1 Увод

Ова скрипта је настала у оквиру курса Математика IV на Грађевинском факултету у Подгорици. Курс је подијељен у три тематске цјелине: Вјероватноћу, Статистику и Нумеричку анализу. Скрипта ће се обликовати и мијењати и у току самог курса, у складу са укупним наставним потребама. Водећи се начелом да је најбољи начин да се прихвате, често компликовани теоријски концепти, преко конкретних примјера, постоји намјера да се у оквиру сваке посебне цјелине укључи што више илустративних и интересантних примјера. Скрипта је писана на пријемчив начин, тако да је за разумијевање материјала, потребно само основно математичко знање.

Вјероватноћа. Теорија вјероватноће почиње негдје у седамнаестом вијеку у Француској, кад су се два велика математичара Блез Паскал и Пјер де Ферма заинтересовала за два проблема везана за игре за срећу. Управо су ти проблеми изазвали интересовање код осталих математичара тог периода чиме је Теорија вјероватноће почела да се развија врло динамично. Данас, Вјероватноћа је добро заснована грана математике са апликацијама у образовном систему, од музике до физике, као и у дневном искуству, од временске прогнозе до предвиђања ризика одређених медицинских третмана.

1.1. Скупови и алгебра скупова

У језику теорије вјероватноће, као и у осталим математичким дисциплинама, доминира појам **скупа**, као и **операција нас скуповима**.

У математици не дефинишемо појам скупа, већ кажемо да је то *колекција* објеката које називамо **елементима скупа**. Наравно, заједљиви математички чистунци ће увијек поставити питање *шта је то колекција*, али то пренебрегавамо ослањајући се на читаочево разумијевање тог појма.

Ако је S скуп и x елемент скупа S, то записујемо $x \in S$. Ако x није елемент скупа S, онда то записујемо $x \notin S$. Скуп који нема елемената се назива празан скуп и означава са $\emptyset$.

У општем случају, скуп може имати **коначно** или **бесконачно** много елемената. У случају да је S непразан и има коначно много елемената, то записујемо

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

гдје n означава број елемената тог скупа. Код бесконачних скупова имамо додатну класификацију. Наиме, бесконачност скупа може бити **пребројива** или **непребројива**. За заснованији, прецизнији увид у ове појмове би било неопходно направити озбиљнију математичку припрему. Покушаћемо да ове појмове освијетлимо кроз неколико упечатљивих примјера.

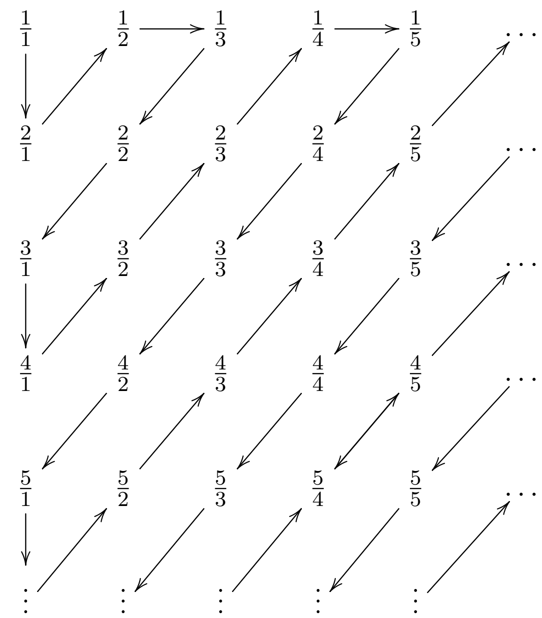
За скуп S ћемо рећи да је **бесконачно пребројив** уколико постоји начин да елементе тог скупа поставимо у низ

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots,$$

односно да за сваки елемент $a \in S$ одредимо његову тачну позицију у низу. На примјер, скуп цијелих бројева је могуће ставити у низ

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

чиме обезбјеђујемо да се тачно зна позиција сваког цијелог броја. Рецимо, број 426 је на 952-ој позицији, док је -125 на 249-ој позицији. Очигледна је функција којом се одређује позиција појединих цијелих бројева. Интересантно је да је и скуп рационалних бројева бесконачно пребројив. У следећем дијаграму је представљена техника пребројавања рационалних бројева.



Као што се види из дијаграма, полазећи од лијевог ћошка и редом *бројимо* све елементе из скупа рационалних бројева. Наравно, неки елементи попут 1 и 2/2, или 1/3 и 2/6, се понављају, али прескачемо све оне које смо већ видјели, односно претходно уврстили у низ. Они су прецртани. Тако долазимо до низа

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cancel{\frac{2}{4}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{4}{2}}, \frac{1}{5}, \ldots$$

За разлику од скупова који се могу *спаковати* у низ, постоје они скупови за које то није могуће. У тим случајевима, само задавање скупа обично вршимо на алтернативан начин, користећи одређено својство P које одређује елементе скупа

$$\{x \mid x \text{ задовољава } P\}.$$

На примјер, скуп реалних бројева из интервала $[0,1]$ се може записати као $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$. За разлику од, на примјер, скупа рационалних бројева, овај скуп није могуће спаковати у низ. Претпоставимо супротно, да постоји низ којим су обухваћени сви бројеви из датог скупа

$$\begin{array}{cccccc} 0. & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots \\ 0. & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & \dots \\ 0. & d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & \dots \\ 0. & d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Посматрајмо реални број који је конструисан на следећи начин

$$x = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$$

при чему је b_i изабран тако да се разликује од цифре d_{ii}, што значи да се x сигурно разликује од $i-$тог броја у претходном низу, за $i = 1, 2, \dots$. Дакле, x се по конструкцији разликује од сваког броја из претходног низа, а ипак припада интервалу $[0,1]$. То значи да претходним низом нису обухваћени сви бројеви из датог интервала, па је посматрани скуп **непребројив**.

Скуповне релације и операције

Ако је сваки елемент скупа S уједно и елемент скупа T, онда кажемо да је S **подскуп** скупа T и означавамо $S \subset T$.

Корисно је увести и појам **универзалног скупа**, Ω, а који представља колекцију свих могућих елемената који произилазе из неког посматраног контекста. Овај појам је нарочито користан у Вјероватноћи. Оног тренутка кад специфицирамо контекст и тиме одредимо универзални скуп, онда су сви посматрани скупови заправо подскупови универзалног скупа Ω.

Комплемент скупа S у односу на универзални скуп Ω је скуп

$$\{x \in \Omega \mid x \notin S\},$$

а означавамо га са S^c или $\bar{S}$. Примјетимо да је $\Omega^c = \emptyset$.

Пресјек два скупа S и T је скуп који садржи елементе који припадају скупу S и скупу T, а означавамо га са $S \cap T$.

Унија два скупа S и T је скуп који обухвата све елементе из скупа S и све елементе скупа T. Јасно, тиме су обухваћени и елементи из пресјека ова два скупа.

Дакле,

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ и } x \in T\},$$

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ или } x \in T\}.$$

У одређеним ситуацијама, разматрамо и пресјек, односно унију бесконачно много скупова, најчешће неке пребројиве колекције скупова. На примјер, ако нам је за свако $n \in \mathbb{N}$ дат скуп S_n, онда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cap S_2 \cap \cdots = \{x \mid x \in S_k \text{ за свако } k \in \mathbb{N}\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cup S_2 \cup \cdots = \{x \mid x \in S_k \text{ за неко } k \in \mathbb{N}\}.$$

Два скупа су **дисјунктна** ако је њихов пресјек празан скуп. Општије, колекција скупова је **међусобно дисјунктна** ако су било која два члана те колкције дисјунктна.

Колекција скупова је **партиција скупа** S ако је међусобно дисјунктна и ако је унија те колекције једнака скупу S.

Наводимо неке основне особине скуповних операција

а. $S \cap T = T \cap S$, $S \cup T = T \cup S$,

б. $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$,

в. $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$,

г. $(S^c)^c = S$,

д. $S \cap S^c = \emptyset$, $S \cup S^c = \Omega$,

ђ. $S \cap \Omega = S$, $S \cup \Omega = \Omega$.

Два посебно корисна тврђења за скуповне операције су **Де Морганови закони**

$$\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c, \qquad \left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c.$$

2 Случајни догађаји

Увод у теорију Вјероватноће ћемо почети низом примјера који ће нас приближити основним концептима и терминологији ове математичке дисциплине. У овом поглављу ћемо се бавити комбинаторичким техникама, затим појмовима случајног догађаја, условне вјероватноће, случајне промјенљиве и њене расподјеле.

2.1. Дефиниције и примјери

Примјер којим почиње скоро сваки уџбеник Вјероватноће је **експеримент** бацања новчића. Дијелом због јаке традиције, а више због упечатљивих математичких илустрација овог примјера, и ми ћемо се прикључити тој "струји".

Бацање новчића је крајње једноставан експеримент. Просто, баците новчић и забиљежите **исход**. У сучају бацања новчића, два могућа исхода су "глава" (Г) и "писмо" (П). Дакле, **скуп исхода** наведеног експеримента је $\Omega = \{Г, П\}$. Скуп Ω називамо **скуп елементарних исхода** или **простор елементарних исхода**.

Примјећујете да смо већ подвукли неколико термина као што су: **експеримент, исход и простор исхода**. Ови појмови имају кључну улогу у језику и математичком садржају Вјероватноће. Уколико је новчић помоћу којег изводимо експеримент симетричан, "савршени" ваљак са хомогеном расподјелом масе онда ћемо га звати "фер" новчић. У случају фер новчића, не постоји разлог да очекујемо "главу" прије него "писмо".

Генерално, задатак вјероватноће је математички опис посматраног експеримента. Значи, потребно је кључне елементе експеримента **кодирати** математичким симболима и направити одговарајући **математички модел** експеримента. У поменутом опиту бацања новчића, нешто је већ урађено. Наиме, описали смо простор исхода као скуп $\Omega = \{Г, П\}$.

Примјер 2.1 *Изводимо експеримент бацања новчића два пута заредом. Простор елементарних исхода у овом опиту се може описати као скуп*

$$\Omega = \{ГГ, ГП, ПГ, ПП\}.$$

■

Знатно суптилнији задатак од описа скупа елементарних исхода је да одређивање **вјероватноћа** појединих исхода. Шта је заправо вјероватноћа неког елементарног исхода? Послужићемо се опет примјером бацања новчића.

Рецимо да смо бацили новчић k пута, а да је међу исходима било укупно k_1 "глава" и k_2 "писама". Јасно је да $k = k_1 + k_2$. Релативна фреквенција појављивања "главе" једнака је k_1/k, а "писма" k_2/k. Како смо већ нагласили, у случају фер новчића, не постоји посебан разлог због којег би фаворизовали "главу" или "писмо". Стога, рационално је очекивати да је у дужем низу понављања бацања новчића, кад k тежи бесконачности, да је $k_1/k \approx 0.5$, односно $k_2/k \approx 0.5$. Уочена особина **груписања** релативне фреквенције око неког броја је од основног значаја за теорију вјероватноће и њену примјену. Управо тај број, око ког се групише релативна фреквенција посматраног исхода, се дефинише као његова **вјероватноћа**. Дакле, вјероватноћа исхода "глава", P(Г), је једнака вјероватноћи исхода "писмо", P(П) и једнака 1/2.

У свакодневници, врло често у разговоримо изговарамо или чујемо оцјене типа "то је тако 99%" или "100% сам у праву". У рекламним кампањима за неке производе чујемо оцјене да се "повећава чистоћа за 80%" или се "повећава коврџавост косе за 45%". Овакви подаци врло често немају неки одређени смсисао, тешко је интерпретирати шта заправо стоји иза таквих квантификација. То је више израз којим се покушава дати бројевна оцјена личном увјерењу или утицати на исто. Дакле, такве оцјене су више реторичке, паушалне, маркетиншке и немају никакве везе са теоријом вјероватноће.

Дефиниција 2.1 *Нека је Ω скуп елементарних исхода експеримента $\mathcal{E}$. Подскуп A скупа Ω се назива* ***догађај****.*

Вјероватноћа догађаја У претходном примјеру, посматрали смо елементарне исходе експеримента којима смо на основу релативне фреквенције додијелили нумеричку вриједност коју зовемо - *вјероватноћа догађаја.* Можда би разумијвање овог концепта било лакше уколико уведемо "религиознији" приступ. Наиме, ако вјерујемо да сваки догађај A на неком "небу идеја" има већ одређену вјероватноћу $p(A)$, онда понављање експеримента чији елементарни исходи чине догађај A има поменуту особину статистичког груписања. Тачније, ако се у n извођења експеримента догађај A десио n_A пута, онда вриједи да

$$\frac{n_A}{n} \to p(A) \text{ када } n \to \infty.$$

Наредни примјер нас уводи у општији случај.

Примјер 2.2 *Изводимо експеримент бацања коцке. Простор елементарних исхода у овом опиту се може описати као скуп*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Како наћи вјероватноћу "пао је непаран број већи од 1"? Јасно је да овом критеријуму одговара подскуп, односно догађај $\{3, 5\}$. Као и у претходном примјеру, приликом сваког извођења овог експеримента, рачунамо релативну фреквенцију овог догађаја. Очигледно, релативна фреквенција догађаја $\{3, 5\}$ је једнака збиру релативних фреквенција исхода 3 и исхода 5, па тиме и

$$P(\{3, 5\}) = P(3) + P(5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

■

Велико слово P је почетно слово енглеске ријечи "probability" и означава **вјероватносну функцију**, која пресликава догађаје (подскупове скупа елементарних исхода) у интервал $[0, 1]$.

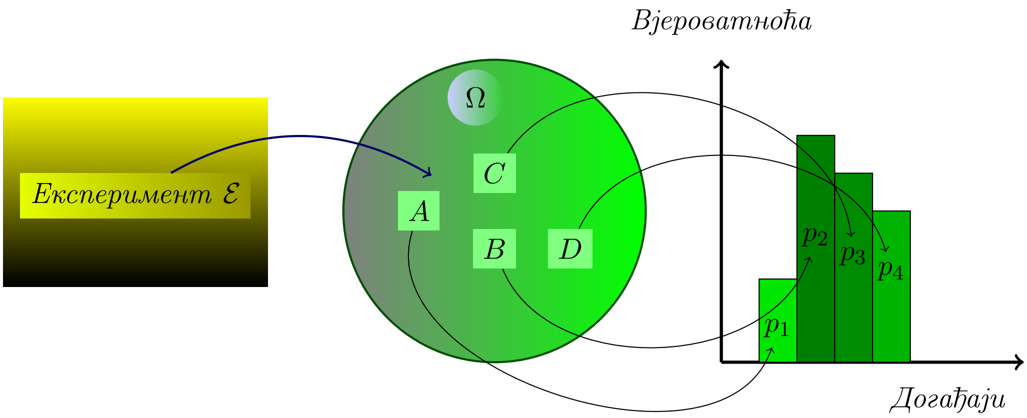
Вјероватносни модел

Вјероватносни модел је математички модел случајног догађаја. Главни "састојци" овог модела су дати у следећем приказу.

Елементи вјероватносног модела

(а) Скуп елементарних исхода Ω, што је скуп свих могућих исхода посматраног експеримента.

(б) Вјероватносна функција или вјероватносни закон која додјељује догађају $A \subseteq \Omega$ ненегативан број $\mathrm{P}(A)$. Вјероватносна функција мора задовољавати одређене критеријуме који ће бити дефинисани накнадно.



Примјер 2.3 *Посматрајмо експеримент $\mathcal{E}$ бацања фер коцкице. Простор елементарних исхода можемо кодирати бројевима*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Подразумијевајући да имамо фер коцкицу, онда слиједи логичан закључак да

$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(3) = \mathrm{P}(4) = \mathrm{P}(5) = \mathrm{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

■

Примјер 2.4 *Кутија садржи нумерисане лоптице од* 1 *до* 50. *Експеримент се састоји од извлачења једне лоптице из кутије. Простор елементарних исхода је* $\Omega = \{1, 2, \ldots, 50\}$, *а вјероватноћа извлачења броја* i *је*

$$\mathrm{P}(i) = \frac{1}{50}, \quad i = 1 \ldots 50$$

■

Шта је заједничко претходним примјерима?

(а) Скуп елементарних исхода је коначан $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

(б) Вјероватноћа за сваки од исхода је иста

$$\mathrm{P}(\omega_i) = 1/n, \quad i = 1 \ldots n$$

Сабирање вјероватноћа

Претпоставимо да изводимо експеримент бацања фер коцке, као у Примјеру 2.2. Тражећи колика је релативна фреквенција догађаја $A = \{3, 5\}$ у низу поновљених опита бацања коцке, сабрали смо релативне фреквенције за 3, односно 5. Дакле,

$$\mathrm{P}(\{3, 5\}) = \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Уопштено, питање је да ли вриједи

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B), \text{ ако је } A \cap B = \emptyset.$$

Примјер 2.5 *Колика је вјероватноћа исхода "паран број" приликом бацања фер коцке? Као што знамо, у овом случају простор елементарних исхода је* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ***Повољан исход*** *је паран број* 2, 4 *или* 6. *Слиједи,*

$$\mathrm{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(6) = \frac{1}{2}.$$

Такође, лако се уочава да вриједи

$$\mathrm{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathrm{P}(\{2, 4\}) + \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(\{2, 6\}) + \mathrm{P}(4) = \mathrm{P}(\{4, 6\}) + \mathrm{P}(2).$$

У општем случају, ако су A *и* B *подскупови скупа елементарних догађаја* Ω, *такви да* $A \cap B = \emptyset$, *можемо доћи до закључка да*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Особину да је вјероватноћа дисјунктне уније скупова једнака збиру вјероватноћа скупова зовемо ***адитивност****.*

■

Примјер 2.6 *Дата је кутија са* 10 *црвених и* 5 *плавих куглица. Претпостављамо да се куглице, сем по боји, не могу разликовати по другим карактеристикама. Вадимо једну куглицу из кутије и региструјемо њену боју. Јасно, простор елементарних исхода је* $\Omega = \{\text{црвена}, \text{плава}\}$*. Пошто црвених има два пута више него плавих, логично је да вјероватноћа извлачења црвене буде два пута већа од вјероватноће извлачења плаве. Ако је* p_1 *вјероватноћа извлачења црвене куглице, а* p_2 *извлачења плаве, онда имамо* $p_1 = 2p_2$*. Пошто мора бити задовољен услов* $p_1 + p_2 = 1$*, онда систем једначина даје* $p_1 = 2/3$ *и* $p_2 = 1/3$*.*

Међутим, овај резултат се може извести директно. Пошто је црвених куглица 10*, а укупан број куглица* 15*, онда је вјероватноћа да ћемо извући црвену једнака* $10/15 = 2/3$*. Овај резултат се може објаснити на следећи начин. Претпоставимо за тренутак да на куглицама постоји "скривена" нумерација, при чему су бројеви од* 1 *до* 10 *црвене, а остатак плаве куглице. Примјетимо да је уз овакву претпоставку простор елементарних исхода другачији. Наиме, то је сад* $\Omega = \{1, 2, \ldots, 15\}$*. Пошто је вјероватноћа да ћемо извући произвољну куглицу са бројем i једнака* $1/15$*, онда по принципу сабирања вјероватноћа, имамо да је*

$$\mathrm{P}(\text{црвена}) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{P}(i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{15} = \frac{2}{3}.$$

■

Од интуитивног ка формалном

Сусрели смо се са неким основним појмовима и концептима вјероватноће на интуитивном нивоу. Иако нам се често учини да је то сасвим довољно и да је "све јасно" тек ће ригорозне математичке дефиниције и теореме донијети потребну чврстину нашем знању. Прије свега, тиме се елиминише онај субјективни слој тумачења који неминовно наноси интуиција као субјективна психолошка категорија. Ипак, **експеримент** и **скуп елементарних исхода**, иако веома често у употреби, нећемо дефинисати. У неким уџбеницима ћете наћи формализацију и овог концепта.

Као што смо то већ учинили, подразумијевамо одређен скуп елементарних исхода Ω као последицу извођења експеримента. Скуп Ω може бити различите кардиналности, односно бројности. Може бити коначан, пребројиво бесконачан и непребројиво бесконачан.

Примјер 2.7 *Нека се експеримент састоји у бацању "фер" новчића све док не "падне" писмо. У овом експерименту ћемо као исход посматрати број бацања док се први пут не оствари писмо. Тада је скуп елементарних исхода* $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$*. Ово је примјер експеримента гдје је простор елементарних исхода бесконачан, али пребројив. Догађај* $A = \{23, 100\}$ *се може интерпретирати као "писмо ја први пут пало у* *двадесетрећем или у стотом покушају".* ■

Примјер 2.8 *Експеримент се састоји у бацању бијеле и црне коцке за игру и регистровању бројева који падну. Исходе можемо кодирати помоћу уређеног пара (i, j), гдје је i број на бијелој и j број на црној коцки. Дакле, скуп $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}$ и има 36 елемената. Нека је A догађај да падне 6 на бијелој коцки. Тада је*

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Нека је B догађај да је збир бројева на коцкама мањи од 4, Тада је

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}.$$

Међутим, догађај је и $C = \{(4, 3), (3, 3), (6, 5)\}$, мада га не можемо описати кратко, доводећи у неку логичну везу поједине елементарне исходе који чине C. Такође, сваки елементарни исход је истовремено и догађај, а и читав Ω је догађај. ■

Рецимо да је прилоком бацања двије коцке, као у претходном примјеру, на бијелој пао број 6, а на црној 5. То одговара елементарном исходу $(6, 5)$. Тај елементарни исход припада истовремено догађају A и догађају C и стога ћемо рећи да се **реализовао** догађај A и догађај C. Због важности овог појма, издвајамо га у следећој дефиницији.

