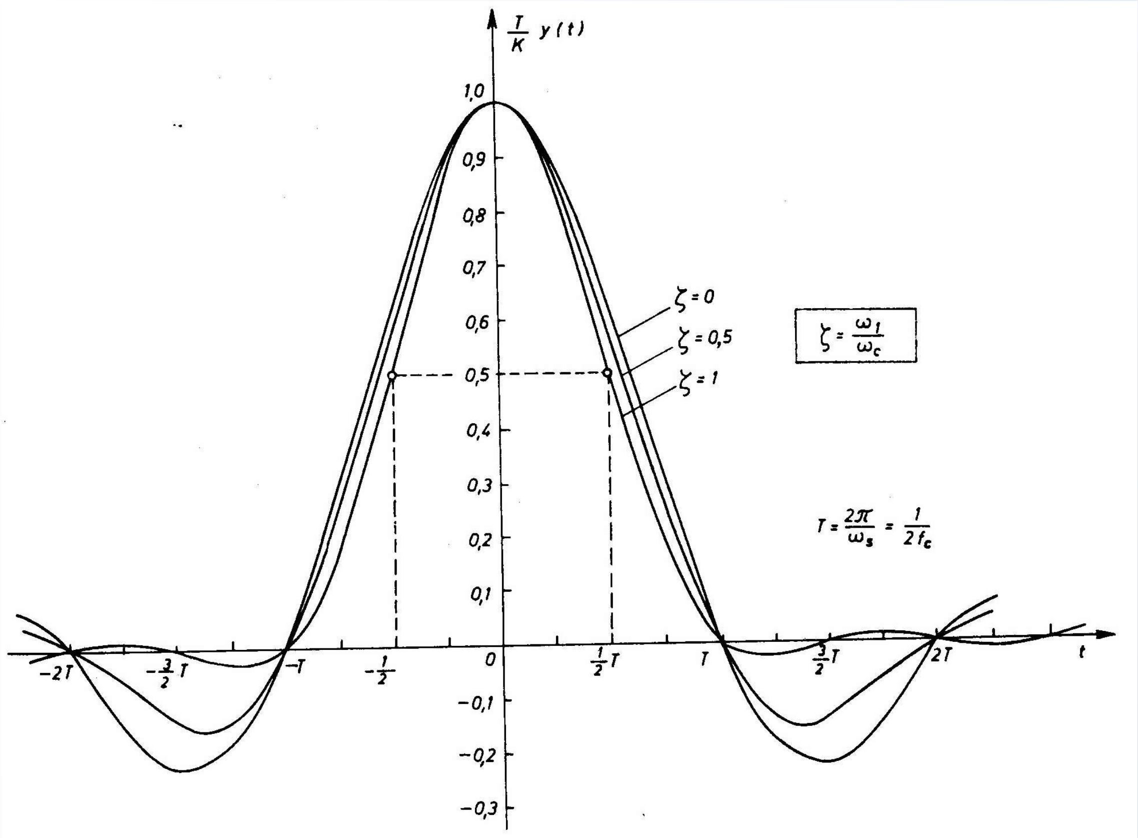
Kod sistema iz grupe Nyquist-ovih slučajeva ovaj faktor se kreće u granicama od 0 (idealan sistem) do 1 (maksimalno proširenje sistema, duplo veće od idealnog).

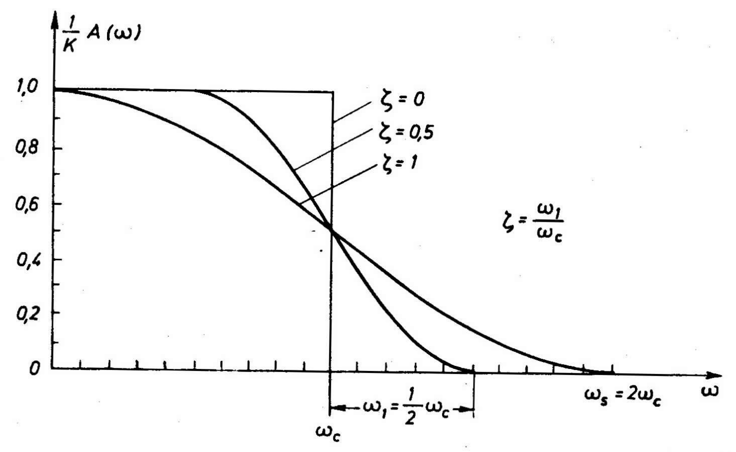
Da bi se pronašao traženi odziv sistema čija amplitudska karakteristika ima kosinusoidalno zaobljenje na pobudu δ impulsom potrebno je u izraz za odziv sistema uvrstiti karakteristiku $A_z(\omega)$, pa se konačno dobija:

