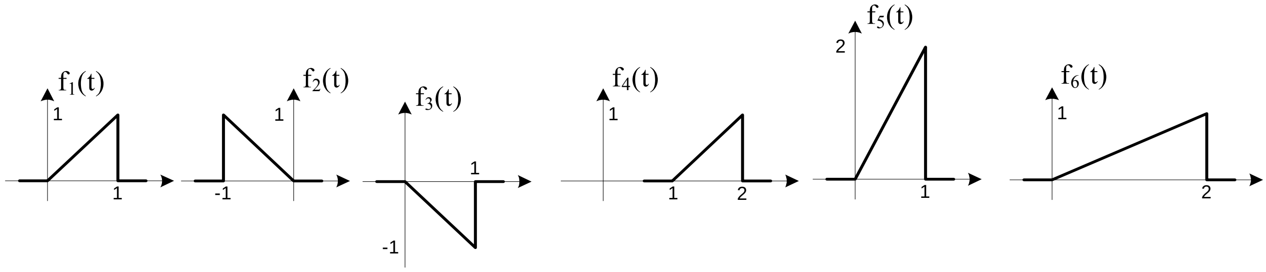
I čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. a) Nađite energiju signala prikazanih na slici:



b) Prokomentarišite efekat promjene znaka, promjene smjera vremenske ose, vremenskog pomjeranja, udvostručavanja amplitude i skaliranja vremenske ose na energiju signala.

c) Ako je energija signala $g(t)$ označena sa E_g pronaći energiju signala $g_1(t)=Kg(t)$ i $g_2(t)=g(\alpha t)$, gdje su K i α konstante i $\alpha\neq 0$.

Rješenje:

a) Energija signala $f(t)$ definiše se kao:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |\,f(t)\,|^2\,dt$$

pri čemu za slučaj realnih signala iz gornjeg izraza možemo izostaviti apsolutnu vrijednost.

Signal $f_1(t)$ se može zapisati u obliku:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \text{ ili } t>1 \\ t & 0\le t\le 1 \end{cases}.$$

Sada je:
$$E_{f_1} = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Analogno ovome dobijamo:

$$E_{f_2} = \int_{-1}^{0} (-t)^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}, \qquad E_{f_3} = \int_0^1 (-t)^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$E_{f_4} = \int_1^2 (t-1)^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right|_1^2 = \frac{1}{3}, \qquad E_{f_5} = \int_0^1 (2t)^2\,dt = 4\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{3},$$

$$E_{f_6} = \int_0^2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 dt = \left.\frac{t^3}{12}\right|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

b) Energija signala se ne mijenja okretanjem vremenske ose, promjenom znaka signala, i pomjeranjem signala po vremensko osi. Množenje signala sa 2 je izazvalo povećanje energije 4 puta, dok je skaliranje vremenske ose faktorom ½ izazvalo dva puta veću energiju signala.

c) Dato je:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(t)\,|^2\,dt$$

imamo da je:

$$E_{g_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\,Kg(t)\,|^2\,dt = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\,g(t)\,|^2\,dt = K^2 E_g$$

$$E_{g_2}=\int_{-\infty}^{\infty}|g(\alpha t)|^2\,dt=\left\{\begin{array}{l}u=\alpha t\\ du=\alpha dt\\ t\to-\infty\Rightarrow u\to-\mathrm{sgn}(\alpha)\infty\\ t\to\infty\Rightarrow u\to\mathrm{sgn}(\alpha)\infty\end{array}\right\}=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty\,\mathrm{sgn}(\alpha)}^{\infty\,\mathrm{sgn}(\alpha)}|g(u)|^2\,du=\frac{\mathrm{sgn}(\alpha)}{\alpha}E_g=\frac{1}{|\alpha|}E_g$$

Zadatak 2. Nađite snagu signala:

a) $f_1(t)=10\cos(10t+\pi/3)$

b) $f_2(t)=10\cos(3t)+16\sin(5t)$

c) $f_3(t)=(10+2\sin(3t))\cos(10t)$

d) $f_4(t)=10\cos(5t)\cos(10t)$

e) $f_5(t)=10\sin(5t)\cos(10t)$

f) $f_6(t)=e^{j\alpha t}\cos(\omega_0 t)$

Rješenje:

Snaga signala se definiše na sledeći način:

$$P_f=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt$$

Sada je:

$$P_{f_1}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}10^2\cos^2(10t+\frac{\pi}{3})dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}100\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(20t+\frac{2\pi}{3})\right)dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{50T}{T}+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}50\cos(20t+\frac{2\pi}{3})dt=50$$

$$P_{f_2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(100\cos^2(3t)+320\cos(3t)\sin(5t)+256\sin^2(5t)\right)dt=50+128=178$$

$$P_{f_3}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(10+2\sin 3t)^2\cos^2 10t\,dt=$$