Дефиниција 2.2 *Нека је Ω простор елементарних исход експеримента $\mathcal{E}$, а $A \subseteq \Omega$ догађај. Ако се приликом извођења експеримента $\mathcal{E}$ остварио елементарни исход $\omega \in A$, онда кажемо да се **реализовао** догађај A.*

Пошто су догађаји у суштини скупови, онда операцијама као што су пресјек, унија и комплемент скупова, дајемо одговарајућу интерпретацију у вјероватноћи.

Дефиниција 2.3 *Нека су A и B догађаји.*

1. ***Супротан догађај** догађају A је скуп $\Omega \setminus A$ и означавамо га као A^c. Догађај A^c често називамо и **комплемент догађаја** A.*

2. ***Пресјек догађаја** A и B означавамо са $A \cap B$ или као AB и дефинише се као*

$$AB = \{\omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}.$$

3. ***Унију догађаја** A и B означавамо са $A \cup B$ или као $A + B$ и дефинишемо као*

$$A + B = \{\omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}.$$

4. *Кажемо да су догађаји A и B **дисјунктни**, односно да се **искључују** ако $AB = \emptyset$.*

У смислу претходне двије дефиниције, јасно је да се догађај AB реализује ако и само ако се реализују и догађај A и догађај B. Догађај $A+B$ се реализује ако се реализује догађај A или догађај B, док се догађај A^c реализује ако се не реализује A.

Формално заснивање вјероватноће

Већ смо се упознали, опет на неком интуитивном нивоу, са појмом вјероватноће, односно вјероватносне функције P. Најприје, вјероватносна функција је везана за неки простор елементарних исхода Ω. Запазили смо да вјероватноћа слика догађаје у ненегативне бројеве, односно $\mathrm{P}(A) \geq 0$, за догађај $A \subseteq \Omega$[1]. Такође, уочили смо да је у неким разматраним примјерима збир вјероватноћа свих елементарних исхода једнак јединици. Другим ријечима, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. Поред овог, у примјеру 2.5, вјероватноћа дисјунктне уније је једнака збиру вјероватноћа чинилаца који учествују у унији. Напомињемо да уколико није другачије наглашено, скуп елементарних исхода Ω је највише пребројив скуп.

Дефиниција 2.4 *Нека је Ω највише пребројив скуп елементарних исхода експеримента $\mathcal{E}$. Функцију P називамо вјероватноћом, односно* ***вјероватносном функцијом*** *ако задовољава:*

а (Ненегативност)

$$\mathrm{P}(A) \geq 0, \text{ за сваки догађај } A \subseteq \Omega.$$

б (Адитивност)

За међусобно дисјунктне догађаје A_i, $(A_k \cap A_j = \emptyset,\ k \neq j)$ вриједи

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

в (Нормализованост)

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

Примјетимо да у овом случају, вриједи

$$\mathrm{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) = 1.$$

Лема 2.1 *Нека је Ω скуп елементарних исхода експеримента $\mathcal{E}$. Нека је P произвољна вјероватносна функција, а $A \subseteq \Omega$ произвољан догађај. Онда је*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega).$$

[1] Стриктно, говорећи постоје вјероватносни простори Ω у којима поједини подскупови не могу бити догађаји, али се такви случајеви јављају веома ријетко и ван су опсега овог текста, тако да их можемо игнорисати.

Уколико је Ω коначан, а вјероватносна функција P додјељује исту вриједност сваком исходу из Ω онда вриједи

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

за свако $A \subseteq \Omega$.

Доказ. Како за свако $A \subseteq \Omega$ вриједи

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

онда на основу адитивности вјероватносне функције слиједи

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega).$$

Уколико је Ω коначан, а за сваки елементарни исход једнака вјероватноћа, онда због нормализованости вјероватноће мора бити $\mathrm{P}(w) = |\Omega|^{-1}$, за свако $\omega \in \Omega$. Стога,

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} |\Omega|^{-1} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

■

Иако претходна лема даје врло једноставну процедуру како израчунати вјероватноћу догађаја A у случају коначног скупа елементарних исхода, то често није лако јер само рачунање броја елемената скупа A није увијек једноставан задатак. Неријетко, потребно је употребити врло софистициране технике и ”трик” аргументе како би израчунали $|A|$.

Управо су **технике пребројавања**, између осталог, тема наше наредне секције.

2.2. Елементи комбинаторике

Обично се комбинаторика описује као теорија коначних скупова. Врло често се каже да је комбинаторика заправо грана математике која се бави пребројавањем коначних скупова. Догматски, скуп је основни математички појам који је одређен својим елементима. Као што знамо, поредак или понављање елемената унутар скупа нема улогу, тако да је

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b, b, b\}.$$

Међутим, за одређену врсту комбинаторичких проблема, потребни су нам другачији математички објекти, који имају одређена својства која скупови немају. Прије свега, поребан нам је објекат код којег поредак елемената има улогу. Такав објекат називамо **листа**. Листе се разликују по критеријуму поретка и понављања елемената. Напримјер

$$[a, b], [a, a, b], [b, a]$$

су три различите листе. Као што видимо, прва и трећа су листе дужине 2, док је друга дужине 3. Прва и трећа се разликују управо због поретка елемената. Као што видимо, у првој и трећој листи нема понављања елемената док у другој то имамо. Стога, уводимо класификацију на **листе са понављањем** и **листе без понављања**. Класична терминологија за ове објекте је **варијације са понављањем** и **варијације без понављања**. Ми ћемо, углавном, користити нашу терминологију.

Дужина листе је, као што очекујемо, просто број елемената унутар листе.

Унутар листе могу бити елементи различите природе, као например $[a, 1, *, \clubsuit]$. Стога, кад говоримо о листи, неопходно је и дефинисати неки **универзални скуп** или **азбуку**, одакле долазе њени елементи. У претходном примјеру, универзални скуп је унија скупова слова енглеског алфабета, природних бројева и специјалних симбола. Без обзира из каквих "природних" скупова долазе, елементе азбуке називамо **симболима**. Постоји неколико карактеристичних питања који су у самој основи комбинаторике а које наводимо у следећој леми.

Лема 2.2 *(Основни методи комбинаторичког пребројавања)*

(а) Број листи са понављањем, дужине k, над азбуком која садржи n симбола је n^k.

(б) Број листи без понављања, дужине k, над азбуком која садржи n симбола је

$$n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Доказ.

(а) Резултат се лако добија ако поставимо питање на колико начина можемо изабрати први, други... елемент листе. Наиме, први можемо изабрати на n начина, други такође на n и тако редом. Колики је, онда укупан број начина за читаву листу дужине k? Просто, то је производ броја начина на који можемо изабрати појединачне елементе листе. Пошто их је k, а сваки од њих бирамо на n начина, онда је резултат n^k.

Овдје се уводи такозбани **принцип производа**. Најбољи начин да се разумије овај принцип је да се уради пар примјера. Погледати примјер.

(б) И овдје ћемо користити принцип производа. Наиме, пошто се ради о листи без понављања, онда имамо одређену рестрикцију приликом избора елемената. Први можемо изабрати без ограничења, односно на n начина. Међутим, други можемо изабрати само на $n-1$ начина јер не желимо да поновимо први елемент који је већ одабран. Тако долазимо до броја $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

■

Примјер 2.9 *Нека је дата азбука $A = \{a, b, c\}$. Рачунамо број листи без понављања дужине 3 над азбуком A. На основу тврђења (б) Леме 2.2, јасно је да је укупан број једнак $3 \times 2 \times 1$, односно $3! = 6$. Имамо, дакле следећих шест листа*

$$[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a].$$

Да ли можете уопштити овај примјер? ■

Дефиниција 2.5 *Нека је A коначан скуп од n елемената.* ***Пермутација*** *дужине n, или* **n−*пермутација*** *скупа A је листа без понављања дужине n, над азбуком A.*

Дефиниција 2.6 *За коначан скуп од k елемената кажемо да је* **k−*скуп***.

Примјер 2.10 *Нека је дат $n-$скуп A. Укупан број пермутација дужине n над азбуком A рачунамо на већ утврђен начин. На првом мјесту можемо изабрати било који од n симбола из скупа A. С обзиром на то да нема понављања, на другом мјесту имамо само $n-1$ могућности. Настављајући овај процес долазимо до броја*

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Дакле, укупан број пермутација дужине n над одговарајућом азбуком A која има n симбола је $n!$, факторијел броја n. ■

Примјер 2.11 *Претпоставимо да је $A = \{a, b, c, d\}$. Тражимо све $3-$подскупове скупа A. Пошто се ради о малом броју елемената, лако је наћи све подскупове. То су*

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Дакле, имамо укупно четири $3-$подскупа скупа A. На основу Леме 2.2, имамо укупно 24 листе дужине 3 над азбуком A. Умјесто свих 24, посматрајмо само листе које садрже симболе a, b, c. То су управо

$$[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a].$$

Очигледно, ради се о $3-$пермутацијама скупа $\{a, b, c\}$ којих има $3! = 6$. Слично, имамо по 6 листа дужине 3 и за скупове $\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$, што укупно чини 24 такве листе. Овај примјер нам јасно указује начин како рачунати број $3-$подскупова скупа A. Наиме, треба подијелити 24, што је укупан број назначених листи, са $3!$, што је број $3-$пермутација. ■

Посљедица 2.1 *Нека је дат скуп $n-$скуп A. Број $k-$подскупова скупа A је*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказ. Знамо да је укупан број листа дужине k без понављања над азбуком A једнак

$$n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Слично као у Примјеру 2.11, сваки $k-$подскуп ”генерише” укупно $k!$ листи дужине k. Стога је број $k-$подскупова скупа A

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Број $k-$подскупова скупа A, означавамо краће са $\binom{n}{k}$ и читамо **n над k**. ■

Примјер 2.12 *(**Извлачење куглица са враћањем**) Нека је дата кутија у којој се налазе 8 нумерисаних куглица, бројевима од 1 до 8. Извлачимо три куглице **са враћањем**, што значи да након извлачења забиљежимо број куглице и вратимо је назад у кутију. Простор елементарних исхода Ω овог експеримента су заправо листе дужине 3 са понављањем над азбуком од 8 симбола. На основу тврђења (а) Леме 2.2, слиједи да је $|\Omega| = 8^3 = 512$. Уколико претпоставимо да свака листа дужине 3 има једнаку вјероватноћу, онда је вјероватноћа појединачне листе, например $[4, 4, 8]$ једнака $1/512$.* ■

Примјер 2.13 *(**Извлачење куглица без враћања**) Посматрајмо кутију са истим садржајем као у претходном примјеру. Извлачимо 3 лоптице **без враћања**, биљежећи извучене бројеве. Простор елементарних исхода Ω овог експеримента су заправо листе дужине 3 без понављања над азбуком од 8 симбола. На основу тврђења (б) Леме 2.2, слиједи да је $|\Omega| = 8 \times 7 \times 6 = 336$. Под претпоставком да су сви исходи једнако вјероватно, слиједи да је вјероватноћа да се појави $[3, 7, 1]$ једнака $1/336$.* ■

Примјер 2.14 *(**Извлачење више куглица одједном**) Посматрамо још једном кутију као у претходним примјерима. Извлачимо одједном 3 куглице, тако да је **редослед небитан**. Овај случај одговара ситуацији као да извлачимо $3-$подскуп од $8-$скупа. На основу Последице 2.1, слиједи да је простор елементарних исхода Ω величине $\binom{8}{3} = 56$. Опет, ако претпоставимо једнаку вјероватноћу за све елементарне исходе, онда је вјероватноћа појављивања например скупа $\{3, 7, 1\}$ jednaka $1/56$.* ■

Мултискупови и мултилисте

Примјер 2.15 *Експеримент се састоји од бацања три коцке за игру које се не разликују. Како описати елементарни скуп исхода?*

Пошто не разликујемо коцке, онда ни поредак у исходима није битан. Тако је, на примјер

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0,$$

опис исхода да су пале двије двојке и једна јединица. Ову ситуацију можемо моделирати и на следећи начин

$$*|**||||$$

Претходно моделирање је заправо истовјетно као распоређивање куглица у неке кутије. Уконкретном случају, распоређујемо 3 куглице у шест различитих кутија. ■

Претпоставимо да у некој кутији имамо бесконачан број елемената које разликујемо по типовима. Нека је у ктији n различитих типова $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ тако да од сваког типа a_i постоји бесконачно много елемената. Изводимо експеримент извлачења k елемената из кутије и желимо да опишемо скуп могућих исхода.

Замислимо да након што извадимо елементе, исте разврставамо по одговарајућим кутијама које носе назив по врсти елемента. Значи, у кутију на којој пише a_1 стављамо све елементе тог типа итако редом. Видимо, нама је на крају искључиво важно колико има елемената у појединим кутијама. Као и у претходном примјеру, то можемо моделирати помоћу $*$ и $|$, при чему *усправне цртице* означавају зидове кутија, а свака *звјездица* појединачни елемент. Пошто је укупан број различитих типова елемената једнак n, то значи да морамо имати $n-1$ зид, а k звјездица, јер смо извадили толико елемената.

Сваком могућем исходу одговара различит распоред зидова и звјездица. Пошто је укупан број позиција $n-1+k$, то значи да је потребно само одредити мјеста на ком се налазе зидови кутија, њих $n-1$. То можемо урадити на

$$\binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k}.$$

И из претходног идентитета видимо да је свеједно да ли бирамо позиције за зидове или звјездице.

Као што смо урадили у случају коцки, исти комбинаторни задатак можемо моделирати као број ненегативних цјелобројних рјешења једначине

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k.$$

Примјер 2.16 *Претпоставимо да имамо четири књиге из математике, пет књига из физике и двије књиге из умјетности, које желимо поставити на полици. Подразумијевамо да су све књиге међусобно различите. Ако их поствљамо на комплетно случајан начин, колика је вјероватноћа да ће на крају бити груписане по предметима?*

Да би ријешили овај проблем, најприје морамо одредити колики је број елементарних исхода овог екпсеримента. Пошто имамо укупно 11 *књига и све су међусобно различите, то на основу Примјера 2.10, видимо да је укупан број начина* $11!$. *Дакле,* $|\Omega| = 11!$. *Нека је A догађај "књиге су груписане по предметима". Сад је* *потребно пребројати колико је међу овим елементарним исходима из Ω оних који одговарају "повољном исходу", односно оних који припадају скупу A. Најприје, број начина да поставимо различите предмете у низу је $3!$, с обзиром да имамо укупно три предмета. За сваки од тих $3!$ распореда, имамо "унутрашње" пермутације међу књигама једног предмета. Тако имамо $4!$ пермутација књига из математике, $5!$ пермутација књига из физике и $2!$ пермутација књига из умјетности. Укупно, број "повољних" ситуација је $3!5!4!2!$. Стога, подразумијевајући да је сваки исход у Ω једнако вјероватан, имамо, на основу Леме 2.1, да је*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3!5!4!2!}{11!} = 0.000866.$$

Ово значи, да можемо очекивати да ће нешто више од 8 пута у 10000 покушаја књиге бити груписане по предметима ако их распоређујемо у неком произвољном распореду.

■

Након претходном примјера, појављује се потреба да размотримо још један комбинаторни објекат. То су листе у којима имамо елементе кои си понављају одређен унапријед утврђен број пута. На примјер, постављамо питање колико има различитих листи дужине 4 у којима се елементи a и b понављају по 2 пута? Једноставном анализом долазимо до закључка да су то листе

$$[a, a, b, b],\ [a, b, a, b],\ [a, b, b, a],$$

$$[b, b, a, a],\ [b, a, b, a],\ [b, a, a, b].$$

Дакле, има их 6. У општем случају, имамо следећи проблем. Нека је листа дужине n и састављена је од елемената $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, тако да се α_i појављује k_i пута. Сходно томе, имамо $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$. За пребројавање ових листи може послужити следећи комбинаторни *трик*. Замислимо да имамо "скривено" означавање на елементима типа α_i тако да их међусобно разликујемо. За претходно дати примјер, тако имамо, умјесто листе $[b, b, a, a]$ листу $[b^1, b^2, a^1, a^2]$. Од ове последње листе можемо направити укупно 4 листе које одговарају распореду у листи $[b, b, a, a]$. То су

$$[b^1, b^2, a^1, a^2],\ [b^2, b^1, a^1, a^2],$$

$$[b^1, b^2, a^1, a^2],\ [b^1, b^2, a^2, a^1].$$

Јасно је да је овај број листи последица пермутација елемената типа a и типа b на својим мјестима, па је тај број укупно $2!2!$. Слично је и за преосталих 5 листи, тако да на овај начин заправо генеришемо све могуће пермутације од 4 елемента $\{b^1, b^2, a^1, a^2\}$, а њих је укупно $4!$. То значи да је број различитих распореда једнак $\frac{4!}{2!2!}$, а у општем случају

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Примјер 2.17 *"Фер" новчић се баца три пута и региструје се низ писама и грбова. Колика је вјероватноћа догађаја да П слиједи Г? Скуп елементарних исхода је*

$$\Omega = \{\textit{ППП}, \textit{ППГ}, \textit{ПГП}, \textit{ГПП}, \textit{ПГГ}, \textit{ГПГ}, \textit{ГГП}, \textit{ГГГ}\}.$$

Догађај који нас интересује је $A = \{\textit{ПГП}, \textit{ГПП}, \textit{ГПГ}, \textit{ГГП}\}$. *Дакле,*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

■

Примјер 2.18 (***Парадокс де Мереа***) *Вјерује се да је у седамнаестом вијеку историја Вјероватноће почела питањем које је француски племић и страствени коцкар Де Мере упутио Паскалу (Blaise Pascal, 1623-1662, чувени француски математичар, један од оснивача теорије вјероватноће). Де Мере је играјући много пута игру која се састојала у бацању три коцке за игру и сабирању бројева на њима, констатовао да се чешће јавља збир* 11 *него* 12. *Ако као исходе опита посматрамо тројке бројева који се појављују, збир* 11 *добија се у следећих* 6 *случајева*

$$\{6,4,1\}, \{6,3,2\}, \{5,5,1\}, \{5,4,2\}, \{5,3,3\}, \{4,4,3\},$$

док се збир 12 *добија такође у* 6 *случајева*

$$\{6,5,1\}, \{6,4,2\}, \{6,3,3\}, \{5,5,2\}, \{5,4,3\}, \{4,4,4\}.$$

На основу овога, сматрајући да су ти исходи једнаковјероватни, Де Мере је закључио да се догађаји "збир 11" и "збир 12" морају појављивати са (приближно) истом релативном фреквенцијом. Пошто је Де Мере експериментално утврдио да то није случај, написао је прилично љутито интонирано писмо Паскалу описујући све као математички "un grand scandale".

Паскал је ријешио овај "парадокс" указујући на превид који је направио француски коцкар. Наиме, Де Мере није водио рачуна да се рецимо случај $\{6,4,1\}$ *јавља* 6 *пута, јер имамо три коцке, тако да ови бројеви могу пермутовати на њима. За разлику од овог, случај* $\{5,5,1\}$ *се може јавити* 3 *пута:*

$$5-5-1,\ 5-1-5,\ 1-5-5.$$

Пребројавајући све исходе на овај начин, можемо утврдити да се "збир 11" појављује 27, *док се "збир 12" појављује* 25 *пута. Укупан број елементарних исхода је* 6^3, *па је онда*

$$\mathrm{P}(\textit{"збир 11"}) = \frac{27}{216} = 0.125, \qquad \mathrm{P}(\textit{"збир 12"}) = \frac{25}{216} = 0.116.$$

Ово значи да је Де Мере морао изводити велике серије овог експеримента да би уочио разлику. Тако је ријешен овај "парадокс", који има историсјки значај у развоју теорије вјероватноће. ■

2.3. Особине вјероватносне функције

У овој секцији наводимо неке корисне особине функције вјероватноће. У даљем тексту, са Ω означавамо простор елементарних исхода а великим словима абецеде $A, B, \ldots$ догађаје у Ω.

Лема 2.3

(а) $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

(б) *Ако је* $A \subseteq B$, *онда* $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
Прецизније, у овом случају имамо $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$.

(в) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Доказ.

(а) Нека је $A_1 = A$, $A_2 = A^c$ и $A_j = \emptyset$, за свако $j \geq 3$. Слиједи из дефиниције вјероватноће да

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup A^c) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c),$$

чиме се доказује (б).

(б) Можемо написати $B = A \cup (B \setminus A)$. Ово је унија дисјунктних скупова и резултат опет слиједи из дефиниције вјероватноће.

(в) Унију $A \cup B$ можемо написати као $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. Одавде слиједи

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

■

Особина (а) је веома природна: Ако посматрамо конкретни догађај A приликом извођења неког експеримента, онда је јасно да ће се реализовати или A или A^c те стога сума ове двије вјероватноће мора бити 1.

Особина (б) једноставно каже да је вјероватноћа реализације већег догађај већа.

Коначно, (в) се може унтуитивно разумјети на следећи начин. Како можемо сумирати све вјероватноће из уније скупова A и B? Просто, можемо сумирати све вјероватноће из скупа A, затим из скупа B. Међутим, у том случају сабирамо дупло оне елементарне исходе који се налазе у $A \cap B$, па их из тог разлога морамо једном одузети.