$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_1} K\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{\nu}{\omega_1}\right)\sin\nu t\, d\nu$$

$$y(t) = \frac{K}{T}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\frac{\cos\omega_1 t}{1-\left(\frac{2\omega_1 t}{\pi}\right)^2}, \quad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{2f_c}$$

Za različite vrijednosti roll off faktora dobijaju se različiti oblici odziva. Neki od njih su prikazani na slici, i to: slučaj idealne amplitudske karakteristike za koji je faktor zaobljenja ξ=0, slučaj u kome je faktor zaobljenja ξ=0,5 i slučaj u kome je ξ= 1. Prikazane su i odgovarajuće amplitudske karakteristike ovih sistema.





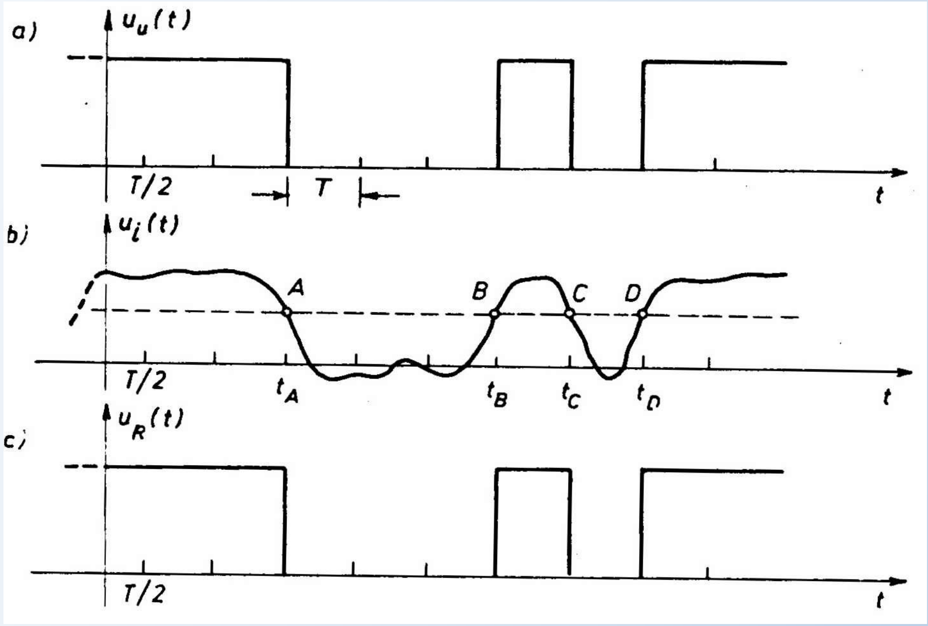
Analizirajući impulsni odziv vidi se da se unošenjem zaobljenja u amplitudsku karakteristiku nije izmijenio ni položaj nula odziva u odnosu na odziv idealnog sistema, ni maksimalna vrijednost odziva $y(0)=y_0=K/T$. To znači da neće postojati intersimbolska interferencija.

Pri tome, uticaj zaobljenja je takav da je amplituda oscilacija u »repu« odziva utoliko manja ukoliko je faktor zaobljenja ξ bliži vrijednosti 1. To znači da ako i dođe do intersimbolske interferencije iz bilo kojih razloga, njen uticaj će biti manji ako postoji zaobljenje.