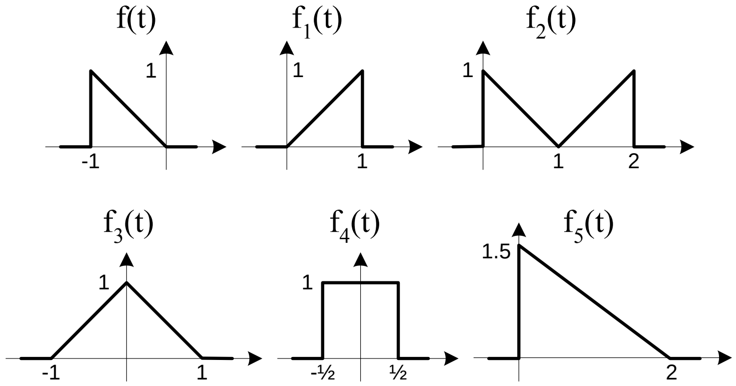
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(100+40\sin 3t+4(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6t))(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 20t)dt=50+1=51$$

$$P_{f_4}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}10^2\cos^2 5t\cos^2 10t\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}100(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 10t)(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 20t)dt=25$$

$$P_{f_5}=25$$

$$P_{f_6}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{j\alpha t}\cos\omega_0 t|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2\omega_0 t\,dt=\frac{1}{2}$$

Zadatak 3. Na slici je dat signal *f*(*t*). Koristeći se operacijama vremenskog pomjeranja, vremenskog skaliranja, amplitudnog skaliranja, i promjene smjera vremenske ose izrazite signale $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ i $f_5(t)$ u obliku zbira transformisanih verzija signala *f*(*t*).



Rješenje:

$$f_1(t)=f(-t)\,,\qquad f_2(t)=f(t-1)+f(1-t)\,,$$
$$f_3(t)=f(-t-1)+f(t-1)\,,\qquad f_4(t)=f(t-\tfrac{1}{2})+f(-t-\tfrac{1}{2})$$
$$f_5(t)=1.5f\left(\frac{t-2}{2}\right).$$

Zadatak 4. Skicirajte signale:

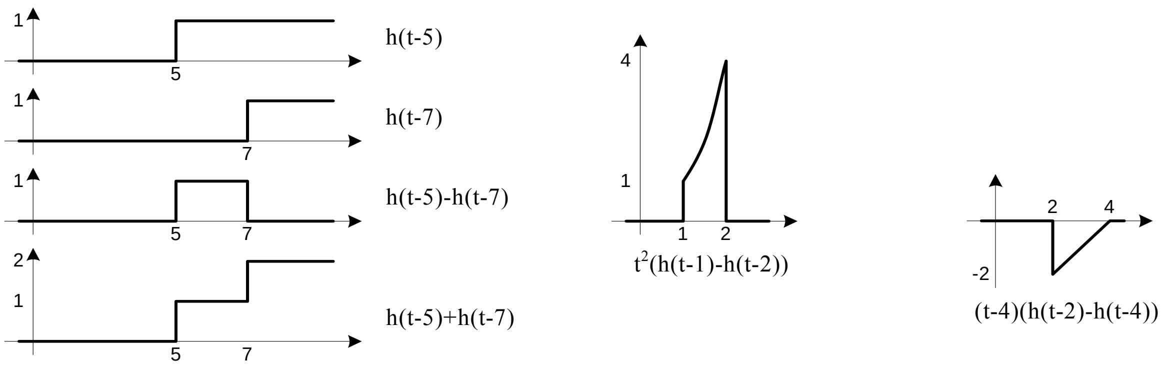
a) $g_1(t)=h(t-5)-h(t-7)$

b) $g_2(t)=h(t-5)+h(t-7)$

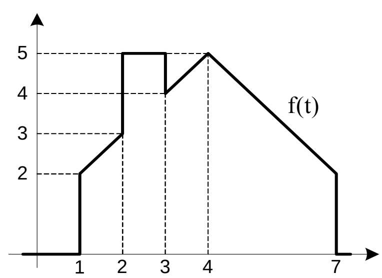
c) $g_3(t)=t^2[h(t-1)-h(t-2)]$

d) $g_4(t)=(t-4)[h(t-2)-h(t-4)]$

Rješenje:



Zadatak 5. Koristeći se signalima $a(t)=u(t)$ i $b(t)=tu(t)$, kao i operacijama skaliranja i pomjeranja po vremenskoj osi odredite analitički oblik signala $f(t)$ sa slike.



Rješenje:

$$f(t)=2a(t-1)+b(t-1)+2a(t-2)-b(t-2)-a(t-3)+b(t-3)-2b(t-4)-2a(t-7)+b(t-7)\,.$$