Примјер 2.19 *Особина (в) из претходне леме се уопштити на унију више од два догађаја. Тако, имамо*

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(AB) - \mathrm{P}(BC) + \mathrm{P}(ABC).$$

Заиста, из $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ слиједи

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}((A \cup B)C)$$

Како је $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$, важи

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}((AC) \cup (BC)).$$

Пошто је

$$\mathrm{P}((AC) \cup (BC)) = \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(ACBC) = \mathrm{P}(AC) + \mathrm{P}(BC) - \mathrm{P}(ABC)$$

јер је $ACBC = ABC$, онда резултат слиједи. Овдје треба водити рачуна да AB заправо значи $A \cap B$. ■

2.4. Задаци

2.1 *Из шпила од 32 карте на случајан начин се бирају двије карте. Наћи вјероватноћу догађаја A:*

а. *Извучене карте су истог знака*

б. *Извучене карте су кечеви*

в. *Извучене карте су веће од 10.*

Рјешење. *Улупан број начина за извлачење двије карте је $\binom{32}{2}$.*

а.
$$p = \frac{4\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}.$$

б. *Пошто је укупно 4 кеца, онда је број повољних начина $\binom{4}{2}$. То значи да је тражена вјероватноћа*
$$p = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}.$$

в. *Пошто карата већих од 10 има укупно 16 (J,Q,K,A у четири боје) онда је*

$$p = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{32}{2}}.$$

2.2 *Човјек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа, без враћања, док не нађе одговарајући кључ. Наћи вјероватноћу да ће* *кључ нађу у $k-$том извлачењу.*

Рјешење. *Сви кључеви се могу распоредити на $N = n!$ начина, при чему, ако је прави на $k-$том мјесту, остали се могу распоредити на $(n-1)!$ начина, па је*

$$p = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

што значи да не зависи од k.

2.3 *Из групе од 5 брачних парова се на случајан начин бирају 4 особе. Колика је вјероватноћа да неће бити укључен неки од брачних парова?*

Рјешење. *Укупан број избора је $\binom{10}{4}$. Повољни су избори код којих се од 5 парова изаберу 4, а онда у сваком одабраном пару по један супружник. Значи,*

$$p = \frac{\binom{5}{4}2^4}{\binom{10}{4}}.$$

2.4 *У пакету иам 20 картица означених бројевима од 1 до 20. Картице су измијешане и на случајан начин се извлаче двије. Наћи вјероватноћу p да су извучене:*

а. *картице са бројевима 1 и 20*

б. *"сусједне" картице.*

Рјешење. а.

$$p = \frac{1}{\binom{20}{2}},$$

јер је број повољних исхода 1 од могућих $\binom{20}{2}$.

б. *Сусједне картице су облика $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, 19$. Значи, таквих парова има 19, што представља број повољних број исхода. Дакле,*

$$p = \frac{19}{\binom{20}{2}}.$$

2.5 *У кутији се налази N куглица од којих су M бијеле. Извлачи се случајно n куглица. Наћи вјероватноћу p да је међу њима тачно m бијелих.*
$(0 \leq b \leq N,\ 0 \leq m \leq M,\ m \leq n)$.

Рјешење. *Укупан број могућих избора је* $\binom{N}{n}$*. Од* M *бијелих бирамо* m *на* $\binom{M}{m}$ *начина, а од осталих* $N-M$ *бирамо* $n-m$ *на* $\binom{N-M}{n-m}$ *начина, па је број повољних избора једнак* $\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$*. Дакле,*

$$p = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{M}{m}}.$$

2.6 *Од 20 ђака 4 су одлична. На случајан начин се формирају двије групе од по 10 ђака. Наћи вјероватноћу да у свакој групи буде*

а. по 2 одлична ђака

б. одличних ђака.

Рјешење. *Формирањем једне групе, формирана је и друга, тако да је укупан број могућности* $\binom{20}{10}$*.*

а. Групу формирају 2 одлична и 8 осталих ученика, а то можемо урадити на $\binom{4}{2}\binom{16}{8}$*, што значи да је*

$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{8}}{\binom{20}{10}}.$$

б.

$$p = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{9} + \binom{4}{2}\binom{16}{8} + \binom{4}{3}\binom{16}{7}}{\binom{20}{10}}.$$

3 Условне вјероватноће. Независност догађаја

У Вјероватноћи, **независност** догађаја игра веома важну улогу. Напримјер, кад бацимо новчић два пута заредом, онда вјерујемо да резултат првог нема никаквог утицаја на друго бацање. Наше интуитивно схватање говори да су та два догађаја међусобно независна. Међутим, постоје ситуације у којима реализација једног догађаја извјесно утиче на реализацију другог догађаја. Пођимо од једног примјера који ће нас приближити суштини **условне вјероватноће** и независности догађаја.

Примјер 3.1 *У кутији се налази* $N = 10$ *производа од којих су* 3 *дефектна. Сви производи су нумерисани бројевима од* 1 *до* 10*, при чему су дефектни* 1, 2 *и* 3*. Опит се састоји у случајном извлачењу без враћања* 2 *производа, један за другим, и регистровању њихових бројева. Нека је* A *догађај да је први изабрани производ дефектан. Очигледно је* $\mathrm{P}(A) = 3/10$*. Нека је* B *догађај да је други изабрани производ дефектан. Јасно је да вјероватноћа догађаја* B *зависи од исхода првог извлачења, односно од могућности да се* A *реализовао или не.*

Колика је заправо вјероватноћа догађаја B*? Најприје, примјетимо да се скуп елементарних исхода може кодирати као* (i, j)*, гдје* $i \neq j$ *и* $i, j = 1, 2, \ldots, 10$*. Напримјер, исход* $(2, 7)$ *значи да је извучен број* 2 *у првом, а* 7 *у другом извлачењу. Примјетимо да овај исход значи да се реализовао догађај* A *али није* B*. Лако се уочава да је укупан број елементарних исхода* $10 \cdot 9$*. За догађај* B *имамо укупно* $3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 3 \cdot 9$ *повољних елементарних исхода. Тиме, вјероватноћа догађаја* B *је*

$$\mathrm{P}(B) = \frac{3 \cdot 9}{10 \cdot 9} = \frac{3}{10} = \mathrm{P}(A)$$

Овај резултат $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)$ *не би требало да ствара недоумице. Ствар је у томе што израчунавајући* $\mathrm{P}(B)$ *нисмо додатно претпостављали о томе какав је први производ: дефектан или исправан.*

Претпоставимо да је први извучени производ дефектан, тј. да се догађај A *реализовао. Колика је вјероватноћа догађаја* B *под претпоставком* A*? Означимо је са* $\mathrm{P}(B|A)$*. Пошто је укупа број производа смањен на* 9*, а међу њима је* 2 *дефектна, онда је* $\mathrm{P}(B|A) = 2/9$*. Дакле, у случају да* ***знамо*** *да се у првом извлачењу десио догађај* A*, онда је вјероватноћа догађаја* B *(под датим условом, односно услед промјене околности) једнака* $2/9$*.*

■

Претходни примјер је типична илустрација концепта условне **вјероватноће**. У њему је интуитивно и логички јасно како сазнање реализације једног догађаја утиче на реализацију другог. Међутим, то у појединим ситуацијама престаје да буде очигледно. Примјера ради, можемо да размишљамо и о $\mathrm{P}(A|B)$ што је знатно теже интерпретирати.

Примјер 3.2 *Коцка за игру се баца два пута. Нека је A догађај да је у оба бацања пао паран број, а B догађај да је збор бројева у оба бацања ≤ 6. Констатујмо*

$A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$,
$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),$
$(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$,

одакле слиједи $\mathrm{P}(A) = 9/36$, $\mathrm{P}(B) = 15/36$. *Како рачунати* $\mathrm{P}(A|B)$. *Пошто знамо да је B остварено, онда се скуп исхода редукује на скуп који има* 15 *елемената. Међу тим елементима, нађимо оне који одгаварају догађају A. Ти елементи су* $\{(2,2),(2,4),(4,2)$*, што у ствари представља догађај AB. Дакле,*

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{3}{15} = \frac{3/36}{15/36} = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$$

Претходни низ једнакост указује на намјеру да уведемо формулу за рачунање условне вјероватноће у облику

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

■

Посматрајмо одређени експеримент, догађаје A, B, у намјери да рачунамо $\mathrm{P}(A|B)$. Приближимо природност форумуле дате у претходном примјеру интерпретацијом помоћу релативних фреквенција. Нека се у n поновљених опита догађаји A, B, AB реализују редом $n(A)$, $n(B)$, $n(AB)$ пута и нека је $n(A) > 0$. Релативна фреквенција догађаја A у опитима у којима се реализује B је $n(AB)/n(B)$. Међутим,

$$\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{n(AB)/n}{n(A)/n}.$$

Зато је и следећа дефиниција природна

Дефиниција 3.1 *Претпоставимо да су A, B догађаји у простору елементарних исхода Ω и претпоставимо да је* $\mathrm{P}(B) > 0$. *Условна вјероватноћа догађаја A у односу на догађај B је*

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Као и што смо раније нагласили, концепт условне вјероватноће је суштински редукција простора елементарних исхода Ω на мањи "универзум" догађаја, рецимо неки догађај B. Такође, вриједе и све особине вјероватносне функције P на том, суженом универзуму као на оригиналном.

Ненегативност. Уколико је $\mathrm{P}(B) > 0$, онда очигледно вриједи

$$\mathrm{P}(A|B) \geq 0,$$

за сваки догађај $A \subseteq \Omega$.

Нормализација. Вјероватноћа сваког догађаја који је надскуп скупа B је 1.

$$\mathrm{P}(\Omega|B) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1.$$

Адитивност. За дисјунктне догађаје A_1 і A_2 вриједи

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cup A_2|\, B) &= \frac{\mathrm{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \\
= \frac{\mathrm{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathrm{P}(B)} &= \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap B) + \mathrm{P}(A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \\
= \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} + \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap B)}{\mathrm{P}(B)} &= \mathrm{P}(A_1|B) + \mathrm{P}(A_2|B).
\end{aligned}$$

Условне вјероватноће су често веома корисне приликом рачунања вјероватноће одређеног догађаја. У том смислу, следећа теорема је веома корисна. Прије него што пређемо на саму теорему, потребна нам је дефиниција новог појма.

Дефиниција 3.2 *Пребројива колекција међусобно дисјунктних догађаја* $B_1, B_2, \ldots$ *се назива* ***партиција*** *скупа елементарних исхода* Ω *ако вриједи*

$$\bigcup_i B_i = \Omega.$$

Примјер 3.3 *Нека је* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Тада је*

$$B_1 = \{1, 3, 5\},\ B_2 = \{2, 4, 6\}$$

партиција скупа Ω. ■

Теорема 3.1 ***(Формула тоталне вјероватноће)*** *Нека је* $B_1, B_2, \ldots$ *партиција скупа елементарних исхода* Ω*, таква да је* $\mathrm{P}(B_i) > 0$ *за свако* $i \geq 1$ *и нека је* A *произвољан догађај. Тада је*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_i \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i).$$

Доказ. Догађај A можемо записати помоћу дисјунктне уније

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots$$

Слиједи

$$\mathrm{P}(A) = \sum_i \mathrm{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$$

пошто је $\mathrm{P}(A \cap B_i) = \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$ за свако $i \geq 1$. ∎

Снагу претходне теореме можемо најбоље осјетити у математичком моделирању догађаја са разгранатом структуром услова. Типична илустрација је и следећи примјер.

Примјер 3.4 *Професор је припремио* 15 *питања распоређене на посебне листице. Студенту одговара* 10 *питања. Шта је вјероватније: да студент извуче "добру" листицу када извлачи као први или као други по реду?*

Нека је A догађај да студент извуче добру листицу када извлачи први. Очигледно $\mathrm{P}(A) = 10/15 = 2/3$. *Нека је B догађај да извуче добру листицу када извлачи други по реду. Нека је H_1 догађај да је првоизвучена листица била добра, а H_2 догађај да је била лоша. Примјеном формуле тоталне вјероватноће добијамо*

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|H_1)\,\mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(B|H_2)\,\mathrm{P}(H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3}$$

∎

Примјер 3.5 *Нека је у некој популацији људи вјероватноћа да појединац има одређену болест* 1/100. *Постоји тест за то обољење који је у* 90% *испараван, у смислу да је вјероватноћа да ће резултат за болесну особу бити позитиван* 0.9 *а вјероватноћа да ће за здраву бити позитиван* 0.1. *Претпоставимо да је конкретна особа* ***X*** *подвргнута том тесту имала позитиван резултат што је протумачила на следећи начин: "Резултат теста, који је тачан у* 90% *случајева, је био позитиван. То значи да је вјероватноћа да сам стварно оболио такође* 90%.

Међутим, ово је погрешно размишљање. У ствари, особа ***X*** *треба да тражи условну вјероватноћу* ***постојања обољења ако је тест позитиван****. Претпоставка говори о нечем сасвим другом. Она говори о вјероватноћи да је* ***тест позитиван, ако је болест присутна****. У принципу,* $\mathrm{P}(A|B)$ *није исто као* $\mathrm{P}(B|A)$.

Нека је сада A догађај да је особа ***X*** *болесна, а B догађај да је тест позитиван. Особа* ***X*** *је заинтересована за условну вјероватноћу* $\mathrm{P}(A|B)$. *Претпоствка нам говори да ако је особа болесна, онда је вјероватноћа да је тест позитиван* 0.9. *Дакле, имамо* $\mathrm{P}(B|A) = 0.9$, $\mathrm{P}(B|A^c) = 0.1$, *а* $\mathrm{P}(A) = 0.01$. *Да би израчунали* $\mathrm{P}(A|B)$ *користимо Теорему 3.1 у израчунавању* $\mathrm{P}(B)$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(A^c)} = 0.09.$$

Зато је вјероватноћа да је особа која има позитиван резултат на тесту стварно болесна једнака 0.09. *Ово, за тренутак, изгледа апсурдно, али није тешко дати* *објашњење. Пошто је болест ријетка, много је већи број здравих од болесних. Зато, много је већа вјероватноћа да је* $\boldsymbol{X}$ *здрав, а да је тест био позитиван, него да је болестан, а да је тестирање дало исправан резултат.*

■

Техника коју смо примјенили у претходном примјеру је специјалан случајан следећег генералног резултата.

Теорема 3.2 *(Бајесова формула) Нека је* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *партиција скупа елементарних исхода* Ω *тако да је* $\mathrm{P}(B_i) > 0$ *за* $1 \le i \le n$*, и нека је* A *произвољан догађај такав да* $\mathrm{P}(A) > 0$*. Тада је за свако* i*,*

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}.$$

Доказ. Имамо

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$$

што директно слиједи на основу дефиниције и Теореме 3.1. ■

Следећи примјер је интересантна примјена Бајесове формуле.

Примјер 3.6 *Претпоставимо да имамо двије кутије. Прва кутија садјжи двије бијеле и три плаве лопте, док друга кутија садржи три плаве лопте. Извлачимо произвољну лопту из прве кутије и пребацамо у другу. Након тога, извлачимо произвољну лопту из друге кутије. Колика је вјероватноћа да ће тако извучена лопта вити плава? Да би одговорили на ово питање, најприје морамо дефинисати одговорајући простор елементарних исхода* Ω *као*

$$\Omega = \{(b,b), (w,b), (w,w)\},$$

гдје исход (b,b) *значи да су извучене двије плаве, исход* (b,w) *да је прво извучена плава а затим бијела итд. Јасно је да ови елементарни исходи нису једнаковјероватни. Како рачунати вјероватноће за ове елементарне исходе?*

Нека је A *догађај који означава да је последња извучена лопта плаве боје, односно* $A = \{(b,b), (w,b)\}$*, а нека је* B *догађај да је првоизвучена лопта плава, односно* $B = \{(b,b)\}$*. Јасно је да* $\mathrm{P}(B) = 3/5$*. Ако је првоизвучена лопта плава, она се ставља у другу кутију у којој онда има четири плаве лопте. Ово значи да друга лопта коју извлачимо мора бити плава што се записује као*

$$\mathrm{P}(A|B) = 1.$$

слично, имамо

$$\mathrm{P}(A|B^c) = \frac{3}{4}.$$

На сснову теореме о тоталној вјероватноћи, слиједи

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A|B^c)\,\mathrm{P}(B^c) = 1 \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{10},$$

што је одговор на основно питање.

Даље, имамо да је

$$P(\{w,b\}) = P(A) - P(B) = \frac{3}{10}, \text{ а } P(\{w,w\}) = 1 - P(\{w,b\}) - P(B) = \frac{1}{10}.$$

■

Примјер 3.7 *У кутији са резервним дјеловима је 5 нових и 3 стара који се не разликују по изгледу. Случајно се бирају два дијела и користе извјесно вријеме, после чега се враћају у кутију. Касније се опет случајно бирају два резервна дијела.*

а. Наћи вјероватноћу да су оба дијела изабрана у последњем бирању нова (догађај A).

б. Ако су одабрани дијелови у последњем бирању нови, колика је вјероватноћа да су у првом бирању били стари?

а. Друго извлачење зависи од првог, па уводимо хипотезе које се односе на прво извлачење: H_1 - оба дијела су нова, H_2 - један дио је нов, други стар, H_3 - оба су стара.

$$P(H_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}, P(H_2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}, P(H_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}.$$

Констатујући да ако смо у првом извлачењу извукли нов дио, он ће се за друго извлачење третирати као стари, имамо

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}, P(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28}, P(A|H_3) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}.$$

Из формуле тоталне вјероватноће

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \frac{150}{28^2} = 0.1913.$$

б. Ово је типичан примјер за коришћење Бајесове формуле

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1}{5}.$$

■

Примјер 3.8 *Међу 1000000 новчића у кутији један је искован тако да је на обје стране писмо (П), док су остали "фер". Неко случајно узима новчић из кутије и баца га 10 пута. Констатује се да је у свих 10 бацања пало П. Шта је вјероватније: да је бацан "фер" или "фалш" новчић?*

Нека је A догађај да је случајно изабрани новчић "фалш", а B догађај да је 10 пута узастопце пало писмо (П).

Јасно је да је $P(A) = 10^{-6}$. Иако би, на основу доступних података могли и конкретно да израчунамо вриједност $P(B)$ као

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c),$$

то у овом случају неће бити неопходно.

Наиме, из Бајесове формуле, имамо да је

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}, \text{ док је } P(A^c|B) = \frac{P(A^c)P(B|A^c)}{P(B)}.$$

Слиједи

$$\frac{P(A|B)}{P(A^c|B)} = \frac{2^{10}}{10^6 - 1} \approx 0.001,$$

што значи да је $P(A^c|B)$ око 1000 пута вјероватнији од $P(A|B)$. ■

Независност догађаја

Након што смо дефинисали условну вјероватноћу, могуће је дефинисати појам независних догађаја. Интуитивно, да би догађаји A и B били независни, вјероватноћа догађаја A се не смије промијенити у случају реализације и догађаја B. У терминима условне вјероватноће, слиједи да су догађаји A и B независни ако вриједи $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)$.

Међутим, ова дефиниција није задовољавајућа из два разлога. Први је то што $\mathrm{P}(A|B)$ није дефинисано ако је $\mathrm{P}(B) = 0$, и други је тај што дефиниција не би била симетрична у односу на A и B. Стога, независност дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 3.3 *Догађаји A и B су **(међусобно) независни** ако вриједи*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Уопштеније, догађаји $A_1, A_2, \ldots, A_n$ су независни ако вриједи

$$\mathrm{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathrm{P}(A_j)$$

за сваки подскуп индекса $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Примјетимо да у случају $\mathrm{P}(B) > 0$, онда из $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ слиједи

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A) \text{ односно } \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),$$

што потврђује смисленост претходно дате дефиниције.