Posebnu pažnju zaslužuje karakteristika čiji je faktor zaobljenja $\xi=1$. Ovakva karakteristika naziva se često i karakteristikom "*podignuti kosinus*". Sa slike se vidi da su u tom slučaju amplitude oscilacija u odzivu ne samo smanjene već se u odzivu javljaju i dodatne nule u trenucima $\pm 3T/2$, $\pm 5T/2$, $\pm 7T/2$, ...$(2n+1)T/2$, a u tačkama $\pm T/2$ relativna amplituda odziva iznosi 0,5. To ima poseban značaj i na to ćemo se osvrnuti onda kad bude riječi o Drugom Nyquist-ovom kriterijumu.

DRUGI NYQUIST-OV KRITERIJUM

Kada je zadovoljen Prvi Nyquist-ov kriterijum onda je sigurno da u trenucima koji se nalaze u sredini signalizacionih intervala primljenog signala ne postoji intersimbolska interferencija. Na taj način amplituda signala u ovim tačkama ne podliježe izobličenjima ove vrste. Drugi Nyquist-ov kriterijum govori o tome kako je moguće obezbijediti prenos u kome ne dolazi do izobličenja trajanja značajnih stanja signala. Očigledno, ovo će biti ispunjeno ako trenuci promjene značajnih stanja signala budu bez uticaja ISI. Za signale koji imaju dva takva stanja Nyquist kaže: "Kriterijum za savršen prenos je da interval između trenutaka kada struja prolazi kroz srednju vrijednost (ili neku drugu specificiranu vrijednost) treba biti isti kao i odgovarajući interval na strani predaje". Takva situacija je ilustrovana na sledećoj slici:.



Poslati signal $u_u(t)$ koji ima dva značajna stanja izobliči se tokom prenosa. Neka na ulazu u sklop za odlučivanje izgleda otprilike kao na slici b). Pretpostavimo da je prag odlučivanja u prijemniku postavljen na ispravno odabranu vrijednost označenu isprekidanom linijom. Ako u trenucima t_A, t_B, t_C i t_D ne postoji intersimbolska interferencija, prijemnik će donositi ispravne odluke o trajanju značajnih stanja signala i signal na njegovom izlazu $u_R(t)$ će izgledati kao na slici c).

Iz ovih razmatranja se može zaključiti:

- promjena značajnih stanja smije da se odigrava uvijek na ivicama signalizacionih intervala, dakle, u trenucima *t* koji su jednaki pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od *T/2,* gdje *T* predstavlja trajanje signalizacionog intervala.

-**Drugi Nyquist-ov kriterijum biće uvijek zadovoljen ako standardni odziv *y(t)* bude imao vrijednost $y_1/2$ u trenucima t=±T/2 i ako u svim ostalim trenucima koji su ravni pozitivnim i negativnim neparnim multiplima od T/2 bude jednak 0.** Izrečeni stav obezbjeđuje da u svakoj od tačaka na ivicama signalizacionih intervala, amplituda složenog signala ima ili vrijednost 0, ili $y_1/2$, ili y_1. Ako prag odlučivanja u prijemniku postavimo na vrijednost $y_1/2$, prijemnik će registrovati trenutke promjene u kojima se značajno stanje mijenja iz 0 u 1 i obratno.

Ovoj formulaciji treba dodati i sledeće napomene.

- obavezno je da kompletan digitalni signal na prijemu unutar bilo kog svog signalizacionog intervala ne prolazi kroz vrijednost $y_1/2$ kako ne bi došlo do promjene odluke unutar samog intervala.
- treba dodati i onaj slučaj u kome bi signal duže vremena zadržavao vrijednost $y_1/2$, što bi dovelo do toga da se odluka ne može donijeti (neki oblici binarnih signala pokazuju ovaj efekat).

Imajući u vidu sve što je rečeno, Drugi Nyquist-ov kriterijum može da se analitički formuliše na sledeći način:

Standardni odziv *y(t)* mora da zadovolji uslov:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right]=\frac{y_1}{2}\left(\delta_{m0}+\delta_{m1}\right),\quad \mathrm{m}=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$\delta_{i,j}$ je Kroneckerova delta.