Примјер 3.9 *На случајан начин, извлачимо једну карту из скупа од* 52 *карте. Нека је* A *догађај да је изабрана карта дама, а* B *догађај да је изабрана карта треф. Тада је* $\mathrm{P}(A) = 4/52 = 1/13$ *и* $\mathrm{P}(B) = 13/52 = 1/4$. *Догађај* $A \cap B$ *одговара ситуацији да је извучена карта дама треф, а вјероватноћа тог догађаја је очигледно* $1/52$. *Упоређујући ове виличине, слиједи*

$$\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$$

и зато, на основу дефиниције, слиједи да су догађаји A *и* B *независни. Иако овај резултат иде дјелимично против наше интуиције, објашњење постоји. Наиме, уколико вам је речено да је извучена карта дама, тиме се ни на који начин не увећава ваше сазнање о томе да ли је карта треф или не.* ■

Примјер 3.10 *Експеримент се састоји у бацању два фер новчића и регистровању резултата. Скуп елементарних исхода је наравно*

$$\Omega = \{\textit{ГГ}, \textit{ГП}, \textit{ПГ}, \textit{ПП}\}.$$

Разматрамо следеће догађаје

$$A = \{\textit{ГГ}, \textit{ГП}\},\ B = \{\textit{ГГ}, \textit{ПГ}\},\ C = \{\textit{ГП}, \textit{ПГ}\}.$$

Слиједи $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/2$. *Такође,*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\{\textit{ГГ}\}) = \frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(\{\textit{ГП}\}) = \frac{1}{4}, \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(\{\textit{ПГ}\}) = \frac{1}{4}.$$

За сад, изгледа као да су A, B, C *независни догађаји. Међутим, видимо да је*

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ и зато } \mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C).$$

Стога, A, B, C *нису независни догађаји.* ■

Примјер 3.11 ***(Рођендански парадокс)*** *Ово је класичан примјер и овдје је, између осталог, да би вас на неки начин изненадио. Претпоставимо да имамо* r *људи у соби. Подразумијевамо да су њихови рођендани распоређени на случајан начин током године (подразумијевамо да година има 365 дана). Даље, сматрамо да су догађај "особа* X *има рођендан на дан* p_1*" и догађај "особа* Y *има догађај на дан* p_2*" међусобно независни. Колика је вјероватноћа да двије особе у соби имају рођендан истог дана?*

Претпоставимо да су особе нумерисане бројевима од 1 *to* r. *Користећи Лему 2.2 увјерени смо да постоји* $(365)^r$ *могућих колекција рођендана. Означимо са* $E(i, y)$ *догађај да особа* i *има рођендан на дан* y*, гдје је* $i = 1, \ldots, r$ *и* $y = 1, \ldots, 365$. *На основу дате независности догађаја слиједи*

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} E(i, y_i)\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}(E(i, y_i)) = \left(\frac{1}{365}\right)^r$$

Ово значи да сви могући исходи експеримента имају једнаку вјероватноћу. Зато, довољно је наћи број оних исхода тако да се два рођендана не поклапају. Вјероватноћа да се два рођендана не поклапају је

$$\frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - r + 1)}{365^r}$$

Ово се објашњава на следећи начин. Нека је "повољан исход" експеримента да два од r *људи у соби немају рођендан истог дана. Бројимо колико укупно има таквих низова. Први човјек може имати рођендан на било који од могућих* 365 *дана, други може имати било који дан сем овај који је већ одабран од првог, дакле* 364*, трећи на* 363 *итд. Укупно, "повољних догађаја" има* $365 \cdot 364 \cdots (365 - r + 1)$*. Скуп елементарних исхода је величине* $(365)^r$ *и тиме резултат директно слиједи на основу Леме 2.1.*

Сада је могуће провјерити да је вјероватноћа да двије особе имају рођендан истог дана мања од $1/2$ *заправо за* $r = 23$*. Ово је на неки начин веома изненађујући резултат да је вјероватноћа да се у скупу од* 23 *човјека нађу два са истим рођенданом већа од* $1/2$*.* ■

Примјер 3.12 *Познато је да је у 10 бацања коцке за игру пала бар једна јединица. Колика је вјероватноћа да су пале бар двије јединице?*

Нека је A *догађај да је пала бар једна јединица, а* B *бар двије јединице.*

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 1 - \frac{P(AB^c)}{P(A)} = 1 - \frac{P(AB^c)}{1 - P(A^c)}.$$

Пошто је AB^c *догађај да је у 10 бацања пала тачно једна јединица, а она може пасти на било којој од 10 позиција, онда је*

$$P(AB^c) = 10 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9 .$$

Коначно, рачунајући претодно и

$$P(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

слиједи да је

$$P(B|A) = 0.61448.$$

■

4 Случајне промјенљиве

Често су резултати неког експеримента мање битни од последица које они производе. Например, коцкар није толико заинтересован за сам исход игре у којој учествује, колико за њихове финансијске последице. Дакле, коцкар је првенствено заинтересован за једну **функцију исхода** игре. Таква функција, која пресликава скуп исхода у неки скуп реалних бројева се назива **случајна промјенљива** и то је у принципу тема овог поглавља.

4.1. Дефиниције. Функција расподјеле

Претпоставимо да бацамо фер новчић n пута. Сваки пут кад падне писмо, изгубимо један евро, а кад падне глава добијемо један евро. Простор елементарних исхода овог експеримента су уређене $n-$торке $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ гдје $\omega_i \in \{-1, 1\}$ представља исход $i-$тог бацања, при чему -1 симболизује писмо, а 1 главу. Примјетимо да простор елементарних исхода можемо скраћено записати у облику $\{-1, 1\}^n$. Пошто нас примарно интересује крајњи финансијски резултат овог експеримента, онда ћемо дефинисати функцију, која дефинише нашу "срећу", $X : \Omega \to \mathbb{N}$ на следећи начин

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Дакле, наш добитак је дефинисан промјенљивом X. Таква пресликавања се називају **случајне промјенљиве**.

Дефиниција 4.1 ***Случајна промјенљива*** *X је пресликавање из скупа елементарних исхода Ω у скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, такво да $X^{-1}(t) \subseteq \Omega$, за свако $t \in \mathbb{R}$.*

Примјер 4.1 *Лопта се баца у кош док се не постигну 2 поготка, или не изведу 4 бацања. Нека случајна промјенљива X представља број бацања, а Y број промашаја. Циљ је да опишемо скуп елементарних исхода и на њему одредити X и Y. Најприје, означимо са 0 промашај, а са 1 погодак. Тада је*

$$\Omega = \{11, 101, 011, 1001, 1000, 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101\}.$$

Пресликавања X и Y можемо представити у следећој табели

	11	*101*	*011*	*1001*	*1000*	*0000*	*0001*	*0010*	*0011*	*0100*	*0101*
X	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
Y	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*	*4*	*3*	*3*	*2*	*3*	*2*

Према томе, могуће реализације за X *су* $2, 3$ *и* 4 *а за* Y *су* $0, 1, 2, 3$ *и* 4. *Например,* $\{X < 2\} = \emptyset$, $\{Y < 2\} = \{11, 101, 011\}$.

■

Примјер 4.2 *Претпоставимо да кутија садржи* 12 *предмета од којих су* 3 *дефектна. Из кутије извлачимо на случајан начин* 3 *производа. Нека је* X *случајна промјењљива која представља број дефектних производа у том извученом скупу од три производа.*

Јасно је да је број елементарних исхода $\binom{12}{3} = 220$, *а скуп вриједности које* X *може узети је* $\{0, 1, 2, 3\}$. ■

Типично, случајне промјењливе се означавају великим словима при дну енглеског алфабета, као X, Y или Z. У принципу, најчешће смо заинтересовани за вјероватноћу да случајна промјењлива има одређену вриједност. Например, интересује нас вјероватноћа

$$\mathrm{P}\left(\{\omega : \ X(\omega) = x\}\right)$$

да случајна величина X има вриједност x. Слиједи неколико врло важних дефиниција у којима дефинишемо кључне појмове везане за тему случајних промјењливих.

Дефиниција 4.2 ***Расподјела вјероватноће случајне промјењливе*** X *је функција* $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *дефинисана на следећи начин*

$$p_X(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

Примјер 4.3 *Новчић се баца три пута. Одредити расподјелу вјероватноће случајне промјењливе* X *која броји појављивања писма у том експерименту.*

Најприје, уочавамо да се писмо може појавити 0,1, 2 или 3 пута. Сходно томе рачунамо вјероватноће

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

што је вјероватноћа догађаја $\{ГГГ\}$, *односно догађаја да је грб пао три пута. Затим имамо случај*

$$P(X = 1) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

што одговара догађају $\{ПГГ,\ ГПГ,\ ГГП\}$. *Ако је писмо пало два пута, онда је вјероватноћа*

$$P(X = 2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

јер то одговара догађају {ППГ, ПГП, ГПП}. На крају, имамо и догађај {ППП}, а његова вјероватноћа је

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Тиме смо добили расподјелу вјероватноће за промјенљиву X*, а што уобичајено и скраћено записујемо као*

$$\mathsf{X} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix}$$

при чему су у првој врсти вриједности које узима промјенљива X *а у другој одговарајуће вјероватноће.* ∎

Примјер 4.4 *Коцка се баца три пута. Одредити расподјелу вјероватноће случајне промјенљиве* X *која броји појављивања четворке у том експерименту.*

Најприје, уочавамо да се четворка може појавити 0,1, 2 или 3 пута. Сходно томе рачунамо вјероватноће

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3,$$

јер је вјероватноћа да падне број који није четворка једнака $\frac{5}{6}$*. Слично, добијамо*

$$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3,$$

јер имамо четворка може пасти у било која од три бацања, вјероватноћа да падне четворка је $\frac{1}{6}$*, а нечег што није четворка* $\frac{5}{6}$*. Ако је четворка пала два пута, онда је вјероватноћа*

$$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}.$$

На крају, вјероватноћа да четворка падне три пута узастопице је

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

∎

Примјер 4.5 *Из кутије са 100 артикала међу којима има 8 неисправних, извучено је одједном 5 ради контроле. Одредити расподјелу случајне промјенљиве - број неисправних у узорку.*

Нека је посматрана случајна промјенљива X*. Број начина да у скупу од 5 арти-*

кала имамо k неисправних је

$$\binom{8}{k}\binom{92}{5-k},$$

гдје је k из скупа $\{0,1,2,3,4,5\}$. Укупан број начина да направимо узорак од 5 артикала из групе од 100 је $\binom{100}{5}$, па је стога вјероватноћа

$$P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}\binom{92}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \quad \text{за } k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

■

Дефиниција 4.3 ***Функција расподјеле случајне промјенљиве*** *X је функција $F_X : \mathbb{R}\to[0,1]$ дефинисана на следећи начин*

$$F_X(x)=\mathrm{P}(X\le x).$$

Напомена: У једном броју књига из вјероватноће, функција расподјеле је другачије дефинисана, као

$$F_X(x)=\mathrm{P}(X<x).$$

Ова мала разлика у дефиницији утиче значајно на особине функције расподјеле о којима ћемо говорити касније.

Примјер 4.6 *Претпоставимо да случајна промјенљива X узима вриједност 1 са вјероватноћом 1, односно $\mathrm{P}(X=1)=1$. Функција расподјеле је онда дата са $F_X(x)=1$ за $x\ge 1$ и $F_X(x)=0$ за $x<1$. Примјетимо да је ова функција непрекидна са десне стране у тачки 1, али није са лијеве стране.* ■

Примјер 4.7 *Размотримо случајну промјенљиву X за коју вриједи*

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\ \text{и}\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{4}.$$

Функција расподјеле за X је

$$F_X(x)=1\begin{cases}0 & \text{ако } x<1,\\ 1/2 & \text{ако } 1\le x<2,\\ 3/4 & \text{ако } 2\le x<3,\\ 1 & \text{ако } x\ge 3\end{cases}$$

■

Примјер 4.8 *Претпоставимо да бацамо фер новчић n пута. Број глава је регистрован преко случајне промјенљиве X. Расподјела вјероватноће случајне величине је*

$$p_X(k) = \binom{n}{k} 2^{-n},$$

за $k = 0, 1, \ldots, n$ и $p_X(k) = 0$ за све остале вриједности параметра k. Зато, функција расподјеле

$$F_X(x) = 2^{-n} \sum_{0 \le k \le [x]} \binom{n}{k},$$

за $0 \le x < n$; $F_X(x) = 0$ за $x < 0$; $F_X(x) = 1$ за $x \ge n$. ■

Особине функције расподјеле случајне промјенљиве

Следећа лема ће нам помоћи у доказивању неких од најважнијих особина функције расподјеле случајне промјенљиве X.

Лема 4.1

(а) *Нека је $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ низ растућих догађаја. Тада за $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ вриједи*

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

*Ова особина представља **непрекидност вјероватноће у односу на низ растућих догађаја**.*

(б) *Нека је $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ низ опадајућих догађаја. Тада за $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ вриједи*

$$\mathrm{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n).$$

*Ова особина представља **непрекидност вјероватноће у односу на низ опадајућих догађаја**.*

Доказ. (а) Можемо написати

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots.$$

Примјетимо да је ово унија међусобно дисјунктних догађаја, те је зато

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i \setminus A_{i-1}) \\
&= \mathrm{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{P}(A_i) - \mathrm{P}(A_{i-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \{\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_3) - \mathrm{P}(A_2) + \dots \\
&= + \mathrm{P}(A_n) - \mathrm{P}(A_{n-1})\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)
\end{aligned}$$

(б) Дефинишимо $C_i = B_1 \setminus B_i$, за $i \in \mathbb{N}$. Јасно је да је овако дефинисан низ скупова неопадајући, односно $C_i \subseteq C_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, а вриједи

$$B_1 \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Из дефиниције слиједи да $\mathrm{P}(C_n) = \mathrm{P}(B_1) - \mathrm{P}(B_n)$. На основу (а) имамо

$$\mathrm{P}(B_1) - \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B_1 \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(C_n) = \mathrm{P}(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n),$$

одакле слиједи тврђење.

■

Теорема 4.1 *Функција расподјеле F_X случајне промјенљиве X има следеће особине*

(а) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$;

(б) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$;

(в) *F_X је растућа функција, односно ако*

$$x \le y, \text{ онда је } F_X(x) \le F_X(y).$$

(г) *F_X је непрекидна са десне стране.*

(д) $\mathrm{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$;

(ђ) $\mathrm{P}(x < X \le y) = F_X(y) - F_X(x)$;

Доказ.

(а) Узмимо да је $A_i = \{X \le i\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le i\}$. За $i \to \infty$, слиједи $A_i \uparrow \Omega$, па закључак слиједи из (а) Леме 4.1.

(б) Доказује се на аналоган начин као у а, опет користећи (б) Леме 4.1.

(в) Из $x < y$, очигледно слиједи да $\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\}$, а тиме је $\mathrm{P}(\{X \le x\}) \le \mathrm{P}(\{X \le y\})$, односно $F_X(x) \le F_X(y)$.

(г) Нека је x произвољан реалан број, а x_n произвољан низ такав да $x_n \downarrow x$. Очигледно је да је $B_n = \{X \leq x_n\}$ опадајући низ догађаја, и вриједи

$$\{X \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}.$$

На основу (б) Леме 4.1, слиједи

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n),$$

чиме је тврђење доказано.

(д) Како је $\{X > x\} = \{X \leq x\}^c$, онда слиједи

$$\mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(\{X \leq x\}^c) = 1 - F_X(x).$$

(ђ) Пошто је $\{x < X \leq y\} = \{X \leq y\} \setminus \{X \leq x\}$, онда

$$\mathrm{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x).$$

■

4.2. Дискретне случајне промјенљиве

У овом параграфу ћемо с ебавити случајним промјенљивим које сликају простор исхода на коначан или пребројиво бесконачан скуп. Такве случајне промјенљиве зовемо **дискретним**. Расподјелу вјероватноћа у случају дискретне случајне промјенљиве могуће је представити на начин

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots \end{pmatrix}$$

Лако је уочити да је у случају дискретне расподјеле, одговарајућа функција расподјеле степенаста.

Бернулијева случајна промјенљива

Претпоставимо да изводимо експеримент бацања несиметричног новчића, тако да је вјероватноћа да падне глава p, односно писма $1-p$. Бернулијева случајна промјенљива узима двије вриједности 1 и 0, у зависности од тога да ли је пала глава или писмо.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ако је пала глава ,} \\ 0 & \text{ако је пало писмо.} \end{cases}$$

Онда је расподјела вјероватноће случајне промјенљиве X

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{ако } x = 1, \\ 1-p & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

Иако веома једноставна, Бернулијева случајна промјенљива је веома важна. Она описује све оне животне ситуације које могу имати само два исхода. Например,

- Стање телефонске линије може бити или **слободно** или **заузето**.
- Особа може бити или **здрава** или **болесна** у односу на одређену болест.
- Неко је или **подржавалац** или **противник** одређеног политичког кандидата на изборима.

Комбиновањем више Бернулијевих случајних промјенљивих, могуће је конструисати компликованије случајне промјенљиве.

Дефиниција 4.4 ***Индикатор*** *I_A догађаја A је случајна промјенљива дефинисана са*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Дакле, $\{I_A = 1\} = A$, $\{I_A = 0\} = \bar{A}$ и расподјела

$$\mathbf{I_A} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(\bar{A}) & p(A) \end{pmatrix}$$

Биномна случајна промјенљива

Несиметричан новчић баца n пута заредом. Претпоставимо да је вјероватноћа да падне глава p а писмо $1-p$, независно од претходних бацања, гдје је $0 < p < 1$. Нека је X случајна промјенљива која региструје број глава у n бацања. Ова случајна промјенљива, коју ћемо звати **биномна случајна промјенљива**, очигледно зависи од параметара n и p. Стога, $X : \mathcal{B}(n;p)$ је кратак запис за случајну промјенљиву X која има биномну расподјелу и параметре n и p. Расподјела вјероватноћа за биномну случајну промјенљиву је

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

На основу бономне формуле

$$1 = 1^n = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k}$$

слиједи да је расподјела вјероватноћа биномне случајне величине нормализована.

Овај примјер има и свој општији исказ. Наиме, ако изводимо одређени експеримент n пута, а вјероватноћа реализације догађаја је p, онда је вјероватноћа да ће се у том низу извођења, догађај A појавити k пута

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

4.1 *Колика је вјероватноћа да с еу 10 бацања коцкице за игру шестица појави*

(а) *пет пута,*

(б) *више од два, али мање од пет пута?*

Хипергеометријска случајна промјенљива

Претпоставимо да у кутији имамо N предмета, од којих су $a > 0$ бијелих и $b > 0$ црних $(a + b = N)$. На случајан начин, без враћања, узимамо n елемената. Нека случајна промјенљива X представља број бијелих предмета. Ако пођемо од претпоставке да су сви избори подксупова од n елемената једнаковјероватни, онда се једноставним комбинаторним закључивањем добија

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

За случајну промјенљиву X кажемо да има **хипергеометријску** расподјелу. Наглашавамо да је $\binom{m}{j} = 0$, ако је $j > m$.

Геометријска случајна промјенљива

Несиметричан новчић се баца све док не падне глава. Претпоставимо да је вјероватноћа да падне глава p, а писмо $1 - p$, гдје је $0 < p < 1$. **Геометријска случајна промјенљива** представља број бацања док се не добије глава. Расподјела вјероватноће геометријске случајне промјенљиве је

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

пошто је $(1 - p)^{k-1} p$ вјероватноћа да писмо падне узаступно $k - 1$ пут, а у $k-$том покушају глава. Расподјела вјероватноћа је нормализована

$$p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Општије, геометријска случајна промјенљива се може интерпритирати као промјенљива која идентификује број поновљених покушаја одређеног експеримента (не обавезно бацања новчића) до појаве "успјеха", чија је вјероватноћа $1 - p$.

Пуасонова случајна промјенљива

Случајна промјенљива X има **Пуасонову расподјелу** са параметром $\lambda > 0$ ако је

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

за $k = 0, 1, \ldots$ Пуасонова расподјела је у извјесном смислу апроксимација биномне расподјеле. Наиме, у примјенама код биномне расподјеле $\mathcal{B}(n; p)$, имамо да је n често велики број, па је тиме израчунавање коефицијената $\binom{n}{k}$ захтјевно. Зато су нам потребне неке апроксимативне формуле.

Примјер 4.9 *Велики лустер има 200 сијалица. Вјероватноћа да у одређеном временском периоду T прегори једна сијалица је $0,03$. Сијалице се мијењају ако прегори више од 10. Колика је вјероватноћа да не дође до мијењања?*

Број прегорелих сијалица на лустеру за вријеме T је случајна промјенљива S_{200} : $\mathcal{B}(200; 0.03)$. Вјероватноћа која нас интересује је

$$\mathrm{P}(S_{200} \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{P}\{S_{200} = k\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{200}{k} 0.03^k 0.97^{200-k}.$$

Примјетимо да је релативно неудобно рачунање биномних коефицијената у претходној формули. ■

Примјер 4.10 *(**Пуасонова апроксимација**)*
Претпоставимо да у Бернулијевој шеми вјероватноћа p зависи од редног броја опита, односно $p = p_n$, уз услов да важи

$$\lim_{n\to\infty} p_n \cdot n = \lambda, \ \lambda > 0,$$

тада за свако фиксирано k, $k = 0, 1, \ldots$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

За свако фиксирано k важи

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} n^k p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k} =$$

$$\frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{-k} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \lim_{n\to\infty} (np_n)^k \lim_{n\to\infty} \left[(1-p_n)^{\frac{-1}{p_n}}\right]^{np_n} =$$

$$\frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}) \lambda^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left[(1-p_n)^{\frac{-1}{p_n}}\right]^{np_n} = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}.$$

Дакле, Пуасонова апроксимација даје

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

за n велико, гдје се узима $\lambda \approx np$. Процјена грешке апроксимације показују да се за примјене задовољавајућа тачност већ кад је n неколико десетина, а $pn \leq 10$. На основу овог закључујемо да је Пуасонова апроксимација оправдана у случају биномне расподјеле кад је n велико, а p мало.
Например, нека је $n = 100$ и $p = 0.01$. Тада је вјероватноћа $k = 5$ успјешних реализација неког догађаја у $n = 100$ покушаја користећи биномну расподјелу

$$\frac{100!}{95!5!}0.01^5(1-0.01)^{95} = 0.00290.$$

На другој страни, користећи Пуасонову апроксимацију $\lambda = np = 100 \cdot 0.01 = 1$, добијамо

$$e^{-1}\frac{1}{5!} = 0.00306.$$

■

Негативна биномна расподјела

Претпоставимо да је у одређеном експерименту вјероватноћа реализације догађаја A једнака p. Вршимо понављање експеримента све док се k пута не реализује догађај A. Ако је X случајна величина која броји колико пута је вршен експеримент до постизања циља, онда је њена расподјела дата по обрасцу

$$P(X = m) = \binom{m-1}{k-1} p^k q^{m-k},$$

$q = 1 - p$, $m \in \mathbb{N}$.

Јасно је да се у првих $m - 1$ извођења експеримента догађај A реализовао тачно $k - 1$ пута, па је број различитих распореда да се то деси $\binom{m-1}{k-1}$. Вјероватноћа сваког таквог распореда је $p^{k-1}q^{m-k}$. Пошто се у $k-$том извођењу експеримена реализовао догађај A, онда је укупна вјероватноћа $p^k q^{m-k}$.

Ова расподјела се назива негативна биномна расподјела.

Примјер 4.11 *Изводи се експеримент бацања коцке за игру. Колико је потребно извести бацања n како би вјероватноћа да се три пута добије шестица била већа од 50 процената?*

Нека је X случајна величина која дефинише број бацања коцке до појаве треће шестице. Очигледно, X има негативну биномну расподјелу, са параметрима $k = 3$ и $p = 1/6$. Тражени број ће бити најмањи природни број n тако да

$$\binom{n-1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \geq 0.5.$$

Испробавањем, долазимо да k мора бити најмање 16. ■

4.3. Дводимензионалне случајне промјењиве

До сада смо посматрали случајне промјењиве чије су реализације реални бројеви. Међутим, у опиту се истовремено може посматрати више случајних промјењивих истовремено. Примјера ради, за потребе неких климатолошких испитивања, можемо истовремено посматрати температуру, ваздушни притисак, влажност ваздуха... Задржаћемо се на посматрању двије случајне промјењиве јер је случај за три и више у принципу исти. Рећи ћемо да је случајна промјењива дводимензионална, ако је то функција чији је домен скуп неких елементарних исхода Ω, а слике су парови реалних бројева. Ако су промјењиве које се посматрају X и Y, одговарајућу дводимензионалну промјењиву пишемо као (X, Y).

Примјер 4.12 *Посматрамо експеримент бацања фер новчића све док не падне писмо, или док се не изведу три бацања. Скуп елементарних исхода су низови П,ГП,ГГП,ГГГ. Нека је X случајна промјењива која представља број бацања, а Y број писама у опиту бацања до првог писма, закључно са три бацања. Тада је, например*

$$(X,Y)(\text{П}) = (X(\text{П}), Y(\text{П})) = (1,1),\ (X,Y)(\text{ГП}) = (2,1),$$

$$(X,Y)(\text{ГГП}) = (3,1),\ (X,Y)(\text{ГГГ}) = (3,0).$$

Према томе, скуп реализација за (X, Y) је скуп парова

$$\{(1,1),(2,1),(3,1),(3,0)\},$$

и коначан је. ■

Дефиниција 4.5 *Дводимензионална случајна промјењива $U = (X, Y)$ је пресликавање скупа исхода Ω у скуп $\mathbb{R}^2$-парова реалних бројева, тако да су X и Y једнодимензионалне случајне промјењиве.*

Ако је скуп реализација случајне промјењиве (X, Y) коначан или пребројив, кажемо да је (X, Y) дискретна случајна промјењива.

Расподјела дводимензионалне случајне промјењиве

Дефинисаћемо расподјелу дводимензионалне случајне промјењиве. Размотримо најприје следећи примјер.

Примјер 4.13 *Новчић се баца три пута. Нека је X промјењива која представља број грбова у 3 бацања, а Y број писама за редом од почетка (од прве позиције).*

	ППП	ППГ	ПГП	ПГГ	ГПП	ГПГ	ГГП	ГГГ
X	0	1	1	2	1	2	2	3
Y	3	2	1	1	0	0	0	0

Одредимо вјероватноће неких реализација

$$\mathrm{P}\{(X,Y)=(0,3)\}=\mathrm{P}(\{\textit{ППП}\})=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}\{(X,Y)=(2,0)\}=\mathrm{P}(\{\textit{ППП,ГГП}\})=\frac{2}{8},$$

а поступак можемо комплетирати у следећој табели

(X,Y)	*(0,3)*	*(1,2)*	*(1,1)*	*(2,1)*	*(1,0)*	*(2,0)*	*(3,0)*	*збир*
P	*1/8*	*1/8*	*1/8*	*1/8*	*1/8*	*2/8*	*1/8*	*1*

■

Уопште, нека су реализације за $X : x_1, x_2, \ldots, x_k$, а за $Y : y_1, y_2, \ldots, y_m$. Скуп парова бројева (x_i, y_j) и скуп одговарајућих вјероватноћа

$$\mathrm{P}\{X=x_i, Y=y_j\}, i=1,2,\ldots,k,\ j=1,2,\ldots,m$$

зваћемо **здруженом** или **заједничком расподјелом случајне промјенљиве** (X,Y). Другим ријечима, здружена расподјела је функција над скупом реализација за (X,Y), чије су вриједности вјероватноће тих реализација. При томе, обично, користимо ознаку

$$p_{ij}=\mathrm{P}\{X=x_i, Y=y_j\}$$

и расподјелу представљамо табелом

X/Y	y_1	y_2	·	·	·	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	·	·	·	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	·	·	·	p_{2m}
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·
x_k	p_{k1}	p_{k2}	·	·	·	p_{km}

Збир свих вјероватноћа здружене расподјеле је 1, што може послужити као прва контрола рјешења задатака.

Независност случајних промјенљивих

Посматрајући случајне промјенљиве X и Y можемо се питати: Да ли претпоставка да случајна промјенљива X узима неку вриједност, има утицаја за случајну прмјенљиву Y. На примјер: да ли тежина човјека зависи од висине, да ли боја косе има утицаја на боју очију... Другом ријечима, нас занима **зависност** случајних промјенљивих.

Дефиниција 4.6 *Дискретне случајне промјенљиве X и Y су независне ако је*

$$\mathrm{P}\{X=x_i, Y=y_j\}=\mathrm{P}\{X=x_i\}\,\mathrm{P}\{Y=y_j\}$$

за све i и j, односно ако су $\{X=x_i\}$ и $\{Y=y_j\}$ независни.

Примјетимо да је за испитивање независности X и Y нужно познавати здружену расподјелу за (X, Y).

Примјер 4.14 *Подсјетимо се примјера 4.13. На једноставан начин показујемо да су X и Y у овом примјеру зависне промјенљиве. Наиме,*

$$\mathrm{P}\{X=0, Y=1\} = 0 \neq \mathrm{P}\{X=0\}\,\mathrm{P}\{Y=1\} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{32}.$$

■

Као и у генералном случају испитивања да ли су два догађаја независна, ни у случају случајних промјенљивих није нимало једноставно утврдити независност зато што нам здружена расподјела најчешће нису познати.

4.4. Непрекидне случајне промјенљиве

У досадашњем тексту, посматрали смо искључиво ситуацију највише пребројивог скупа елементарних исхода Ω. За потребе овог параграфа и неких разматрања касније, упознаћемо се по први пут са општијим случајем, гдје простор елементарних исхода може бити и непребројив. То ће произвести одређена **прилагођавања** већ познатих дефиниција. Најприје, наводимо неколико примјера гдје је Ω непребројив скуп.

Примјер 4.15 *Опит се састоји у регистровању положаја велике казаљке часовника у тренутку престанка рада часовника. Као скуп Ω можемо узети скупу свих тачака на кружници. Можемо поставити питање колика је вјероватноћа да се казаљка заустави између 12 и 1. Пошто је величина лука између 12 и 1 дванаестина обима кружнице, онда је вјероватноћа једнака $\frac{1}{12}$.* ■

Примјер 4.16 *Претпоставимо да на случајан начин бирамо тачку из скупа $[0, 1]$. Дакле, скуп елементарних исхода Ω су све тачке из овог скупа, а то значи непребројив.* ■

Примјер 4.17 *Опит се састоји у континуираном мјерењу температуре на неком локалитету. Температура се мјери 24 часа. Пошто је дневни график температуре непрекидна функција, онда је природно за Ω узети скуп непрекидних функција задатих на интервалу од 24 сата.* ■

Подсјетимо се Дефиниције 2.4, која се односи на случај кад је Ω највише пребројив скуп. Да би функцију P азвали вјероватноћом, односно вјероватносном функцијом мора да вриједи:

1. P је ненегативна, $\mathrm{P}(\omega) \geq 0,\ \omega \in \Omega$.
2. P је нормализована, односно
$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}(\omega) = 1.$$
3. За међусобно дисјунктне догађаје $A_1, A_2, \ldots$ вриједи
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Следећа дефиниција вјероватносне функције је општија у односу на претходну јер се не подразумијева да је простор елементарних исхода Ω највише пребројив.

Дефиниција 4.7 *Нека је Ω скуп елементарних исхода експеримента $\mathcal{E}$. Функција $\mathrm{P} : \Omega \to [0, 1]$ се назива **вјероватносном функцијом** ако важи*

*(a) (**Нормализованост**)* $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

*(б) (**Адитивност**) За међусобно дисјунктне догађаје $A_1, A_2, \ldots$*
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Као што видимо, ова дефиниција је суштински иста као и дефиниција 2.4, само што се више не наглашава да је Ω највише пребројив. Ипак, треба обратити пажњу да је у услову (**б**) индиректно речено да услов адитивности важи само за **пребројиве** фамилије скупова. Такође, ненегативност функције P је садржана у самој дефиницији у услову $\mathrm{P} : \Omega \to [0, 1]$.

У разматраним примјерима, видјели смо ситуације кад је простор елементарних исхода Ω непребројив. Прво питање, које постављамо је шта, под том претпоставком, заправо значи услов
$$\mathrm{P}(\Omega) = 1.$$
Као што знамо, у случају пребројивог Ω то је била сума, али кад је Ω непребројив, онда је неопходно дефинисати вјероватносну функцију P на други начин. Рецимо, у Примјеру 4.15, вјероватноћа да се казаљка заустави између тачака A и B на кружници је једнака количнику површине исјечка OAB и површине круга, гдје је O центар круга.
$$\mathrm{P}(\text{Казаљка између тачака A и B}) = \frac{\text{Површина OAB}}{\text{Површина круга}}.$$
Лако је провјерити да су сви услови из дефиниције вјероватносне функције задовољени.

4.5. Густина расподјеле

У случају непребројивог простора елементарних исхода Ω, тражимо вјероватноће догађаја
$$\{a < X \leq b\} = \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leq b\}.$$

Јасно је да, у општем случају, не можемо изразити вјероватноћу овог догађаја као што смо то учинили у случају дискретне случајне промјенљиве - као неку суму елементарних исхода од којих је сачињен тај догађај. Стога, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.8 *Случајна промјенљива X је* ***непрекидна*** *ако постоји функција $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, чије су вриједности ненегативне, таква да за сваки интервал $(a, b]$ вриједи*

$$\mathrm{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

Функција $f(x)$ зове се ***густина*** *(расподјеле) за промјенљиву X.*

Примјетимо да, на основу претходне дефиниције, за сваку непрекидну случајну промјенљиву вриједи да је $\mathrm{P}(X = a) = 0$, за неко $a \in \mathbb{R}$. Одатле директно слиједи

$$\mathrm{P}(a \leq X < b) = \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}(a < X < b).$$

Такође, примјетимо да за случајну промјенљиву X, са густином $f(x)$, вриједи

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Као и у случају дискретне случајне промјенљиве, разматрамо неке расподјеле најважнијих случајних промјенљивих.

Експоненцијална расподјела

За случајну промјенљиву X са густином

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{cases}$$

за $\alpha > 0$, кажемо да има експоненцијалну расподјелу, а означавамо са $X : \mathcal{E}(\alpha)$. Експоненцијална расподјела је важан модел за проучавање времена исправног рада уређаја, уколико уређај до тренутка "отказа" функционише "као нов"("отказ" настаје због спољашњих удара). У том случају вријеме исправног рада X има експоненцијалну расподјелу. Разлог лежи у њеном следећем својству. За $X : \mathcal{E}(\alpha)$ вјероватноћа догађаја $\{a \leq X \leq a + x\}$, $x > 0$, условно $\{X \geq a\}$ је

$$\mathrm{P}\{a \leq X \leq a + x \mid X \geq a\} = \frac{\mathrm{P}(\{a \leq X \leq a + x\}\{X \geq a\})}{\mathrm{P}\{X \geq a\}} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\{a \leq X \leq a + x\}}{\mathrm{P}\{X \geq a\}} = \frac{e^{-\alpha a} - e^{-\alpha(a+x)}}{e^{-\alpha a}} = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Протумачимо овај резултат у терминима "отказа": ако знамо (или ако претпостављамо) да до тренутка a уређај функционише (то је догађај $\{X \geq a\}$) вјероватноћа да он откаже у временском интервалу дужине x послије тренутка a, зависи само од x, а не и од a.

Униформна расподјела

Какву расподјелу треба подразумијевати за случајну промјенљиву X која представља "случајно изабрану" тачку из интервала $[a,b]$? Прије свега, таква случајна промјенљива није дискретна, јер није природно претпоставити да постоји тачка x_0, $x_0 \in [a,b]$, тако да је $\mathrm{P}(X = x_0) > 0$. Осим тога, за сваки подинтервал $[\alpha,\beta]$, $a \le \alpha < \beta \le b$, $\mathrm{P}\{\alpha \le X \le \beta\}$ не би требало да зависи од положаја $[\alpha,\beta]$, већ да је пропорционално дужини $\beta - \alpha$. Дакле, на сваком подинтервалу фиксиране дужине, функција густине мора "изгледати" исто. То значи да X има густину

$$f(x) = \begin{cases} k, & a \le x \le b \\ 0 & x < 0 \vee x > b \end{cases}$$

Константу k, $k > 0$, одређујемо из услова да је $\int_a^b f(x)\,dx = 1$, односно $k(b-a) = 1$, што значи

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 & x < 0 \vee x > b \end{cases}$$

За случајну промјенљиву X са горњом густином кажемо да има **униформну** или **равномјерну расподјелу** на интервалу $[a,b]$ и то кратко пишемо $X : \mathcal{U}(a,b)$. Под ријечима "случајно се бира тачка x из интервала $[a,b]$" подразумијеваћемо по дефиницији да $X : \mathcal{U}(a,b)$.

Примјер 4.18 *У случајно вријеме стижемо на аутобуску станицу гдје аутобуси пролазе у интервалима од 15 минута. Нека је X вријеме чекања аутобуса. Тада можемо сматрати да је $X : \mathcal{U}(0,15)$.* ■

Нормална расподјела

Нормална или Гаусова расподјела заузима централно мјесто у теорији вјероватноће и математичкој статистици.

Дефиниција 4.9 *Случајна промјенљива X има **нормалну расподјелу** ако је њена густина*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

гдје је m реалан број, а σ позитивни број.

Краћи запис да X има нормалну расподјелу, краће пишемо $X : \mathcal{N}(m;\sigma^2)$. Расподјелу $X : \mathcal{N}(0;1)$ зваћемо **нормална нормирана расподјела**. Дакле, густина за случајну промјенљиву $X^* : \mathcal{N}(0;1)$ је

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Доказујемо да, за функцију густине нормиране нормалне случајне промјенљиве, вриједи

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

То није могуће урадити директно, али зато користимо један врло ефектан трик из математичке анализе. Наиме,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2}\,dr\,d\theta = 1.$$

Примјер 4.19 *На располагању су двије врсте акумулатора. Вијек трајања акумулатора прве врсте је случајна промјењива* $X_1 : \mathcal{N}(50; 10^2)$ *а дуге врсте* $X_2 : \mathcal{N}(60; 5^2)$. X_1 *и* X_2 *су изражене у часовима. Претпоставимо да нам треба акумулатор који ће радити бар* 55 *часова. У том случају, логично је одабрати ону врсту акумулатора код којег ће вјероватноћа тог догађаја бити већа. Из графика једне и друге расподјеле је очигледно да*

$$\mathrm{P}(X_2 \geq 55) > \mathrm{P}(X_1 \geq 55),$$

а исти закључак можемо извести из чињеница

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \int_{m}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}, \quad и \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1,$$

гдје је $f(x)$ *густина нормалне случајне промјењиве, а* m *одговарајући параметар њене расподјеле.* ■

4.6. Математичко очекивање и дисперзија

Расподјела вјероватноћа случајне промјенљиве X нам обезбјеђује значајну количину информација о тој случајној промјенљивој. Међутим, било би пожељно да те информације имамо сумиран у јединственом нумеричком изразу, можда у једном броју. То је углавном постигнуто кроз концепт **математичког очекивања** од X. То је заправо тежинска аритметичка средина вриједности случајне пормјенљиве X.

Као илустрацију, можемо узети рулет. Замислимо да су на кругу рулета дефинисани бројеви $m_1, m_2, \ldots, m_n$ који могу да представљају новчане износе, са вјероватноћама $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Основно питање који сваки играч поставља је шта би био просјечан добитак у једном "кругу"? Ако се рулет завртио k пута, нека се k_i пута добио број m_i, $i = 1 \ldots, n$. Онда је укупан број новца који је добијен

$$m_1k_1 + m_2k_2 + \cdots + m_nk_n.$$

Онда је просјечан износ једнак

$$\frac{m_1k_1 + m_2k_2 + \cdots + m_nk_n}{k} = m_1\frac{k_1}{k} + m_2\frac{k_2}{k} + \ldots m_n\frac{k_n}{k}.$$

За велико k, односно ако играмо већи број игара, онда је јасно да ће вриједности

$$\frac{k_i}{k} \approx p_i, \quad \text{за велико } k$$

па се просјечни добитак може апроксимирати величином

$$M = m_1p_1 + m_2p_2 + \dots m_np_n.$$

Примјер 4.20 *У опиту који се састоји у бацању фер коцке за игру нека случајна промјењива* X *региструје број који падне. Да бисмо фиксирали идеју, нека је* X *добитак у игри бацања коцке. Тада просјечна добит по једном бацању у серији од* $N = 10$ *бацања са резултатима* $(5, 1, 1, 6, 6, 4, 2, 4, 5, 6)$ *је*

$$\frac{1}{10}(5 + 1 + 1 + 6 + 6 + 4 + 2 + 5 + 6) = 4.$$

Међутим, у другој серији $(3, 4, 2, 3, 6, 1, 5, 2, 4, 4)$ *од* 10 *бацања просјечна добит је* 3.4. *Не можемо предвидјети просјечну добит у серији од 10 бацања коју намјеравамо да направимо, јер је добит у сваком бацању случајна промјењива* X. *Међутим, ако је број бацања* N *велики, онда се у свакој серији добит 1,2,3,4,5 или 6 појављује у приближно* $\frac{N}{6}$ *бацања. Зато је просјечна добит*

$$\frac{1}{N}(1 \cdot \frac{N}{6} + 2 \cdot \frac{N}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{N}{6}) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = 3.5$$

Просјечна добит је утолико "ближа" броју 3.5 колико је N *већа. Међутим, број 3.5 је једна нумеричка карактеристика расподјеле*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

То је просјечна (по једном опиту) вриједност за X *у великој серији понављања опита. На примјер, у серији од 100 бацања коцке "очекујемо" укупну добит* $100 \cdot 3.5 = 350$.

■

Ово што је речено у примјеру можемо поновити за било коју дискретну случајну промјењиву са коначним скупом реализација и расподјелом

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}$$

Тада је средња вриједност (у смислу аритметичке средине) за X у низу поновљених опита "блиска" броју

$$x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \dots + x_np(x_n).$$

Та нумеричка вриједност расподјеле је предмет следеће дефиниције.

Дефиниција 4.10 *Математичко очекивање случајне промјењиве* X *са расподјелом*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}$$

је број

$$x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \ldots + x_np(x_n).$$

Обично ћемо кратко говорити "очекивање за X" и обиљежавати га редовно са $E(X)$. (E-прво слово у енглеској ријечи expectation-очекивање). Неки пут ћемо рећи и да је $E(X)$ средња вриједност за X. Примјетимо да очекивање постоји за сваку дискретну случајну промјенљиву са коначно много вриједности.

За дискретну случајну промјенљиву са пребројиво много реализација очекивање ћемо дефинисати проширијући претходну дефиницију.

Дефиниција 4.11 *Математичко очекивање случајне промјенљиве X са расподјелом*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots \end{pmatrix}$$

је збир (ако постоји) бесконачног реда

$$E(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \ldots$$

Значење и интерпретација броја $E(X)$ остаје иста као и случају када је скуп реализације коначан.

Примјер 4.21 *Нека је p ($q = 1 - p$) вјероватноћа успјеха у једном опиту и нека се опит понавља до првог успјеха. Нека k понављања кошта 2^k рубљи и нека је Z промјенљива која представља коштање цијелог експеримента. Одредимо $E(Z)$. Прије свега одредимо расподјелу за Z.*

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 & \ldots & 2^k & \ldots \\ p & pq & \ldots & pq^{k-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање рачунамо

$$E(Z) = 2^1p + 2^2pq + \ldots + 2^kpq^{k-1} + \ldots = 2p(1 + 2q + \ldots + (2q)^{k-1} + \ldots)$$

Ако је $q < \frac{1}{2}$ ред у загради конвергира, а ако је $q \geq \frac{1}{2}$ ред дивергира. Према томе, ако је $p > \frac{1}{2}$ онда постоји $E(Z)$ и једнако је

$$E(Z) = \frac{2p}{2p - 1},$$

а ако је $p \leq \frac{1}{2}$, $E(Z)$ не постоји. У овом последњем случају то значи да у великом броју понављања сложеног опита, просјечно коштање по једном сложеном опиту не показује тенденцију груписања око фиксираног броја.