Ovo je formulacija drugog Nyquist-ovog kriterijuma u domenu vremena. U domenu učestanosti biće:

$$y\left[(2m-1)\frac{T}{2}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(j\omega)e^{j\omega(2m-1)\frac{T}{2}}d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n Y[j(\omega+n\omega_s)] = y_1 \frac{2\pi}{\omega_s}\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{\omega_s}\omega} + e^{-j\frac{\pi}{\omega_s}\omega}\right), \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

što se može zapisati i kao:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n Y[j(\omega+n\omega_s)] = y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \qquad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Izvedena relacija predstavlja uslov koji treba da bude zadovoljen u sistemu za prenos pa da u trenucima u kojima se mijenja značajno stanje signala nema intersimbolske interferencije. tj. ovaj izraz iskazuje Drugi Nyquist-ov kriterijum u frekvencijskom domenu.

Odavde se lako izvodi uslov koji mora da zadovolji funkcija prenosa sistema. Pretpostavi li se da se sistem pobuđuje standardnim signalom u obliku delta impulsa, *x*(t)=δ(t), onda će odziv *y*(t) predstavljati impulsni odziv sistema, a njegova *Fourier*-ova transformacija Y(jω) biće jednaka funkciji prenosa.

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X\left(j\omega\right) = H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

Uvrštavajući ovo u dobijeni izraz i izjednačavajući realni i imaginarni dio dobija se :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n A(\omega+n\omega_s)\cos\chi(\omega+n\omega_s) = y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n A(\omega+n\omega_s)\sin\chi(\omega+n\omega_s) = 0, \quad -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s$$

Ovo su uslovi koje treba da zadovoljavaju realni i imaginarni dio funkcije prenosa sistema pa da bude zadovoljen Drugi Nyquist-ov kriterijum, tj.da ne dođe do ISI.

SISTEM MINIMALNOG PROPUSNOG OPSEGA:

Ako pretpostavimo da prenosimo signal u osnovnom opsegu učestanosti sistemom propusnikom niskih učestanosti definisanim na sledeći način:

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega), & |\omega|\le \frac{1}{2}\omega_s=\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases} \qquad \chi(\omega)=\begin{cases} \chi(\omega), & |\omega|\le \frac{1}{2}\omega_s=\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

Ako primijenimo izvedene uslove za realni i imaginarni dio funkcije prenosa dobija se:

$$A(\omega)\cos\chi(\omega)=y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, \qquad |\omega|\le\frac{1}{2}\omega_s$$

$$A(\omega)\sin\chi(\omega)=0, \qquad |\omega|\le\frac{1}{2}\omega_s$$

odakle se dobija:

$$A(\omega)=\begin{cases} y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega, & |\omega|\le\frac{1}{2}\omega_s \\ 0, & |\omega|\ge\frac{1}{2}\omega_s \end{cases} \qquad \chi(\omega)=0, \qquad |\omega|\le\frac{1}{2}\omega_s$$

Prema tome, funkcija prenosa sistema koji zadovoljava Drugi Nyquist-ov kriterijum se svodi na amplitudsku karakteristiku:

$$H(j\omega) = A(\omega) = \begin{cases} y_1 T \cos\dfrac{\pi}{\omega_s}\omega, & |\omega| \le \dfrac{1}{2}\omega_s = \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \dfrac{1}{2}\omega_s = \omega_c \end{cases}$$