■

Примјер 4.22 *Испитајмо математичко очекивање за случајну промјенљиву X која има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподјелу. Дакле, X је расподијељена*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & pq & \dots & pq^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

Како би рачунали математичко очекивање, потребно нам је да нађемо суму

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = \left(1 + a + \ldots + a^{n-1}\right) + a\left(1 + 2a + \ldots + (n-1)a^{n-2}\right).$$

Слиједи

$$\beta_n = \frac{1-a^n}{1-a} + a(\beta_n - na^{n-1}),$$

одакле је

$$\beta_n = \frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a}.$$

Према томе, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{(1-a)^2}, \text{ за } |a| < 1.$$

Онда је математичко очекивање промјенљиве X једнако

$$E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot pq + \ldots = p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

■

Примјер 4.23 *Рачунамо математичко очекивање за случајну промјенљиву $X : \mathcal{P}(\lambda)$ са Пуасоновом расподјелом.*

$$\begin{aligned} E(X) = 0 \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + 1 \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + \ldots &= \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{1!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{2!} + \ldots \\ e^{-\lambda}\lambda(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots) &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Дакле, очекивање за случајну промјенљиву са Пуасоновом расподјелом једнако је параметру λ који фигурише у тој расподјели ■

Дефиниција 4.12 *Математичко очекивање случајне промјенљиве X са непрекидном расподјелом и функцијом густине $f_X(x)$ је*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx,$$

под условом да је вриједност датог интеграла коначна, што је обезбијеђено ако је

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx < \infty.$$

Особине математичког очекивања

Иако ћемо особине математичког очекивања навести у општем случају, доказаћемо их само за дискретне случајне промјенљиве.

Примјер 4.24 *Претпоставимо да случајна промјенљива X узима вриједности $-1, 1$ и 2, са једнаком вјероватноћом, и размотримо случајну промјенљиву $Y = X^2$. Јасно, Y узима вриједности 1 и 4 са вјероватноћом $2/3$ и $1/3$ респективно. Зато, $E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$.* ■

У претходном примјеру, математичко очекивање случајне промјенљиве Y смо рачунали тако што смо прво рачунали расподјелу вјероватноћа случајне промјенљиве Y. У општем случају, било би веома корисно ако би математичко очекивање $E(Y)$ рачунали само користећи вјероватносну расподјелу случајне промјенљиве X. Следећа лема открива начин да то урадимо.

Лема 4.2 *Нека је X дискретна случајна промјенљива и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тада је математичко очекивање случајне промјенљиве $Y = g(X)$*

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_x g(x)\, \mathrm{P}(X = x),$$

кад год је претходна сума добро дефинисана.

Доказ. Пошто подразумијевамо да је претходна сума добро дефинисана, могуће је мијењати редослед сумације.

$$\begin{aligned} E(g(X)) = \sum_y y\, \mathrm{P}(g(X) = y) &= \sum_y y \sum_{x : g(x) = y} \mathrm{P}(X = x) \\ \sum_y \sum_{x : g(x) = y} y\, \mathrm{P}(X = x) &= \sum_y \sum_{x : g(x) = y} g(x)\, \mathrm{P}(X = x) \\ &= \sum_x g(x)\, \mathrm{P}(X = x) \end{aligned}$$

■

Лема 4.3 *Нека је (X, Y) дводимензионална случајна промјенљива са расподјелом $p(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и нека је $Z = g(X, Y)$ гдје је $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

функција два аргумента. Тада је

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i,y_j)p(x_i,y_j).$$

Доказ. Z је дискретна случајна промјенљива са скупом вриједности $\{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$, гдје су бројеви $z_k = g(x_i, y_j)$. Тада је

$$\mathrm{P}\{Z=z_k\}=\sum_{\substack{(i,j):\\ g(x_i,y_j)=z_k}} p(x_i,y_j)$$

гдје се сабира по свим паровима (i, j) за које $g(x_i, y_j) = z_k$. Дакле,

$$E(Z)=\sum_{k=1}^{l} z_k\,\mathrm{P}\{Z=z_k\} \;=\; \sum_{k=1}^{l} z_k\left(\sum_{\substack{(i,j):\\ g(x_i,y_j)=z_k}} p(x_i,y_j)\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{(i,j):\\ g(x_i,y_j)=z_k}} g(x_i,y_j)p(x_i,y_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i,y_j)p(x_i,y_j).$$

Последњи прелаз значи да смо промјенили редослед сабирања nm сабирака $g(x_i, y_j)p(x_i, y_j)$. ■

За двије случајне промјенљиве X и Y, дефинисане на истом простору исхода Ω, уводимо неке алгебарске операције, као $X + Y$ и XY на природан начин

$$X+Y(\omega)=X(\omega)+Y(\omega),\ \text{и}\ XY(\omega)=X(\omega)Y(\omega),$$

за свако $\omega \in \Omega$. Математичко очекивање се понаша веома природно за суме случајних промјенљивих, што показује следећа теорема.

Теорема 4.2 *Нека су X и Y дискретне случајне промјенљиве. Уколико оба математичка очекивања, $E(X)$ и $E(Y)$, нису једнаки бесконачности различитог знака, онда вриједи*

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Доказ. Нека су $x_1, x_2, \ldots$ вриједности које узима случајна промјенљива X, а $p_1, p_2, \ldots$ одговарајуће вјероватноће са којима се реализују наведене вриједности. Слично, за промјенљиву Y, нека су $y_1, y_2, \ldots$ вриједности, а $q_1, q_2, \ldots$ одговарајуће вјероватноће. Најприје, дефинишимо

$$\mathrm{P}(X=x_n, Y=y_k)=p_{nk}.$$

Јасно је да случајна промјенљива $X+Y$ узима управо вриједности x_n+y_k са вјероватноћом p_{nk}. На другој страни, имамо из формуле тоталне вјероватноће

$$\mathrm{P}(X=x_n)=p_n=\sum_{j=1}^{\infty}p_{nj},\quad \mathrm{P}(Y=y_k)=q_k=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ik}.$$

Сада је

$$\begin{aligned}E(X+Y)=\sum_{i=1,j=1}^{\infty}(x_i+y_j)p_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i+y_j)p_{ij}\\ =\sum_{i=1}^{\infty}x_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}y_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\right) &= \\ =\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i+\sum_{j=1}^{\infty}y_jq_j &= E(X)+E(Y).\end{aligned}$$

Примјетимо да смо доказ ове теореме могли извести и директним коришћењем Леме 4.3. ■

У следећој теореми су садржане неке основне особине математичког очекивања. Иако су у доказу теореме случајне промјенљиве дискретног типа, као што смо већ нагласили, наведене особине важе у општем случају.

Теорема 4.3 *Нека су X и Y дискретне случајне промјенљиве. Математичко очекивање има следеће особине:*

1. *Ако је X константа, тј. $X(\omega)=a$ за свако $\omega\in\Omega$, тада $E(X)=a$.*
2. *Ако је k константа, тада $E(kX)=kE(X)$.*
3. *$E(X+Y)=EX+EY$.*
4. *Ако је за свако $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq 0$, тада $E(X)\geq 0$.*
5. *Ако је за свако $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq Y(\omega)$, тада $E(X)\geq E(Y)$.*
6. *Ако су X и Y независне случајне промјенљиве, тада $E(XY)=E(X)E(Y)$.*

Доказ.

1. Ова особина је очигледна, јер је $\mathrm{P}\{X=a\}=1$, те је $E(X)=a\cdot 1$.
2. Доказ ове особине слиједи директно из Леме 4.2.
3. Ова особина је већ доказана у Теореми 4.2.
4. За доказ ове особине, примјетимо $X(\omega)\geq 0$, за свако $\omega\in\Omega$, што значи да су све вриједности x_k које узима X ненегативне. Уз чињеницу да је $p(x_k)\geq 0$, слиједи да је и

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}p(x_k)\geq 0.$$

5. Да бисмо доказали ову особину, примјетимо да за свако $\omega \in \Omega$ вриједи $X(\omega) - Y(\omega) \geq 0$, а на основу особине 2. и 3. слиједи да је

$$E(X - Y) = E(X + (-Y)) = E(X) + E(-Y) = E(X) - E(Y),$$

   те $E(X) \geq E(Y)$.

6. Подсјетимо се да независност случајних промјенљивих X и Y значи да је

$$\mathrm{P}\{X = x_k, Y = y_t\} = \mathrm{P}\{X = x_k\}\,\mathrm{P}\{Y = y_t\}.$$

   Ако искористимо Лему 4.3, дефинишући $g(x, y) = xy$, онда слиједи

$$\begin{aligned} E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, p(x_i, y_j) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, p(x_i, y_j) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j\, \mathrm{P}\{X = x_i\}\,\mathrm{P}\{Y = y_j\} \quad &= \\ = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathrm{P}\{X = x_i\}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\, \mathrm{P}\{Y = y_j\}\right) \quad &= \quad E(X)E(Y). \end{aligned}$$

■

Примјер 4.25 *Примјеном индукције се лако се уопштава Теорема 4.2 на већи скуп сабирака*

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots E(X_n).$$

Нека је I_k случајна промјенљива које представља ***индикатор*** *одређеног догађаја A, гдје је $p = p(A)$, у $k-$ом поновљеном опиту, $k = 1, 2, \ldots, n$. То значи да I_k Случајну промјенљиву $S_n : \mathcal{B}(n; p)$ можемо написати као збир*

$$S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

Слиједи да

$$E(S_n) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n).$$

Пошто за свако $E(I_k) = p$, слиједи да је $E(S_n) = np$. ■

Примјетићемо да особина 6. Теореме 4.3 не важи у обрнутом смјеру: ако је $E(XY) = E(X)E(Y)$ не слиједи у општем случају да су X и Y независне, као што показује следећи примјер.

Примјер 4.26 *Нека је*

$$X : \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ p & 1 - 2p & p \end{pmatrix}, \quad (a \neq 0, 0 < p \leq \frac{1}{2}).$$

Нека је $Y = X^2$. *Тада је* $E(X) = 0$, $E(Y) = (-a)^2 p + 0^2(1-2p) + a^2 p = 2a^2 p$. *Даље је*

$$E(XY) = E(X^3) = (-a)^3 p + 0^3(1-2p) + a^3 p = 0,$$

те је $E(XY) = E(X)E(Y)$, *али* X *и* Y *су зависне. Наиме,*

$$\mathrm{P}\{X = a, Y = a^2\} = \mathrm{P}\{X = a\} = p,$$

што је другачије од $\mathrm{P}\{X = a\}\,\mathrm{P}\{Y = a^2\} = 2p^2$. ■

Примјер 4.27 *Daily Airlines flies every day from Amsterdam to London. The price for a ticket on this popular route is* $k = 75$. *The aircraft has a capacity of 150 passengers. Demand for tickets is greater than capacity, and tickets are sold out well in advance of flight departures. The airline company sells 160 tickets for each flight to protect itself against no-show passengers. The probability of a passenger being a no-show is q = 0.1. No-show passengers are refunded half the price of their tickets. Passengers that do show up and are not able to board the flight due to the overbooking are refunded the full amount of their tickets plus an extra 425 compensation. What is the probability that more passengers will turn up for a flight than the aircraft has the seating capacity for? What are the expected value and standard deviation of the daily return for the airline?*

Нека је T *случајна величина која мјери приход по једном путнику. Онда*

$$T : \begin{pmatrix} k & -425 & \frac{1}{2}k \\ a & b & q \end{pmatrix}$$

гдје је a *вјероватноћа да је путник дошао и има мјеста, а* b *да је дошао и нема мјеста, док је* q *вјероватноћа да се није појавио. Јасно је да је* $p = a + b$. *Примјетимо да је у другој колони* -425 *зато што путник који је дао цијену од 75 долара, враћен му ј етај износ а потом и додато нових 425. Дакле, компанија је на губитку 425 долара.*

Вјероватноћа да је путник дошао и да има мјеста у авиону је

$$a = \left(\sum_{k=0}^{149} \binom{159}{k} p^k q^{159-k} \right) p.$$

Вјероватноћа да је путник ј дошао и да нема мјеста у авиону је

$$b = \left(\sum_{k=150}^{159} \binom{159}{k} p^k q^{159-k} \right) p.$$

Рачунамо

$$E(T) = ka - 425b + \frac{1}{2}kq$$

На основу датих параметара, имамо $E(T) = 44.162$, *па је просјечна добит по лету једнака 160 пута* $E(T)$, *уважавајући независност случајних промјенљивих, што је приближно 7066 долара.* ■

Дисперзија

Математичко очекивање $m = E(X)$ је основна карактеристика случајне промјенљиве X тако што представља у одређеном смислу средњу вриједност за X. Међутим, "растурање" вриједности из скупа реализација за X око броја m може да буде различито код разних расподјела, а да очекивање буде исто.

Примјер 4.28 *Случајне промјенљиве*

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

имају исто математичко очекивање $E(X) = E(Y) = 0$, док су "растурања" могућих вриједности око 0 сасвим различита.

■

Претходни примјер нам указује на потребу мјерења варирања, односно дисперзије вриједности случајне промјенљиве око вриједности математичког очекивања. Пошто случајна промјенљива $X - m$ представља одступање X од очекивања, онда $|X - m|$ може бити добар кандидат случајне промјенљиве која представља величину тог одступања. Пошто апсолутна вриједност увећава сложеност анализе, онда се опредељујемо за случајну промјенљиву $(X - m)^2$. С обзиром да нас интересује *просјек растурања* случајне промјенљиве око фиксираног броја m, користимо опет концепт математичког очекивања. Стога уводимо $E(X - m)^2$ што представља број просјечног одступања вриједности случајне промјенљиве X око свог математичког очекивања m.
Ту мјеру девијације зовемо ***варијанса*** или ***дисперзија***.

Дефиниција 4.13 *Дисперзија или средње квадратно оступање случајне промјенљиве X је $D(X) = E[(X - m)^2]$, гдје је $m = E(X)$.*

Дисперзију ћемо означавати и са $\sigma^2(X)$. Примјетимо да на основу особине 4. Теореме 4.3, слиједи да је $D(X) \geq 0$. За одређене потребе. често користимо појам **стандардне девијације** или **стандардног одступања** који дефинишемо са $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Примјер 4.29 *Подсјетимо се Бернулијеве расподјеле*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Тада је

$$\begin{aligned} E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) &= p \\ D(X) = E((X - E(X))^2) = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot p &= p(1-p) \end{aligned}$$

■

Лема 4.4 *За случајну промјенљиву X, вриједи*

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Доказ. Нека је $E(X) = \mu$. Тада имамо

$$\begin{aligned} D(X) = E((X - E(X))^2) &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

■

Примјер 4.30 (Дисперзија Пуасонове расподјеле) *Нека је $X : \mathcal{P}(\lambda)$. Као што смо већ утврдили, математичко очекивање је $E(X) = \lambda$. Одредимо $E(X^2)$ помоћу малог "трика" такошто ћемо одредити најприје $E[X(X-1)]$. На основу Леме 4.3 имамо*

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2. \end{aligned}$$

Са друге стране $E[(X-1)X] = E(X^2) - E(X)$ те $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, тако да је

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

■

Следећа теореме синтетише најважније особине дисперзије.

Теорема 4.4 *Дисперзија има следеће особине:*

1. $D(X) \geq 0$.
2. $D(X) = 0$ *ако и само ако је* $X =$***const***.
3. $D(X + a) = D(X)$.
4. $D(kX) = k^2 D(X)$.
5. *Ако су X и Y независне случајне промјенљиве тада* $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Доказ. Нека је $E(X) = m$.

1. Пошто је $(X(\omega) - m)^2 \geq 0$, то је на основу Теореме 4.3
$$E[(X(\omega) - m)^2] \geq 0.$$

2. Ако је $X(\omega) = c$ и $X(\omega) - c = 0$ за свако $\omega \in \Omega$, те је
$$D(X) = E[(X - c)^2] = E(0^2) = 0.$$
Обрнуто, ако је
$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 p(x_k) = 0,$$
лако можемо сматрати да је $p(x_k) > 0$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n$, следи да $(x_k - m)^2 = 0$ односно $x_k = m$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n$, одакле је $X(\omega) = m$ за свако $\omega \in \Omega$.

3.
$$\begin{aligned} D(X + a) &= E[X + a - E(X + a)]^2 \\ &= E[X + a - E(X) - a]^2 = E[X - E(X)]^2. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} D(kX) &= E(kX)^2 - [E(kX)]^2 \\ &= k^2 E(X^2) - k^2(E(X))^2 = k^2[E(X^2) - (E(X))^2]. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E(X + Y)^2 - (E(X + Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X^2) - 2E(X)E(Y) - E(Y^2) \\ &= D(X) + D(Y), \end{aligned}$$
јер ако су X и Y независне, тада $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.

■

Примјер 4.31 *Наћи дисперзију за случајну промјенљиву која има биномну расподјелу.*

Случајну промјенљиву $S_n : \mathcal{B}(n; p)$ можемо написати као збир
$$S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$
Пошто су суманди независне промјенљиве, онда слиједи да
$$D(S_n) = D(I_1) + D(I_2) + \cdots + D(I_n).$$
Како је $D(I_k) = pq$, слиједи $D(S_n) = npq$.

■

Примјер 4.32 *Наћи математичко очекивање и дисперзију за промјенљиву X која има геометријску расподјелу.*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & pq & \dots & pq^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

Најприје рачунамо суму реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1}.$$

Парцијална сума

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} = (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) + a(1 + 2a + \dots + (n-1)a^{n-2}),$$

па се добија

$$s_n = \frac{1-a^n}{1-a} + a(s_n - na^{n-1}).$$

Из последње једнакости добијамо да је

$$s_n = \frac{1-a^n}{(1-a)^2} - \frac{na^{n-1}}{1-a},$$

одакле је

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{(1-a)^2}, \ \text{за } |a| < 1.$$

Математичко очекивање промјенљиве X је

$$E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot pq + \dots = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Слично, као и у примјеру за Пуасонову расподјелу, најприје рачунамо

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} pq^{k-1} = pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right)' = pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Слиједи

$$D(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

∎

5 Граничне теореме теорије вјероватноће

5.1. Увод

У реалним ситуацијама, ако желимо да донесемо одређени закључак о, рецимо, некој физичкој величини, онда то никад не радимо на основу једног мјерења. Поуздани закључци се доносе на основу резулатата одређивања великог броја вриједности исте случајне промјенљиве. Ако свако ново мјерење схватимо као нову случајну промјенљиву, имаћемо низ случајних промјенљивих. Напримјер, код појма математичког очеивања смо имали сличан приступ. Појмови из вјероватноће и њихове примјене у статистици долазе до изражаја управо у дугачким серијама мјерења, односно при посмтрању дугачких низова случајних промјенљивих.

Примјер 5.1 *Претпоставимо да испитујемо прецизност једног мјерног инструмента. Прецизност се испитује тако што се њиме мјери позната контролна величина, па се одређује грешка у мјерењу као разлика добијене и контролне вриједности. Ако је грешка случајна промјенљива то грешке за више мјерења представљају низ случајних промјенљивих. Претпоставимо да смо у 5 мјерења добили грешке (у датим јеидиницама) 0.52 1.24 -1.35 0.31 -0.82. Као карактеристику тих мјерења можемо узети средњу грешку*

$$(0.52 + 1.24 - 1.35 + 0.31 - 0.82)/5 = -0.02$$

■

Ако је средња вриједност грешке за нас мала, инструмент може послужити. У претходном примјеру је, међутим, битно и следеће: Колико се можемо поуздати у добијену средњу грешку, јер у других пет мјерења можемо добити сасвим различит резултат? За нас је управо важно да будемо сигурни у **величину** средње грешке, без обзира да ли је она мала или велика, јер на основу тога прихватамо инструмент као добар, или га одбацујемо као лош.

5.2. Закони великих бројева

Генерални сценарио у овом поглављу је следећи. Нека су дате независне случајне промјенљиве $X_1, X_2, \ldots$ исте расподјеле вјероватноћа, са математичким очекивањем μ и дисперзијом σ^2. Нека је

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

сума првих n од њих. Граничне теореме се суштински баве питањем особина случајне промјенљиве S_n кад n тежи бесконачности. Због независности, слиједи

$$D(S_n) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) = n\sigma^2.$$

Дакле, долази до ширења скупа вриједности промјенљиве S_n како n тежи бесконачности и зато не постоји гранична вриједност низа случајних промјенљивих S_n. Ситуација је другачија ако посматрамо **узорачку средину**

$$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}.$$

Једноставним рачуном добијамо

$$E(M_n) = \mu, \ \ D(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Дакле, дисперзија тежи нули како n тежи бесконачности, чиме се увећава концентрација вриједности случајне промјенљиве S_n око њеног математичког очекивања μ. Овај феномен је објашњен одређеним законима великих бројева, који у принципу указују да узорачка средина (случајна промјенљива) конвергира ка правој средини μ на прецизно одређен начин. Ови закони обезбјеђују математичку чврстину интуитивној интерпретацији да је математичко очекивање $E(X) = \mu$ средина великог броја вриједности које се на неки случајан начин извлаче из дистрибуције промјенљиве X.

Такође, размотрићемо и величину која се налази између S_n и M_n. Најприје ћемо одузети $n\mu$ од S_n, да би добили случајну промјенљиву са нултим математичким очекивањем $S_n - n\mu$, а затим подијелити све са $\sqrt{D(S_n)} = \sigma\sqrt{n}$,

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}.$$

Лако је утврдити да је

$$E(Z_n) = 0, \quad D(Z_n) = 1.$$

У општем случају, за дату случајну промјенљиву X, промјенљива

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

се назива: **стандардизовани облик** случајне промјенљиве X. Нека је $E(X) = \mu$, а $D(X) = \sigma^2$. Јасно је да за стандардизовани облик случајне промјенљиве вриједи $E(X^*) = 0$ и $D(X^*) = 1$. Заиста,

$$E(X^*) = E(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = 0.$$

Слично,

$$D(X^*) = D(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}D(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}D(X) = 1.$$

Неке корисне неједнакости

Овдје ћемо извести неке корисне неједнакости. Њихова употреба је да, користећи математичко очекивање и дисперзију извучемо одређене закључке о вјероватноћи појединих догађаја. Дакле, оне су посебно важне у ситуацијама кад су математичко очекивање и дисперзија лако израчунљиве, али је сама дистрибуција промјенљиве X или непозната или тешко израчунљива.

Лема 5.1 *Нека је X дискретна случајна промјенљива која узима само ненегативне вриједности. Тада, за свако $a > 0$ вриједи*

$$\mathrm{P}\{X \geq a\} \leq \frac{1}{a} E(X)$$

Доказ.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\,\mathrm{P}\{X = x\} \\ &\geq \sum_{x: x \geq a} x\,\mathrm{P}\{X = x\} \geq a \sum_{x: x \geq a} x\,\mathrm{P}\{X = x\} \\ &= a\,\mathrm{P}\{X \geq a\} \end{aligned}$$

■

Ако резултат претходне теореме примјенимо на $|X|^k$, добијамо

Лема 5.2 ***(Марковљева неједнакост)*** *Нека је X дискретна случајна промјенљива и $a > 0$. Тада је*

$$\mathrm{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{1}{a^k} E(|X|^k)$$

Доказ. На основу Леме 5.1 слиједи

$$\mathrm{P}\{|X|^k \geq a^k\} \leq \frac{1}{a^k} E(|X|^k),$$

одакле је

$$\mathrm{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{1}{a^k} E(|X|^k)$$

■

Примјеном Марковљеве неједнакости за случај $k = 2$ и $|X - E(X)|$ добијамо

Лема 5.3 ***(Чебишљева неједнакост)***

$$\mathrm{P}\{|X - E(X)| \geq a\} \leq \frac{1}{a^2} D(X)$$

Доказана неједнакост има велики теоријски значај јер показује да се вјероватноћа одступања од очекиване вриједности може мјерити дисперзијом, због чега смо $D(X)$ и уводили.

Наводимо и чувену Коши-Шварцову неједнакост.

Теорема 5.1 *За случајне промјењљиве X и Y за које је $E(XY)$ дефинисано, вриједи*

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Доказ. Уколико је $E(X^2) = \infty$ или $E(Y^2) = \infty$, онда је неједнакост јасна. Уколико су обје вриједности коначне, онда тврдимо да је $E(XY)$ добро дефинисана. Да би ово утврдили, примјетимо да

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

за свако реално x и y. Такође, ако је $E(X^2)$ или $E(Y^2)$ нула, тада X или Y узимају вријендост нула са вјероватноћом 1, чиме је неједанкост очигледна. Зато, можемо подразумијевати да је десна страна позитивна Нека је a реалан број. Ако дефинишимо $Z = aX - Y$ онда

$$0 \leq E(Z^2) = a^2E(X^2) - 2aE(XY) + E(Y)^2$$

Десну страну можемо посматрати као квадратну једначину са промјенљивом a. Пошто је овај израз очигледно ненегеативан, онда слиједи да је одговарајућа дискриминанта позитивна. Дакле, имамо

$$(2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0,$$

што је и требало доказати. ■

Закон великих бројева

Као што смо већ напоменули, генерални сценарио се састоји од низа независних случајних промјенљивих $X_1, X_2, \ldots$ које имају исту расподјелу вјероватноћа, са математичким очекивањем μ и дисперзијом σ^2. Подсјетимо се дефиниција случајних промјенљивих:

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \text{ и } M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Следеће теореме ће бити исказане у горе дефинисаним терминима.

Теорема 5.2 ***(Чебишљев закон великих бројева)*** *Нека су случајне промјенљиве $X_1, X_2, \ldots$ независне и са истим математичким очекивањем $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = \mu$. Нека постоје $D(X_1), D(X_2), \ldots$ и нека су униформно ограничене, тј. постоји константа $c > 0$ тако да $D(X_i) \leq c$, за $i = 1, 2, \ldots$. Тада за низ $X_1, X_2, \ldots$ важи закон великих бројева, тј. за свако $\epsilon > 0$*

$$\mathrm{P}\{|M_n - \mu| \geq \epsilon\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказ. Нека је $Y = M_n$. Тада је

$$E(Y) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)) = \mu.$$

Слично,

$$\begin{aligned} D(Y) = D(M_n) &= D[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n)] \\ &= \frac{1}{n^2}D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}(D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)) \\ &\leq \frac{1}{n^2}(c + c + \cdots + c) = \frac{1}{n^2}nc = \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

Овдје смо користили особину да је дисперзија за збир независних случајних промјењљивих једнака збиру њихових дисперзија. Зато је

$$\mathrm{P}\{|M_n - \mu| \geq \epsilon\} = \mathrm{P}\{|Y - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^2}D(Y) \leq \frac{c}{\epsilon^2 n} \to 0, \; n \to \infty,$$

гдје смо очигледно користили Чебишљеву неједнакост. ■

Овај закон се у литератури често назива и **Слаби закон великих бројева**. Он заправо указује да се вриједности случајне пормјењљиве M_n концентришу унутар интервала $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$, за свако ϵ, како n тежи бесконачности. Заправо, тврди се да је за довољно велико n вјероватноћа да ће M_n упасти у интервал $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$ близу јединице. Наравно, ако је ϵ мање, онда је последично потребно и веће n за очекивање да M_n буде унутар задатог интервала са великом вјероватноћом.

Примјер 5.2 *Ако играте рулет у казину, вјероватноћа да изгубите је увијек мало већа него да добијете. Претпоставимо, ради поједностављења, да је вјероватноћа да добијете* 49/100 *а да изгубите* 51/100. *Ову ситуацију можемо описати кроз модел независних случајних промјењљивих* $X_1, X_2, \ldots$ *са расподјелом*

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = \frac{49}{100} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(X_i = -1) = \frac{51}{100}.$$

Слиједи да је $E(X_i) = -1/50$. *Капитал који остварујете након* n *игара је* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Према закону великих бројева слиједи*

$$\mathrm{P}(|M_n + \frac{1}{50}| > \epsilon) \to 0,$$

кад $n \to \infty$. *Како је* $M_n = S_n/n$, *онда, за довољно велико* n, *вриједи*

$$S_n \approx -\frac{n}{50},$$

што значи да је губитак скоро извјестан. ■

Примјер 5.3 *Нека је вјероватноћа неког догађаја* A *у датом експерименту једнака* $p = P(A)$. *Нека је* M_n *фреквенција реализације догађаја* A *у* n *извођења експеримента. Ову величину, поред назива* ***узорачка средина****, често називамо и* ***емпиријска фреквенција*** *догађаја* A. *Дакле,*

$$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

гдје је X_i, $1 \leq i \leq n$, *случајна величина која је једнака* 1 *кад год се релаизује* A, *а у супротном је једнака* 0. *Из тога слиједи да је* $E(X_i) = p$ *за свако* $1 \leq i \leq n$. *Чебишљев закон великих бројева нам говори да је за велико* n, *емпиријска фреквенција* M_n *веома близу* $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = p$. *Ово је у одређеном смислу и теоријска потврда приступа којом се стварна вјероватноћа одређеног догађаја апроксимира фреквенцијом његовог појављивања у већем броју независних извођења тог експеримента.*

■

Централна гранична теорема

Закон великих бројева нам говори да је аритметичка средина случајних промјењљивих у одређеном смислу блиска математичком очекивању било које од тих промјењљивих. Али, колико је близу? Све што знамо на основу закона великих бројева је да за довољно велико n вриједи

$$M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu,$$

кад $n \to \infty$, гдје је $E(X_i) = \mu$, $i \in \mathbb{N}$. Дакле, на основу закона великих бројева није лако процијенити са којом вјероватноћом ће S_n, односно M_n бити у неком фиксираном интервалу (a, b).

Централна гранична теорема нам у принципу даје експлицитан начин да процијенимо вјероватноћу да се S_n нађе у неком одређеном интервалу (a, b). Подсјећајући се појма стандардизоване случајне промјењљиве, дефинишемо

$$M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{D(M_n)}} = \frac{M_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Теорема 5.3 ***(Централна гранична теорема)***
Нека су случајне промјењљиве $X_1, X_2, \ldots$ *независне и са истом расподјелом, са очекивањем* μ *и дисперзијом* σ^2. *Нека је* $F(x)$ *функција расподјеле за случајне промјењљиве са расподјелом* $\mathcal{N}(0;1)$. *Тада за сваки пар бројева* $a < b$ *важи*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{a \leq \frac{M_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq b\} = F(b) - F(a)$$

Значај ове теореме, чији доказ не дајемо, је огроман за примјене, нарочито у статистици.

Примјер 5.4 *Нека се врши $n = 225$ независних мјерења, код којих је $\sigma = 5$ јединица. Колика је вјероватноћа да грешка при апроксимацији мјерене величине са M_n, није већа од 0.6 јединица?*

Мјерена величина је $\mu = E(X)$ а одступање је $|M_{225} - \mu|$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{|M_{225} - \mu| \leq 0.6\} &= \mathrm{P}\{|\frac{M_{225} - \mu}{5}\sqrt{225}| \leq \frac{1}{5} 0.06\sqrt{225}\} \\
&= \mathrm{P}\{|M_{225} \leq 1.8|\} = 2F(1.8) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.96407 - 1 = 0.92814.
\end{aligned}
$$

Овај резултат значи да је вјероватноћа да $M_{225} - 0.6 \leq \mu \leq M_{225} + 0.6$ једнака приближно 0.93. ■

Претходној теореми се може дати други облик, погодан за разне примјене, не само за грешке мјерења.

Теорема 5.4 *Нека су случајне промјенљиве $X_1, X_2, \ldots$ независне и са истом расподјелом, са очекивањем μ и дисперзијом σ^2. Нека је $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Тада за сваки пар бројева $a < b$ важи*

$$
\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\{a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\} = F(b) - F(a).
$$

Јасно је да су претходне двије теореме еквивалентне, што директно слиједи из

$$
\frac{M_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.
$$

Теорема 5.4 у ствари каже да је расподјела збира S_n приближно нормална $\mathcal{N}(n\mu; n\sigma^2)$, са параметрима $E(S_n) = n\mu$ и $D(S_n) = n\sigma^2$.

Апроксимација биномне расподјеле

Код одређивања вјероватноћа у биномној шеми, за n велико и p мало, смо се користили Пуасоновом расподјелом. Централна гранична теорема нам даје нове могућности. Ако случајну промјенљиву S_n са расподјелом $\mathcal{B}(n; p)$ размотримо као збир $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, то на основу Теореме 5.4 слиједи

$$
\mathrm{P}\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\} \approx F(b) - F(a)
$$

или

$$
\mathrm{P}\{x_1 \leq S_n \leq x_2\} \approx F\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),
$$

уколико је n довољно велико.

Примјер 5.5 *Вјероватноћа да играч убаци лопту у кош је 0.7. Колика је вјероватноћа да ће у 100 бацања имати*

(а) бар 65 погодака,

(б) између 65 и 75 погодака,

(в) највише 77 погодака?

Дакле, имамо да је

$$n = 100,\ p = 0.7,\ q = 0.3,\ np = 70,\ npq = 21.$$

(а) Тражи се

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{65 \le S_{100} \le 100\} &\approx F\left(\frac{100-70}{\sqrt{21}}\right) - F\left(\frac{65-70}{\sqrt{21}}\right) \\ &= F(6.55) - F(-1.09) = 1 - (1 - F(1.09)) \\ &= F(1.09) = 0.86214. \end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{65 \le S_{100} \le 75\} &\approx F\left(\frac{75-70}{\sqrt{21}}\right) - F\left(\frac{65-70}{\sqrt{21}}\right) \\ &= 2F(1.09) - 1 = 0.72428. \end{aligned}$$

(в)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{0 \le S_{100} \le 77\} &\approx F\left(\frac{77-70}{\sqrt{21}}\right) - F\left(\frac{-70}{\sqrt{21}}\right) \\ &= F(1.53) - F(-15.3) = 0.93699. \end{aligned}$$

■

Међутим, ова апроксимација има одређена ограничења која се успјешно превазилазе малом измјеном која је садржана у **Моавр-Лапласовој апроксимацији** биномне расподјеле.

H Ако је S_n биномна случајна промјенљива са параметрима n и p, за велико n и k, ℓ ненегативни цијели бројеви, онда

$$\mathrm{P}\{k \le S_n \le \ell\} \approx F\left(\frac{\ell + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

гдје је $q = 1 - p$.

Примјер 5.6 *Нека је* S_n *биномна случајна промјенљива са параметрима* $n = 36$ *и* $p = 0.5$. *Рачунамо*

$$\mathrm{P}\{S_n \leq 21\} = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^k = 0.8785.$$

Користећи стандардну апроксимацију помоћу ЦГТ, добијамо

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{0 \leq S_n \leq 21\} &\approx F\left(\frac{21 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{0 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx F\left(\frac{21 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx F\left(\frac{21 - 18}{3}\right) = F(1) = 0.8413.\end{aligned}$$

Међутим, ако користимо Моавр-Лапласову апроксимацију, онда имамо

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{0 \leq S_n \leq 21\} &\approx F\left(\frac{21.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &\approx F\left(\frac{21.5 - 18}{3}\right) = F(1.17) = 0.879,\end{aligned}$$

што је много ближе стварном резултату. Моавр-Лапласова формула нам дозвољава и апроксимацију тачне вриједности. На примјер

$$\mathrm{P}\{S_n = 19\} \approx F\left(\frac{19.5 - 18}{3}\right) - F\left(\frac{18.5 - 18}{3}\right) = 0.6915 - 0.5675 = 0.124.$$

Ово је веома близу тачној вриједности

$$\binom{36}{19} (0.5)^{19} = 0.1251.$$

■

Значај нормалне расподјеле у примјенама

Као што смо видјели, нормална расподјела се на природан начин јавља у многим проблемима, посебно онима везаним за збирове случајних промјенљивих. У Теореми 5.4 се захтјева да случајне промјенљиве буду једнако расподјељени. Међутим, показује се да иста теорема важи и без претпоставке о истовјетној расподјељености, под условом да су, на одређен начин, појединачни сабирци мали у односу на читав збир.

У примјенама имамо много таквих ситуација и отуда се нормална расподјела тако често јавља и има велики значај.
У практично свим проблемима повезаним са случајним грешкама при мјерењу, нормална расподјела се узима као полазна.

Даћемо неколико примјера примјене нормалне расподјеле, засноване на централној граничној теореми (ЦГТ).

Примјер 5.7 *Колико треба извести мјерења па да апсолутна грешка, при процјени средње вриједности μ са M_n није већа од 0.2, са вјероватноћом 0.9. Зна се да је стандардно одступање $\sigma = 10$.*

Потребно је одредити n из релације $\mathrm{P}\{|M_n - \mu| \leq 0.2\} = 0.9$. *Биће*

$$\begin{aligned} 0.90 &= \mathrm{P}\{|M_n - \mu| \leq 0.2\} \\ &= \mathrm{P}\left\{|\frac{M_n - \mu}{\sigma}|\sqrt{n} \leq \frac{0.2}{10}\sqrt{n}\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{|M_n^*| \leq \frac{\sqrt{n}}{50}\right\} = \mathrm{P}\left\{-\frac{\sqrt{n}}{50} \leq M_n^* \leq \frac{\sqrt{n}}{50}\right\} \\ &\approx F\left(\frac{\sqrt{n}}{50}\right) - F\left(\frac{\sqrt{n}}{50}\right) = 2F\left(\frac{\sqrt{n}}{50}\right) - 1, \end{aligned}$$

■

Примјер 5.8 *Нека је тражња бензина по аутомобилу недјељно 50 литара, са стандардним одступањем од 8 литара. Ако у Подгорици има 200 000 аутомобила, да ли је довољно 10 100 000 литара бензина за недјељу дана да не буде несташице.*

Нека је S укупна потрошња бензина за недјељу дана. Одредимо $\mathrm{P}\{S \leq 10\,100\,000\}$. *Како је* $E(S) = 200000 \cdot 50 = 10^7$, $D(S) = 200000 \cdot 8^2 \approx (3578)^2$, *то је*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{S \leq 10100000\} &= \mathrm{P}\left\{\frac{S - E(S)}{\sqrt{D(s)}} \leq \frac{10100000 - 10^7}{3578}\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{S^* \leq \frac{100000}{3578}\right\} \approx F(28) = 1, \end{aligned}$$

што значи да несташице скоро сигурно неће бити. Очигледно да је резерва довољно велика. ■

6 Математичка статистика

Многе науке као важан метод истраживања користе опите, прикупљање података и закључивање на основу њих. Научне хипотезе се постављају на основу резултата опита или се опити планирају ради испитивања постављање хипотезе.
Математичка статистика представља општу теоријску основу за планирање и тумачење резултата опита на случајним исходима. Теорија вјероватноће је математичка база статистике, као што ћемо то видјети.

Популација. Основни појам који се јавља у статистици је скуп неких елемената чија се заједничка својства изучавају. На примјер, изучавани скуп чине ђаци једне школе, или становници неке државе. Изучавани скуп могу чинити ријеке једног слива, или мора и океани на Земљи.

Тај изучавани скуп се назива **популација** или **генерални скуп**. Популација може бити и скуп свих могућих резултата мјерења неке физичке величине, нпр. темпереатуре или притиска, као и скуп свих замисливих токова неког експеримента или природне појаве. Популацију чини скуп свих бацања једног динара безброј пута, а такође и скуп свих могућих утакмица предстојећег фудбалског првенства.

Како видимо, популације могу бити коначне и бесконачне. Коначне популације су свакако једноставније за посматрање, али ако су бројне, често се разматрају као да су бесконачне.

Обиљежје. При изучавање популације првенствено се задржавамо на неком обиљежју њених елемената. У популацији ђака једне школе, једно обиљежје је разред који ђак похађа, друго је успјех који постиже. Обиљежје може бити нумеричко или не. Међутим, чак и да оригинално није, могуће га је на одређеним кодирањем представити као нумеричко обиљежје.

Дефиниција 6.1 ***(Расподјела обиљежја)*** *Ако је разматрана популација коначна, расподјела обиљежја се лако дефинише. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_k$ различите вриједности обиљежја. Нека је N_i број елемената популације за које је $X(e_i) = x_i$, $1 \leq i \leq k$. Расподјелу обиљежја X чине вриједности $x_1, x_2, \ldots, x_k$ са одговарајућим бројевима $N_1, N_2, \ldots, N_k$ или одговарајућим процентним или релативним износима*

X	x_1	x_2	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x_k	$\sum$
расп.	N_1/N	N_2/N	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	N_k/N	$N/N = 1$

На основу претходног видимо да обиљежје увијек можемо посматрати као случајну промјенљиву која је дефинисана на скупу којег чине елементи дате популације. Популација се, сходно томе, може представити као скуп елементарних исхода неког експеримента.

Узорак. Изучавање цијеле популације је често скуп и технички захтјеван поступак. Понекад је, као у случају бесконачних популација то немогуће. Начин да стекнемо неку представу о расподјели посматраног обиљежја на цијелој популацији је да издвојимо један њен коначан дио кој називамо узорак. На том узорку (који је одабран на неки начин) одређујемо расподјелу обиљежја а затим те резултате преносимо (уопштавамо) на цијелу популацију.

Узорак се може добити случајним избором елемената са враћањем и случајним избором елемената без враћања, мада разним областима примјене математичке статистике узорци могу бити добијени неким специфичним (за ту област) начином. Без обзира на начин добијања узорка важно је да он буде репрезентативан, односно да добро представља популацију, у смислу да се расподјеле на дијелу популације и цијелој популацији што мање разликују. У том случају кажемо да дио, односно тај узорак добро "репрезентује" цјелину.

Случајни избор узорка често се врши помоћу таблице случајних бројева или примјеном неких компјутерских програма.

Примјер 6.1 *Популацију чине гледаоци једне кошаркашке утакмице. Као обиљежје се посматра њихова висина. У једном реду се одабира првих пет људи и њихове висине су 169, 182, 177, 201, 165. У истом реду се бира првих пет људи чија висина прелази 190. Њихове висине су 201, 205, 199, 192, 195. Да ли први начин избора даје добру слику о висини свих гледалаца, није јансо. Да други начин избора не даје добру слику о висини свих гледалаца, то је очигледно. Он евентуално, даје слику о гледаоцима чија висина прелази 190. Према томе, други начин избора не даје дио репрезентативан за цијелу популацију.* ■

Нека је популација коначна, са N чланова. Различитих могућих узорака (у односу на елементе популације) обима n, $(n \leq N)$ има очигледно $\binom{N}{n}$. Сматраћемо да метод избора даје репрезентативан узорак ако је вјероватноћа било ког одређеног узорка иста, односно износи $1/\binom{N}{n}$. Овакав метод очигледно одговара моделу извлачења n пута на случајан начин, без враћања.