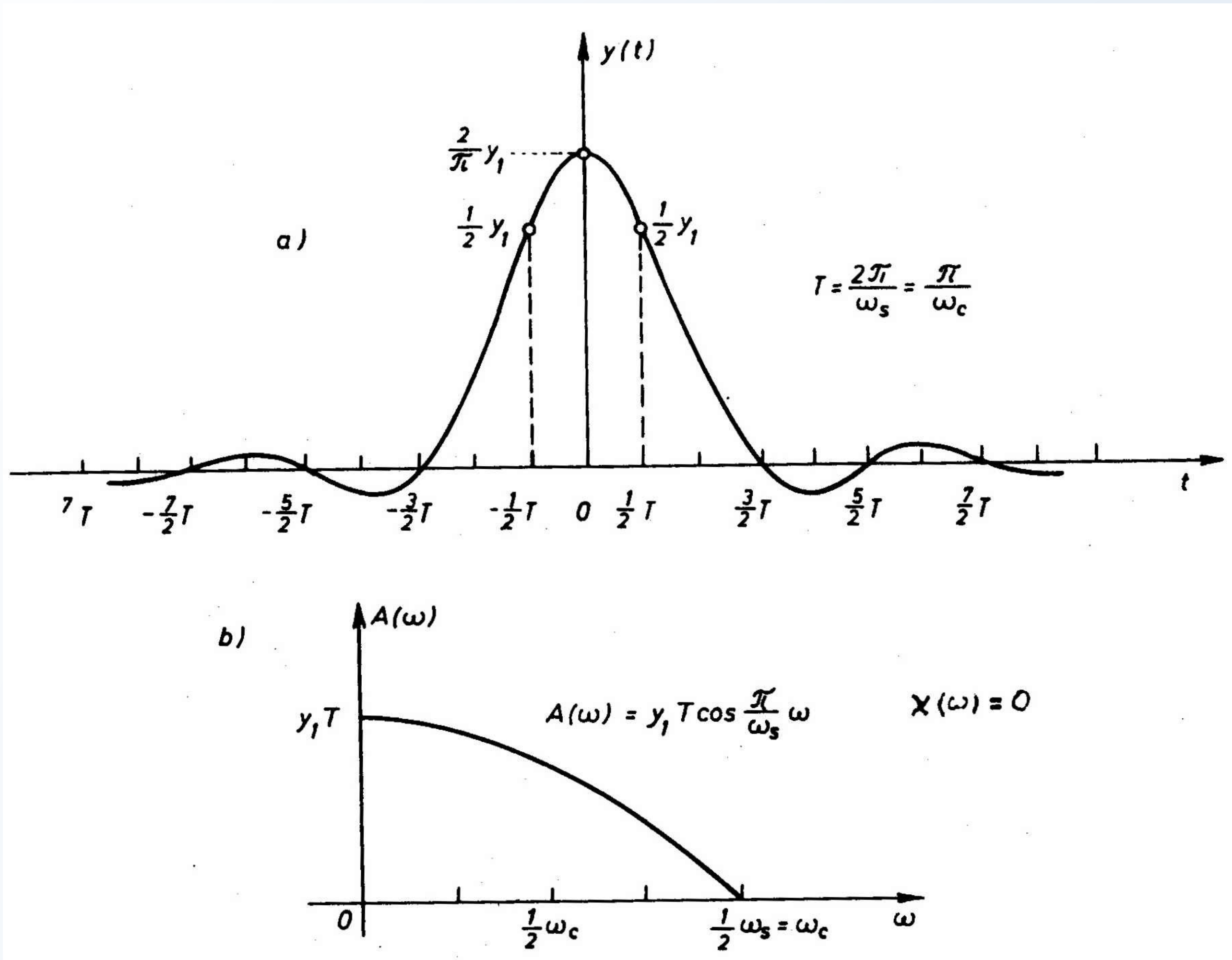
Vidi se da, za razliku od sistema minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava Prvi Nyquist-ov kriterijum, sistem minimalnog propusnog opsega koji zadovoljava Drugi Nyquist-ov kriterijum nije idealan, već se fizički može realizovati.