Прости случајни узорак. За разлику од претходног приступа у ком смо увијек бирали различите елементе популације, претпоставимо да након сваког бирања вратимо назад изабрани елемент. Претпоставимо да извлачење вршимо n пута. На тај начин, свако извлачење дефинише једну случајну промјенљиву $X_i \quad i = 1..n$, при чему свака од њих има исту расподјелу. Сваки узорак који добијемо на овај начин има исту вјероватноћу појављивања $1/N^n$, што одговара идеји репрезентативности.

Дефиниција 6.2 *Нека се на одређеној популацији $\mathcal{E}$ посматра обиљежје X. Прости случајни узорак за обиљежје X је низ незаисних, једнако расподијељених случајних промјенљивих $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ од којих свака има исту расподјелу као обиљежје X.*

6.1. Статистике. Средина и дисперзија узорка

Одређивање расподјеле неког обиљежја је важан али не и једини задатак статистичког испитивања. На примјер, ако посматрамо обиљежје X: лични доходак радника у некој фабрици, онда нам је од интереса сазнање о просјечном личном дохотку или распону личних доходака.

Дефиниција 6.3 *Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узорак добијен статистичким експериментом. Реална функција узорка $S = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ назива се* ***статистика****.*

Као што видимо из дефиниције, статистика је функција од случајних промјенљивих, па је и она сама случајна промјенљива. Ако је $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реализовани узорак, то је $s = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реализација статистике S.

Примјер 6.2 *Дат је узорак $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ обима 5. Нека су S_1, S_2 статистике које редом представљају најмањи и највећи елемент датог узорка, односно $S_1 = min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, $S_2 = max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$. Ако је $(3, 7, 2, 4, 7)$ реализовани узорак, онда је за S_1 реализација $s_1 = 2$, а за S_2 је $s_2 = 7$.* ■

Нека је дата коначна популација $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и обиљежје $X(e)$, $e \in \mathcal{E}$. Вриједности обиљежја су $\{X(e_1), X(e_2), \ldots, X(e_n)\}$. Просјечна или средња вриједност тог обиљежја је број

$$A = \frac{1}{n}[X(e_1) + X(e_2) + \cdots X(e_n)],$$

а просјечно или средње квадратно одступање (од A) је број

$$A = \frac{1}{n}[(X(e_1) - A)^2 + (X(e_2) - A)^2 + \cdots (X(e_n) - A)^2].$$

Ако се обиљежје X посматра као случајна промјенљива, очигледно је $A = EX$, $B = DX$.

Дефиниција 6.4 *Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случајни узорак. Статистика*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

је средина узорка, а

$$\overline{S_n^2} = \frac{1}{n}[(X_1 - \bar{X}_n)^2 + (X_2 - \bar{X}_n)^2 + \cdots + (X_n - \bar{X}_n)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

је дисперзија узорка.

6.2. Статистике и њихове расподјеле

Разматрамо нека својства статистика $\bar{X}_n$ и $\overline{S_n^2}$ које као случајне промјенљиве имају своје расподјеле.

Лема 6.1 *Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ прост случајни узорак за обиљежје X. Тада*

(а) $E(\bar{X}_n) = EX,\ D(\bar{X}_n) = \dfrac{DX}{n}$

(б) $E(\overline{S_n^2}) = \dfrac{n-1}{n}DX$

Доказ. Како су $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ независне случајне промјенљиве, то (а) слиједи директно. За доказ тачке (б) користимо формулу $EY^2 = DY + (EY)^2$ која важи за сваку случајну промјенљиву:

$$E(\overline{S_n^2}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - E(\bar{X}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - [D(\bar{X}_n) + (E\bar{X}_n)^2] = \frac{1}{n}nE(X^2) - \left[\frac{DX}{n} + (EX)^2\right] =$$

$$= E(X^2) - (EX)^2 - \frac{DX}{n} = \frac{n-1}{n}DX,$$

при чему смо користили да је $EX_1^2 = EX_2^2 = \cdots = EX_n^2 = EX^2$. ■

Навешћемо без доказа два важна својства нормалне расподјеле:

1. Ако случајна промјенљива X има нормалну расподјелу, то и случајна промјенљива $Y = aX + b,\ b \neq 0$ има нормалну расподјелу са параметрима $EY = aEX + b$ и $DY = a^2DX$.

2. Ако су случајне промјенљиве $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне и са нормалним расподјелама, то и збир $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ има нормалну расподјелу са параметрима $EZ = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n, DZ = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$

Примјер 6.3 *Стандардна тежина X једног производа варира од комада до комада и има расподјелу $\mathcal{N}(10; (0.5)^2)$, а стандардна тежина Y другог производа који се прави независно од првог, има расподјелу $\mathcal{N}(8; (0.3)^2)$.*

(а) *Коју расподјелу има тежина два производа првог типа?*

(б) *Коју расподјелу има трострука тежина производа другог типа?*

(в) *Коју расподјелу има укупна тежина по једног производа првог и другог типа?*

Можемо сматрати да су тежине различитих комада независне.

(а) *Ако су* X_1 *и* X_2 *тежине два комада првог типа, то нас интересује* $Z = X_1 + X_2$*. Како је* $EZ = EX_1 + EX_2 = 10 + 10 = 20$*,* $DZ = DX_1 + DX_2 = (0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.5$*, то је* $Z : \mathcal{N}(20; 0.5)$*.*

(б) *Интересује нас расподјела за* $T = 3Y$*. Како је* $ET = 3EY = 3 \cdot 8 = 24$*,* $DT = D(3Y) = 3^2 DY = 9 \cdot (0.3)^2 = 0.81 = 0.9^2$*, то* $T\mathcal{N}(24; (0.9)^2)$*.*

(в) *Ако је* $V = X + Y$*, то* $EV = EX + EY = 10 + 8 = 18$*,* $DV = DX + DY = (0.5)^2 + (0.3)^2 = 0.34$*, па* $V : \mathcal{N}(18; 0.34)$*.*

■

Ако је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ прост случајни узорак обиљежја X са расподјелом $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, на основу 1. и 2. слиједи да $\bar{X}_n$ има такође нормалну расподјелу са параметрима $E\bar{X}_n = m$, $D\bar{X}_n = \dfrac{\sigma^2}{n}$. Одавде слиједи да

$$\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

има расподјелу $\mathcal{N}(0; 1)$.

6.3. Оцјене параметара расподјела

Да би одређена расподјела била потпуно одређена, није довољно само знати ком типу припада (нормална, биномна, униформна...), већ морамо имати и конкретне вриједности параметара који фигурирају у тој расподјели. Често те вриједности није могуће егзактно утврдити, али постоје начини да их процјенимо, односно смјестимо у одређени интервал. Управо су различите технике оцјене параметара је тема ове секције.

Примјер 6.4 *Како је у расподјели* $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ *параметар* m *очекивање, разумно је за његову оцјену узети статистику* $\overline{X}_n$*-средину узорка.* ■

Најприје, постављамо питање - шта је оцјена параметра? Означимо са Θ непознати параметар распидјеле обиљежја X, који се оцјењује. **Оцјена** параметра Θ на основу узорка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узетог за X, је одређена статистика $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Реализована вриједност $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ те оцјене се узима за вриједност непознатог параметра Θ.
Непристрасност оцјене Како је оцјена непознатог параметра случајна промјенљива, критеријум којим мјеримо вриједност оцјене мора бити изражен у терминима њене расподјеле. Један од основних критеријума је *непристрасност оцјене.*

Дефиниција 6.5 *Нека је* Θ *непознати параметар расподјеле обиљежја* X*. Нека је* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *случајни узорак за* X*.*

Оцјена $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *параметра* Θ *је* ***непристрасна*** *(или центрирана)* *ако је* $EY = \Theta$.

Непристрасност оцјене практично значи да нема "систематских" грешака при оцјењивању, тј. да оцјена Y у просјеку даје тачну вриједност параметра Θ. Прецизније речено, ако се посматра k независних узорака и k одговарајућих вриједности наше оцјене $y_1, y_2, \dots, y_k$, то ће бити

$$\overline{y_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i \approx \theta.$$

Примјер 6.5 *На основу леме 6.1 знамо да је* $E(\overline{X_n}) = E(X)$. *То значи да је* $\overline{X_n}$ *непристрасна оцјена математичког очекивања* $E(X)$. *На основу исте леме,* $E(\overline{S_n^2}) = \dfrac{n-1}{n}DX$, *што значи да је* $\overline{S_n^2}$ *пристрасна оцјена за дисперзију* $D(X)$. *Ако је* n *велико, пристрасност је очигледно мала.*

Међутим, ако уведемо за $D(X)$ *нову оцјену*

$$\widehat{S_n^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{n}{n-1}\overline{S_n^2},$$

онда је

$$E(\widehat{S_n^2}) = E(\frac{n}{n-1}\overline{S_n^2}) = \frac{n}{n-1}E(\overline{S_n^2}) = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}D(X) = D(X),$$

па је $\widehat{S_n^2}$ *непристрасна оцјена за* $D(X)$. *Оцјена* $\widehat{S_n^2}$ *се обично користи код малих узорака.* ■

Оцјене параметара неких расподјела

Биномна расподјела $\mathcal{B}(n;p)$. За оцјену непознате вјероватноће $p = p(A)$ се узима $F = S_n/n$ релативна учестаност догађаја A у n опита. Као што знамо $E(S_n/n) = p$.

Примјер 6.6 *Може нас интересовати вјероватноћа два поготка узастопно* p^2. *За оцјену* p^2 *изгледа разумно узети статистику* F^2. *Провјеримо непристрасност те оцјене:*

$$E(F^2) = D(F) + E(F)^2 = D(\frac{S_n}{n}) + p^2 = \frac{p(1-p)}{n} + p^2.$$

Оцјена је пристрасна, али како је $\dfrac{p(1-p)}{n} \le \dfrac{1}{4n}$ *пристрасност је мала за* n *велико. Може се показати да ке за* p^2 *непристрасна оцјена*

$$\widehat{F^2} = F^2 - \frac{F(1-F)}{n-1}.$$

■

Пуасонова расподјела $\mathcal{P}(\lambda)$. Пошто је код ове расподјеле $E(X) = \lambda$, онда се као оцјена за λ може узети статистика $\overline{X_n}$. Код ове расподјеле је $E(X) = \lambda$ тако да се као оцјена за λ може узети статитсика $\overline{X_n}$.

Примјер 6.7 *Може се сматрати да број кварова (у току године) за један тип машина има расподјелу* $\mathcal{P}(\lambda)$*. За 72 машине су добијени подаци.*

број кварова (X)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4 и више*	$\sum$
број машина	*35*	*27*	*6*	*3*	*1*	*72*

Оцјена параметра λ *је*

$$\bar{x}_{72} = \frac{0 \cdot 35 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{72} = 0.7222.$$

То значи да за расподјелу обиљежја X *узимамо*

$$P\{X = k\} = e^{-0.72} \frac{(0.7222^k)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

■

Униформна расподјела $\mathcal{U}(a, b)$. Подсјетимо се да униформна расподјела одговара моделу избора једне тачке са интервала (a, b), на случајан начин. Размотримо n случајно одабраних тачака (узорак $X_1, X_2, \ldots, X_n$), очекујемо да ће тачке бити равномјерно распоређене по (a, b) - што се у просјеку и догађа. То значи да је растојање између тачака $\dfrac{b-a}{n+1}$, или да је

$$X_{min} - a = \frac{b-a}{n+1} = b - X_{max}.$$

Одатле као разумне оцјене за a и b добијамо

$$A = X_{min} - \frac{X_{max} - X_{min}}{n-1}, \quad B = X_{max} + \frac{X_{max} - X_{min}}{n-1}.$$

За $b - a$ имамо оцјену

$$B - A = \frac{n+1}{n-1} X_{max} - X_{min}.$$

Може се показати, користећи тачну расподјелу статистика X_{min} и X_{max}, да су оцјене A и B непристрасне за параметре a и b. Ако је у питању расподјела $\mathcal{U}(0, \theta)$ што је чешћи случај, претходним резоновањем се за θ добија оцјена $C = \dfrac{n+1}{n} X_{max}$.

Примјер 6.8 *У узорку обима 6 из расподјеле* $\mathcal{U}(a, b)$ *смо добили: 5.1, 5.8, 6.3, 5.0, 4.7, 5.6. Оцјена доње границе* a *је*

$$4.7 - \frac{6.3 - 4.7}{5} = 4.38 \approx 4.4,$$

а горње границе b је

$$6.3 + \frac{6.3 - 4.7}{5} = 6.62 \approx 6.6.$$

■

Нормална расподјела $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$. Како је $E(X) = m,\ D(X) = \sigma^2$, непристрасна оцјена за m је $\overline{X}_n$ а за σ^2 је $\widehat{S_n^2}$. За веће n можемо користити $\overline{S_n^2}$.

Упоређивање оцјена према ефикасности

Примјетили смо да се за један параметар може наћи више непристрасних оцјена. Настаје проблем коју од њих изабрати као најбољу. Пожељно својство непристрасне оцјене је да има малу дисперзију, тј. да се реализоване вриједности оцјене што више групишу око очекиване вриједности - непознатог параметра. Са друге стране, природно је захтјевати да је та дисперзија утолико мања, уколико је обим узорка већи (зашто бисмо иначе узимали велики узорак). Непристрасну оцјену чија дисперзија тежи нули, када обим узорка расте $n \to \infty$ називаћемо **постојаном**.

Примјер 6.9 *Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ прост случајан узорак. Оцјењујемо $E(X)$. Оцјена $V_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ је очигледно непристрасна за $E(X)$, а*

$$D(V_n) = D[\frac{1}{2}(X_1 + X_n)] = \frac{1}{4}(D(X_1) + D(X_n)) = \frac{D(X)}{2},$$

што значи да не опада када $n \to \infty$. Ако за $E(X)$ узмемо оцјену $\overline{X}_n$, имамо да је

$$D(\overline{X}_n) = \frac{D(X)}{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

што значи да је $\overline{X}_n$ постојана оцјена за $E(X)$. Према томе, оцјена $\overline{X}_n$ је утолико "боља" уколико је узорак већи. То је практично садржај закона великих бројева. ■

Примјер 6.10 *Ако је $E(X) = m_0$ познато, непристрасна оцјена за $D(X)$ је статистика*

$$D_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2.$$

Покажимо да је D_n постојана оцјена. Биће

$$D(D_n) = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[(X_i - m_0)^2] =$$

$$= \frac{D[(X - m_0)^2]}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Примјетимо да су случајне промјењљиве $(X_i - m_0)^2$ *независне.* ■

Ако посматрамо двије непристрасне оцјене, Y_n и Z_n, када је обим узорка фиксиран. Очигледно, разумно је одабрати оцјену са мањом дисперзијом.

Дефиниција 6.6 *Непристрасна оцјена* Y_n *непознатог параметра* θ *је ефикаснија од непристрасне оцјене* Z_n*, ако је* $D(Y_n) < D(Z_n)$*.*

Примјер 6.11 *Оцјене*

$$U = \frac{1}{3}X_1 - \frac{2}{3}X_2 + \frac{4}{3}X_3 \text{ и } V = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

су непристрасне за $E(X)$*. Пошто је*

$$D(U) = \frac{1}{3}^2 D(X_1) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 D(X_2) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 D(X_3) = \frac{21}{9}D(X).$$

Како је $D(V) = \frac{1}{3}D(X)$*, очигледно је* V *ефикаснија од* U*.* ■

6.4. Тестирање хипотеза и интервали повјерења

Да бисмо приближили идеју поћићемо од примјера.

Примјер 6.12 *Метеоролошким осматрањима је закључено да се за расподјелу висине* X *годишњег воденог талога као модел може узети* $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$*. Оправданост тог модела слиједи из централне граничне теореме. За једну област мјерењима од 1750 до 1800 године оцјењено је да* $X : \mathcal{N}(30;8^2)$*. Иста област се посматра у периоду 1928-1978. Интересује нас да ли је расподјела талога остала* $\mathcal{N}(30;8^2)$ *или је расподјела у овом периоду* $X : \mathcal{N}(m;8^2)$ *за неко* $m > 30$*, тј. да ли је дошло до повећања просјечног воденог талога.*

У складу са тим постављамо основну хипотезу (хипотеза H_0*) да је* $m = 30$ *и њој алтернативну хипотезу (хипотеза* H_1*) да је* $m > 30$*. На основу статистичког експеримента одлучићемо се коју од ове двије хипотезе да прихватимо као тачну. Резултат експеримента нека је пет случајно изабраних година из периода 1928-1970. За те године су регистровани талози 38, 33, 29, 36, 32. Запажамо да просјечан талог (средина узорка)* $\overline{x}_5 = 33.6 > 30$*. Како је* $\overline{x}_5$ *оцјена за* m*, на први поглед бисмо сматрали да је* $m > 30$*, односно да је* H_1 *тачна. Међутим, до одступања* $\overline{x}_5 - 30 = 3.6$ *може доћи и када је* H_0 *тачна (тј.* $m = 30$*), јер је* $\overline{x}_5$ *реализација случајне промјењљиве* $\overline{X}_5$*.*

Према томе, морамо се договорити до које вриједности за $\overline{X}_5$ *сматрамо да су од-*

ступања, односно да је H_0 тачна. Преко те вриједности сматрамо да је одступање значајно, зато што је фактички $m > 30$, па је H_1 тачна. ■

Размотримо ово у општем случају. За посматрано обиљежје X уочимо један скуп расподјела које сматрамо (по природи конкретног проблема) допустивим. Почетна или нулта хипотеза (у ознаци H_0) је претпоставка да обиљежје X има једну одређену расподјелу из скупа допустивих расподјела. У претходном примјеру, то је H_0 $(m = 30)$, док је у истом примјеру дата и алтернативна хипотеза, H_1 $(m > 30)$.

Статистички тест је правило на основу резултата статистичког експеримента (тј. узорка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ одлучујемо да прихватимо као тачну H_0 или H_1.

Тест се описује једном статистиком $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ или такозваном тест-статистиком. Дефинише се C-критична област теста за H_0. Одлучујемо по следећем правилу: ако реализована вриједност $t = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ статистике T "падне" у C онда се H_0 одбацује, а H_1 прихвата, а ако $t \notin C$, H_0 се прихвата а H_1 одбацује.

При избору T и C у конкретним ситуацијама руководимо се идејом да је разумно одбацити H_0 у корист H_1 кад год је $t \in C$.

Примјер 6.13 *Настављамо претходни примјер. Овдје је скуп допустивих расподјела $X : \mathcal{N}(30; 8^2)$, $m \geq 30$, $H_0(m = 30)$, $H_1(m > 30)$. Тест статистика је $\overline{x}_5 = \dfrac{1}{5}(x_1 + x_2 + \ldots + x_5)$. Природно је H_0 одбацити у корист H_1 ако је x_5 велико, тј ако је $x_5 \geq k$, гдје је број k, $k > 30$, одабран на одређен начин. Према томе $C = [k, \infty)$. Ставимо на примјер $k = 33$. Нека је H_0 фактички тачна, тј. стварна расподјела је $\mathcal{N}(30; 8^2)$. Одредимо тада вјероватноћу да се H_0 одбаци, односно да се оствари догађај $\{\overline{X}_5 \geq 33\}$. Како $\overline{X}_5$ има расподјелу $\mathcal{N}(30; \frac{8^2}{5})$, онда је*

$$P_{H_0}\{\overline{X}_5 \geq 33\} = P_{H_0}\{\frac{\overline{X}_5 - 30}{8/\sqrt{5}} \geq \frac{33 - 30}{8/\sqrt{5}}\} = P_{H_0}\{\overline{X}_5^* \geq 0.84\} \approx 0.2,$$

гдје је $\overline{X}_5^*$ функција расподјеле типа $\mathcal{N}(0; 1)$. ■

Приликом тестирања су могуће двије врсте грешака. **Грешка прве врсте** се састоји у одбацивању H_0 ако је она заправо тачна, а **грешка друге врсте** се састоји у томе да се прихвати H_0 ако она није тачна. Обично означавамо са α грешку прве врсте, а са β грешку друге врсте,

$$\alpha = P_{H_0}\{T \in C\}, \ \beta = P_{H_1}\{T \notin C\}.$$

У статистичким тестовима се обично унапријед фиксира α, а онда сходно томе утврђује област C, која задовољава услов

$$\alpha = P_{H_0}\{T \in C\}.$$

Примјер 6.14 *Нека је у претходном примјеру* $\alpha = 0.05$. *Одредимо* k *тако да* $P_{H_0}\left\{\overline{X}_5 \geq k\right\} = 0.05$. *Тада је*

$$0.05 = P_{H_0}\left\{\overline{X}_5^* \geq \frac{k-30}{8/\sqrt{5}}\right\} = 1 - F\left(\frac{k-30}{8}\sqrt{5}\right),$$

одакле је $k = 35.89$. *У овом случају не можемо одредити* β *јер* $\beta = P_{H_1}\left\{\overline{X}_5 < 35.89\right\}$ *зависи од параметра* m *који није фиксиран, већ само знамо да је* $m > 30$. ■