Odziv ovog sistema na impulsnu pobudu će biti:

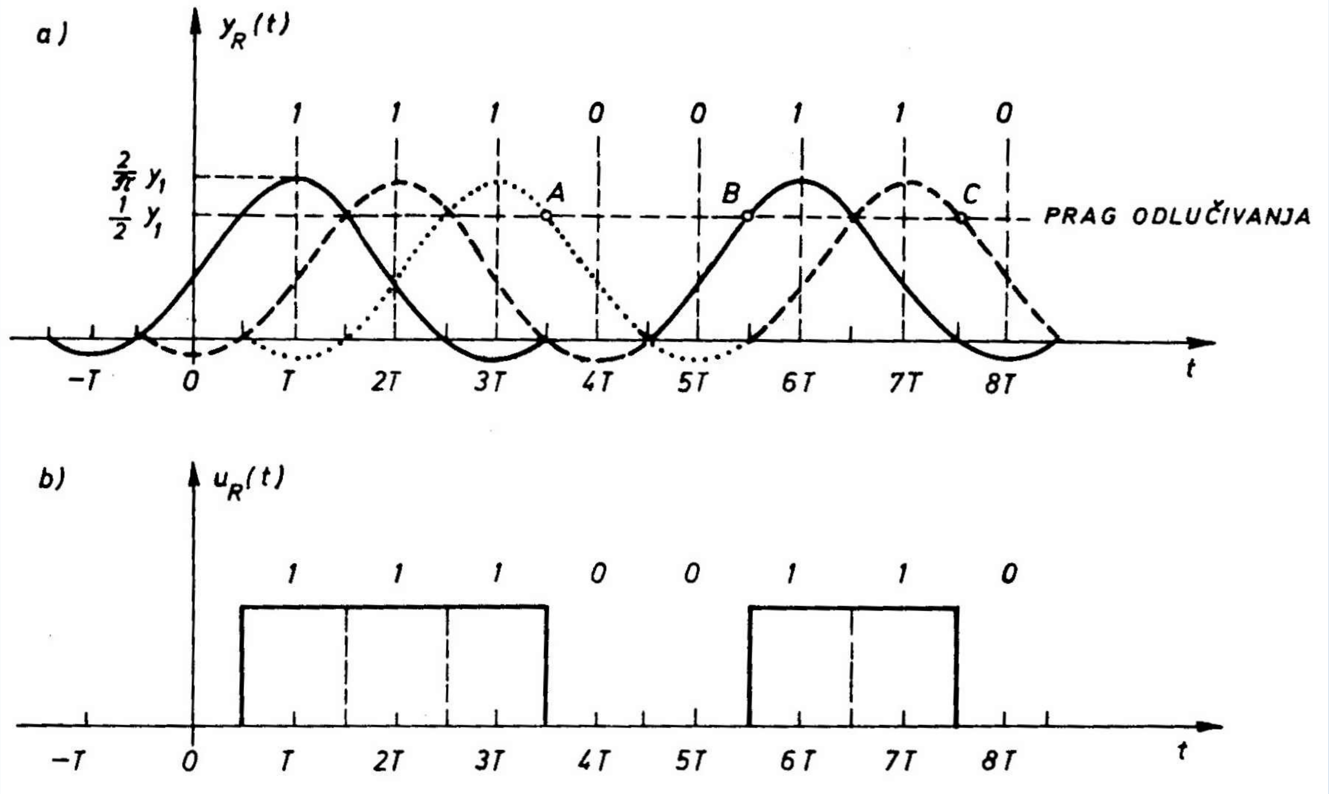
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} y_1 T\cos\frac{\pi}{\omega_s}\omega\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}y_1\frac{\cos\omega_c t}{1-(\frac{2\omega_c t}{\pi})^2},\quad \omega_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\omega_s$$

Impulsni odziv i funkcija prenosa imaju oblik kao na slici:



Kao što se vidi odziv y(t) u tačkama t=±T/2 ima vrijednost $y_1/2$, a za sve pozitivne i negativne neparne multiple od T/2 ima vrijednost 0. Zahvaljujući ovakvom obliku standardnog odziva y(t) u trenucima u kojima nastupa promjena značajnog stanja ne postoji intersimbolska interferencija, pa prema tome ni trajanja značajnih stanja signala nisu izobličena. Ovo može da se vidi sa slike:



U tačkama A, B i C mijenja se značajno stanje signala. U tim trenucima ne postoji intersimbolska interferencija i vrijednost amplitude u njima iznosi $y_1/2$. Kako je ova vrijednost ravna pragu odlučivanja, to ni trajanje značajnih stanja za ovakav signal nisu izobličena.